дешифр

0 869823 910008

86-98-23-91
(160.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов ~~математ~~
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

НАЗАРОВА Даниила Викторовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

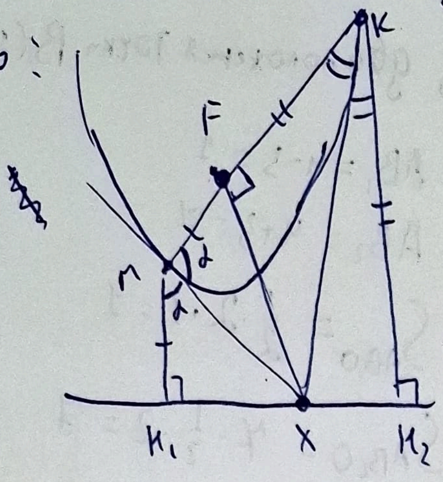
Дата
«13» апреля 2025 года

Подпись участника

86-98-23-91 (160.1)

№6 Лемма: точки ABC лежат на директрисе параболы:

Док-во:



проведём из точки на директрисе 1 кас. XM

продлим MF до точки K

и опустим перпендикуляры MH_1 и KH_2

по св. пар. $MH_1 = MF$

$FK = KH_2$

и MX – бис. угла H_1MF

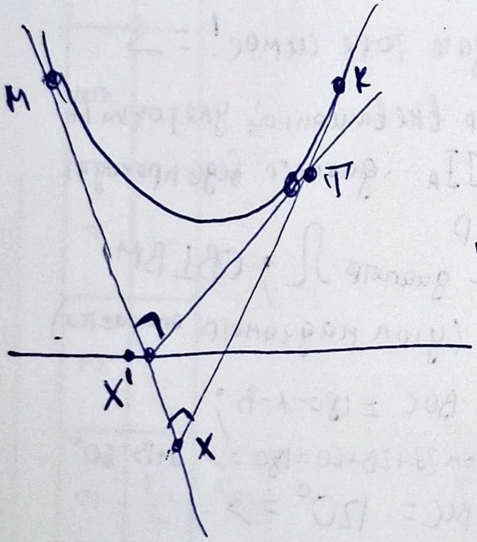
85 (восемьдесят пять)

Тогда $\triangle H_1MX = \triangle FMX$ по I призн. $\Rightarrow XF \perp MK \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle FKX = \triangle H_2KX$ по 2ум катетам и гипотенузам $\Rightarrow$

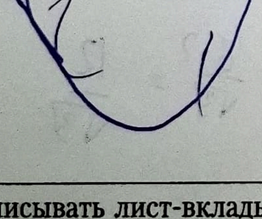
$\Rightarrow XK$ – бис угла $FKH_2 \Rightarrow XK$ – кас.

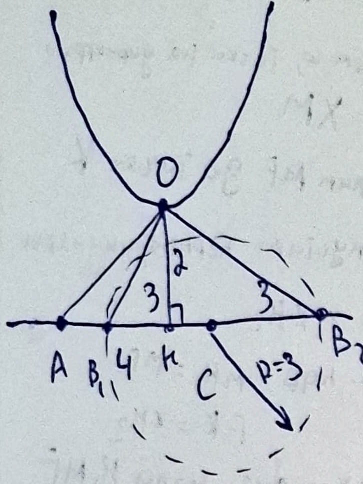
Теперь если точки не на директрисе то см рисунок:



Предположим из X кас. перпендикулярны и она не на директрисе тогда пересечём прямую XM с директрисой вт. X' и проведём кас. из X' и получим еще один угол в 90° (по выше утв.) $\Rightarrow$ но очевидно параллельные прямые могут касаться параболы лишь в 1 точке $\blacksquare$

Теперь когда они на директрисе





$OH = 2 = h$

есть два положения точки B, (1 и 2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB_1 = 4-3 = 1$

