0 066729 560003

06-67-29-56

(162.17)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по Математике.
профиль олимпиады

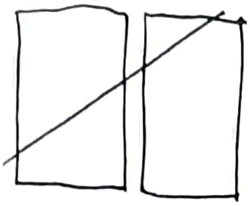
Орловского Евгения Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

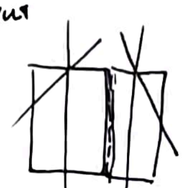
06-67-29- (162.17)



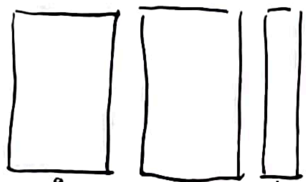
задача Валя

Черновик №1/3

1. Задача



побеждает Аля => сначала отрезает $\frac{1}{10}$ карт. а дальше действует симметрично.



$\frac{9}{20}$ $\frac{9}{20}$ $\frac{1}{10}$

$x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13$

$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$

$+ \; -1 \; - \; 2 \; +$

(+) $x^3 - x^2 + x + 2 = 12x - 13 \Rightarrow x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$

$8 - 4 - 22 + 15$

$27 - 9 - 33 + 15 = 0$

$42 - 42 = 0$

(−) $x^3 + x^2 - x - 2 = 12x - 13$

$x^3 - x^2 - 11x + 15 \;|\; x - 3$

$x^3 - 3x^2 \quad\; x^2 + 2x - 5$

$2x^2 - 11x$

$2x^2 - 6x$

$-5x + 15$

$-5x + 15$

$(x-3)(x^2 + 2x - 5) = 0$

$D = 4 + 20 = 24$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -1 \pm \sqrt{6}$

$-1 - \sqrt{6}$

$x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0$

$x^3 + x^2 - 13x + 11 \;|\; x - 1$

$x^3 - x^2 \quad\; x^2 + 2x - 11$

$2x^2 - 13x$

$2x^2 - 2x$

$-11x + 11$

$-11x + 11$

$(x-1)(x^2 + 2x - 11) = 0$

$D = 4 + 44 = 48$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{48}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{3}$

$-1 + 2\sqrt{3} \gtrless