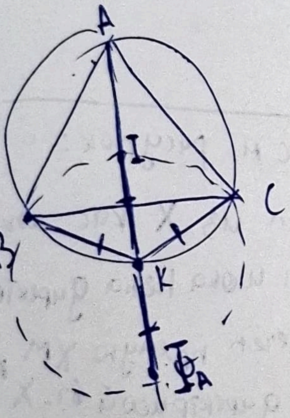
$AB_2 = 4+3 = 7$

$\Rightarrow S_{AB_1O} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = 1$

$S_{AB_2O} = 7\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 = 7$

Ответ: 7 или 1

N2 Вспомним про Лемму о трезубце: I; I_A – центр впис/внеш. окр.



точки $B\,I\,C\,I_A$ лежат на одной окружности с центром в середине дуги BC

в нашей задаче тоже самое! $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ M – центр вневписанной для точки A

в частности II_A - диаметр ведь проходит через центр

Тогда: OM – диаметр Ω; $OB \perp BM$

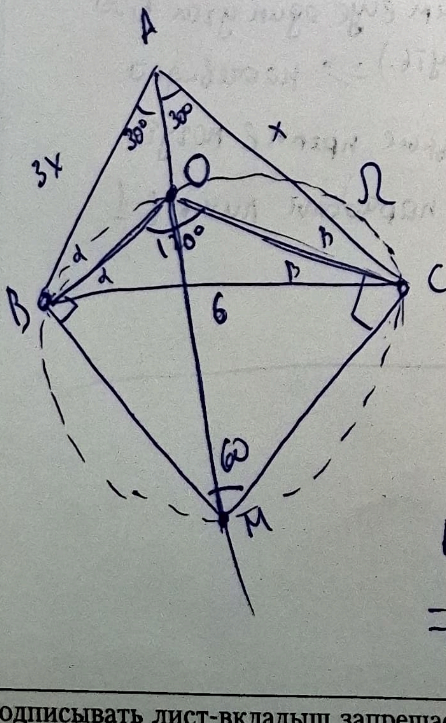
$OC \perp CM$ (угол на диаметр опирается)

тогда $\angle BOC = 180 - \alpha - \beta$;

при этом $2\alpha + 2\beta + 60 = 180 \Rightarrow \alpha + \beta = 60°$

$\Rightarrow \angle BOC = 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BMC = 60°$ т.к. впис. чет-ник $BOCM$



но тогда $2R_\Omega = \frac{BC}{\sin\angle BMC}$ из Th sin

но $2R = D = OM \Rightarrow$

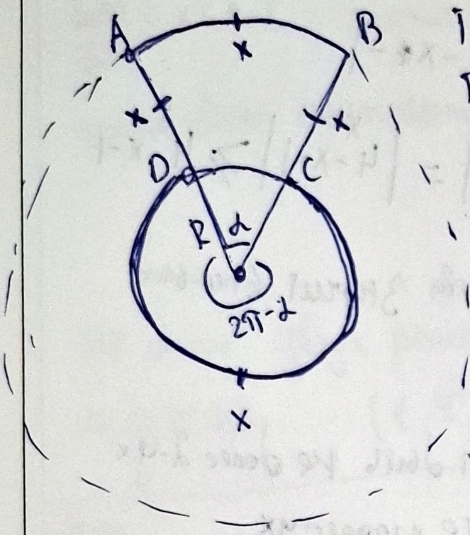
$\Rightarrow OM = \frac{6}{\sin 60°} = \frac{6\cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}}$

86-98-23-91 (160.1)

№8 Поймём, что если прямая перпендикулярна дуге окружности то прямая проходит через центр этой окружности.

(т.к. направление совпадает с радиусом проведённым в точку касания, а радиус перпендикулярен) тогда:

см рисунок:



Т.к у прямых всего 1 точка пересечения то окружности концентричны.

Также так как все отрезки равны, то:

$$x = \alpha(R+x) \quad \text{дуга } AB$$

$$x = (2\pi-\alpha)R \quad \text{дуга } CD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x}{\alpha} - x = R; \quad \frac{x}{2\pi-\alpha} = R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{1}{2\pi-\alpha} \quad \Big| \cdot (2\pi-\alpha)\cdot\alpha$$

$$2\pi - \alpha - 2\pi\alpha + \alpha^2 = \alpha$$

$$\alpha^2 - 2\alpha(\pi+1) + 2\pi = 0$$

$$\alpha = \frac{2(\pi+1) \pm \sqrt{4\pi^2+8\pi+4-8\pi}}{2} = \pi+1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\pi^2+4} =$$

$$= \pi+1 \pm \sqrt{\pi^2+1}$$ понятно, что корень с $+$ неподходит

т.к $> \pi \Rightarrow$ $\alpha = \pi+1-\sqrt{\pi^2+1} = \overline{AB}$

$$2\pi-\alpha = 2\pi-\pi-1+\sqrt{\pi^2+1} = \overline{CD} =$$

$$= \pi-1+\sqrt{\pi^2+1}$$

№4 вспомогательное нер-во: $* \; |a|+|b| \geqslant |a-b|$

притом равенство только тогда, когда

$a>0$; $b<0$

или наоборот

$a<0$ $b>0$ т.е разных знаков

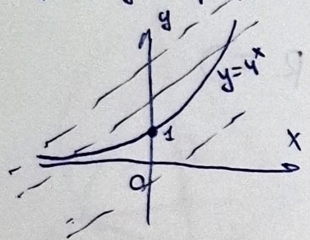
должны быть числа.

Теперь само нер-во: $|x+1-a|+|4^x-a| = 4^x-x-1$

$$|x+1-a|+|4^x-a| \overset{*}{\geqslant} |4^x-a+a-x-1| = |4^x-x-1| \geqslant 4^x-x-1$$

А это в свою очередь правая часть равенства значит в нер-вах везде равенство $\Rightarrow$ $4^x-x-1 \geqslant 0$

нарисуем график 4^x: С прямой у него может быть не более 2-ух решений ну давайте угадаем их



т.е когда $f(x)=4^x = g(x)=x+1$

при $x=0$

$f(0)=4^0=1$; $g(0)=0$ ✓

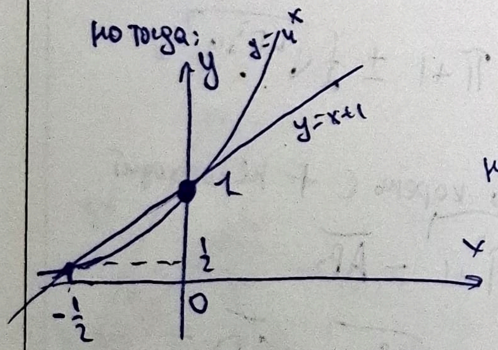
при $x=-0{,}5$ ✓

$f(-0{,}5)=4^{-0{,}5}=\frac{1}{2}$; $g(-0{,}5)=-0{,}5+1=\frac{1}{2}$

$G(x)$ ॥

т.е $4^x-x-1=0$ только при $x=-\frac{1}{2}$; 0

но тогда:



Тогда при $x\in[-1;-0{,}5]$ $G(x)\geqslant 0$

неподходит $\rightarrow$ $x\in(-0{,}5;0)$ $G(x)<0$

$x\in[0;1]$ $G(x)\geqslant 0$

супер теперь с первым нер-вом оно выполняется только тогда, когда:

① $\begin{cases} 4^x-a\geqslant 0 \\ x+1-a\leqslant 0 \end{cases}$

$\Downarrow$

$4^x \geqslant a \geqslant x+1 \geqslant 0$

② $\begin{cases} 4^x-a\leqslant 0 \\ x+1-a\geqslant 0 \end{cases}$

$0<4^x\leqslant a\leqslant x+1$

$\Downarrow$

$a-1\leqslant x\leqslant \frac{\ln a}{\ln(4)}$

86-98-23-91 (160.1)

С 1 ым разбираемся

модули раскроются так

$4^x - a + a - x - 1 = 4^x - x - 1$ -> что есть тождество

что значит, что при любом x из дапазона такого что

$\frac{\ln(a)}{\ln(4)} \leq x \leq a-1$ значит эти диапазоны должны совпасть

чтобы было единственное решение, т.е $\ln(a) = \ln(4)(a-1)$

$a = 4^{(a-1)}$

опять же см. график

не более двух решений, а они угадываются как $a=1$

и $a = 0{,}5$ $(1 = 4^0; \ 0{,}5 = 4^{-0{,}5})$

~~А второй случай модули раскроются так:~~

~~$-4^x + a + x + 1 - a = 4^x - x - 1$~~

~~$-4^x + x + 1 = 0$ что только при $x = -0{,}5$ и 0~~

~~И это выполнено при $a-1 < x \leq \frac{\ln(a)}{\ln 4}$ ~~точка~~ 0~~

~~значит если есть точка 0, то $a - 1 \leq \frac{\ln(a)}{\ln 4}$~~

~~если точка $-0{,}5$, то $a - 0{,}5 \leq \frac{\ln(a)}{\ln 4}$~~

~~и выполнено должно быть только 1 =>~~

~~=> $a - 0{,}5 > \frac{\ln a}{\ln 4}$ => $4^{a-0{,}5} > a$~~

А второй случай не подходит ведь тогда $x+1 > 4^x$ => Отрицательное число справа, а слева сумма модулей

Итого Ответ: при $a = 1$; $a = 0{,}5$ единств. реш

№7 Для начала поймём, что суперсчастливое число $\equiv 9 \mod 10$

в противном случае ~~сч~~ перехода через разряд не было

И тогда сумма ~~чисел~~ цифр просто поменяет чётность,

а у счастливого числа должна быть чётная сумма цифр. т.к. на две группы равных разделили.

Теперь будем следить за следующим после суперсчастливого числа целым числом. Оно делится на 10 и при этом можно разбить на две группы с равными суммами =>

на промежутке от [400 до 1000) это числа $\overline{ab0}$ =>

=> $a=b$ => числа вида $\overline{aa0}$:

439	440
549	550
659	660
769	770
879	880
989	990

как видно подходит только 549 : 5+4=9

Теперь на промежутке от 1000 до 2000 невкл

числа вида $\overline{1bc0}$ => либо $b=c+1$

либо $c=b+1$

выпишем эти числа:

1010 (1009) x

1100 (1099) x

1120 (1119) x

1210 (1209) x

1230 (1229) x

1320 (1319) x

1340 (1339) x

1450 (1449) ✓

1430 (1429) x

1540 (1539) ✓

1560 (1559) ✓

1670 (1669) x

1650 (1649) ✓

1760 (1759) x

1780 (1779) x

1870 (1869) x

1890 (1889) x

1980 (1989) x

подходят только

1+4+4=9 1449

1+5+3=9 1539

5+5=9 1559

6+4=9 1649

Теперь от 2000 до 2400

такой же вид: $\overline{2bc0}$

либо $b=2+c$ либо $c=2+b$

либо $b=c=1$

Итого 2020 (2019) x

2110 (2109) x

2130 (2129) x

2200 (2199) x

2240 (2239) x

2350 (2349) ✓

2310 (2309) x

2350

2349

2+3+4=9

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Итого Ответ: суперсчастливые числа 549. 1449. 1539. 1559. 1649. 2349. **6 чисел**

№3 Про ОДЗ вспомним потом, а пока просто раскрываем.

① $\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x} \geq 0$

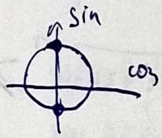
② также $\sqrt{\cos x}$; $-\sin x$; ≥ 0

$$\sqrt{\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x}} > 2\sqrt{\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x}}$$ в квадрат

$$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x} > 4\sqrt{\cos x} - 4\sqrt{-3\sin x}$$

$$6\sqrt{-3\sin x} > 3\sqrt{\cos x}$$ при $\cos x = 0$; $\sin x < 0$ ②

$\cancel{2 > -3\,tg\,x}$



$\sin x = -1$ и нер-во выполнено всегда

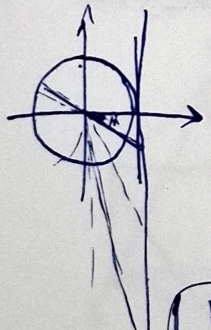
⇓

$\cancel{x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k}$ – реш.

но не проходит первое ОДЗ ①

$\Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow$ можно делить на $\cos x \Rightarrow$ $2\sqrt{-3\,tg\,x} > 1$

$tg\,x < -\frac{1}{12}$



$\Rightarrow \alpha = -\text{arctg}\left(\frac{1}{12}\right) \Rightarrow x = \pi k + \varphi$ $\quad -\pi/2 \quad -\text{arctg}\frac{1}{12}$

где $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; -\text{arctg}\frac{1}{12}\right)$

$k \in \mathbb{Z}$

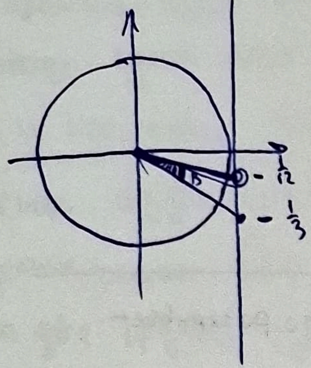
Вот теперь если косинус > 0; а синус $< 0 \Rightarrow$ это IV четверть

т.е $x = 2\pi k + \varphi$; и осталось проверить только

$\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x} \geq 0$

т.е $-\frac{1}{3} \leq tg\,x \Rightarrow$ $\boxed{-\frac{1}{3} \leq tg\,x < -\frac{1}{12}}$ и угол лежит в IV четверти

Тогда под это подходят все такие углы:



все углы входящие в диапазон β

~~скр~~

$\Rightarrow$ ~~$\operatorname{arctg}(-\frac{1}{3}) < \beta$~~

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) \le \beta < \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{12}\right)$$

Ответ: $x = 2\pi z + \beta$ где $z \in \mathbb{Z}$,

$\beta \in \left[\operatorname{arctg} -\frac{1}{3} ; \operatorname{arctg} -\frac{1}{12}\right)$

N1 сделаем замену $\log_2 x = t$

запишем ОДЗ:

$$t^2 + 3t - 4 \ge 0 \quad **$$

$(t+4)(t-1) \ge 0$ $t \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$

$* \; t^2 + 3t - \sqrt{t^2+3t-4} \ge 0$ – потом проверим

$t \le -1$ сразу подходят если $*$ проходят и $**$

пусть $t > -1 \Rightarrow t+1 > 0$ можно в квадрат.

$$\sqrt{t^2+3t-\sqrt{t^2+3t-4}} \ge t+1$$

$$t^2+3t-\sqrt{t^2+3t-4} \ge t^2+2t+1$$

$$t-1 \ge \sqrt{t^2+3t-4}$$

при $t < 1$ нер-во неверно $\Rightarrow$ $\Rightarrow t \ge 1$

$$t^2-2t+1 \ge t^2+3t-4$$

$$5 \ge 5t$$

$1 \ge t \Rightarrow$ реш только 1: $t = 1$

Т.е при $t > -1$ всего 1 решение $t = 1$, ~~но~~ оно подходит ведь $\sqrt{1+3} = 1+1$

~~не подходит по $**$ $\Rightarrow$ при $t > -1$ решений~~

Теперь при $t \le -1$ Достаточно выполнения ОДЗ:

т.е $t^2+3t-\sqrt{t^2+3t-4} \ge 0$ и $**$

$t(t+3) = \underbrace{t^2+3t}_{\lambda} \ge \sqrt{\underbrace{t^2+3t-4}_{\lambda}}$

~~квадрат~~ ~~t^4+6t^3~~

~~больше нуля только при $t \in (-\infty; -3) \cup (0; \infty)$~~

~~$\Downarrow$ объединяя с $**$~~

~~$t \in (-\infty; -3) \cup [4; +\infty)$~~

Это выполнено всегда когда

$\lambda \ge 4$

Т.е всегда когда $\lambda > 4$ слева очевидно большее число чем справа ведь $\sqrt{x}$ функция а при $\lambda \le 4$ под корнем отриц. число.

$\Downarrow$

$t^2+3t-4 \ge 0$

$(t-4)(t+1) \ge 0$

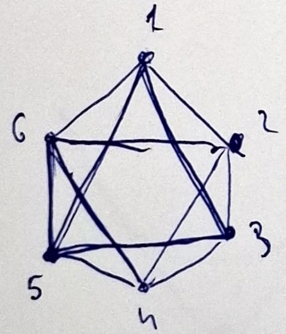
$t \in (-\infty; -1] \cup (4; +\infty)$ объединяя с $**$ $\Rightarrow$ $t \in (-\infty; -4]$

тогда $\log_2 x \in (-\infty; -4] \cup \{1\}$

$x \in (0; \frac{1}{16}] \cup \{2\}$ $\Rightarrow$ целые значения $f(x)$ при $x = \frac{1}{16}; 2$ $\Rightarrow$

Ответ: 2 целых значения; а их сумма $= \frac{1}{16} \cdot 16 + 32 = \underline{33}$

№5 Нарисуем граф переходов жука вершины – i-ая грань



Тогда условие того, что жуки переползя оставили кубик заполненым равносильно разбиению этого графа на несколько циклов. Получаем, что циклы могут быть длины 2; 3; 4; 5; 6 а возможные разбиения: 6;

4-2;

3-3;

2-2-2;

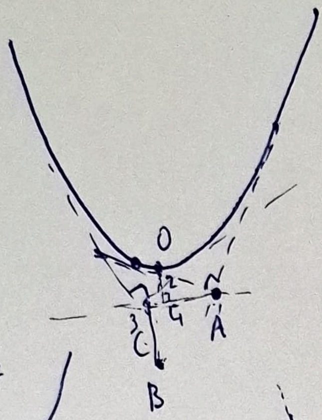
все варианты переползания $= 4^6 = 2^{12}$

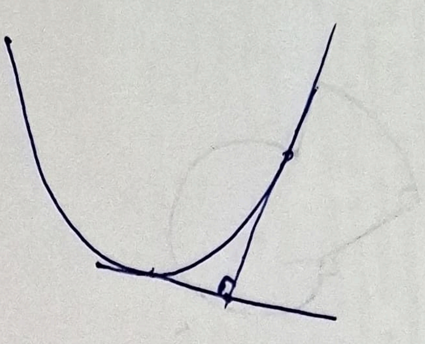
разбиений $2-2-2 = 4 \cdot 2 = 8$

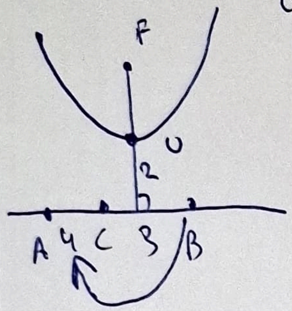
разбиений $3-3 = 4$

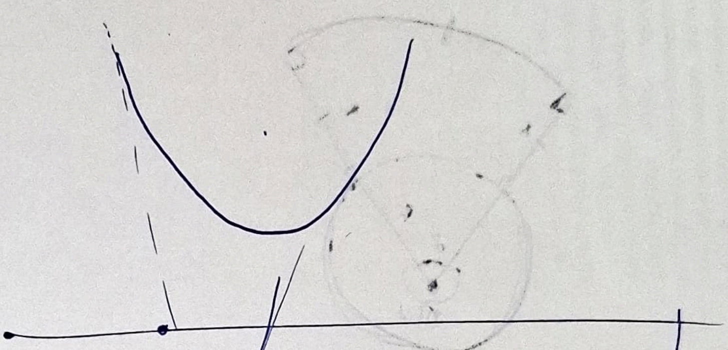
разбиений $4-2$

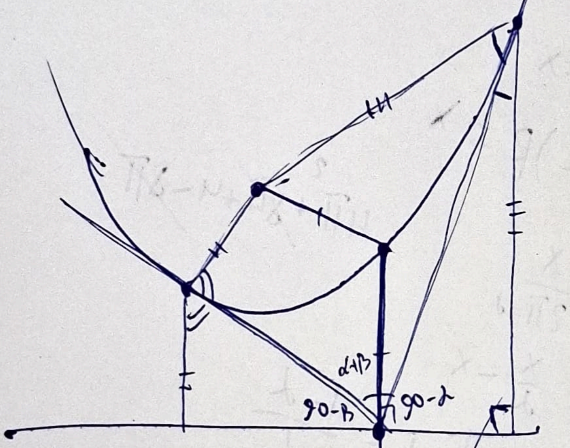
Черновик

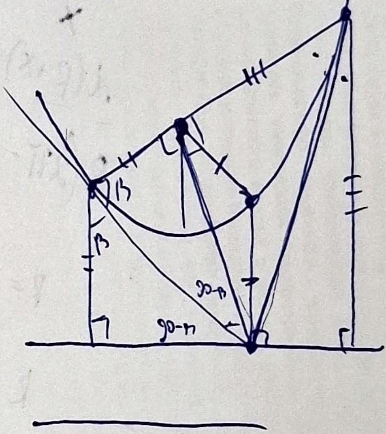


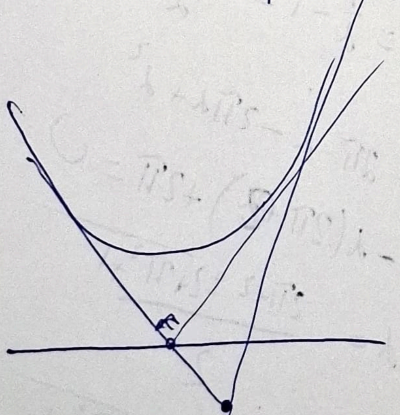




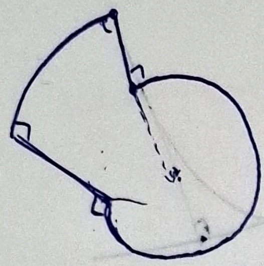


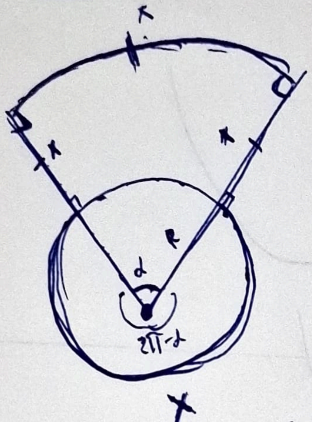






§ Черновик





$$\alpha(R+x)=x$$

$$(2\pi-\alpha)R=x$$

$$4\pi^2+\cancel{8\pi}+4-\cancel{8\pi}$$

$$R=\frac{x}{2\pi-\alpha}$$

$$R=\frac{x}{\alpha}-x$$

$$\frac{1}{2\pi-\alpha}=\frac{1}{\alpha}-1=\frac{1-\alpha}{\alpha}$$

$$\alpha=2\pi-\alpha-2\pi\alpha+\alpha^2$$

$$\alpha^2-\alpha(2\pi+2)+2\pi=0$$

$$\alpha=\frac{2\pi+2\pm2\sqrt{\pi^2+1}}{2}$$

$$\alpha=\pi+1\pm\sqrt{\pi^2+1}$$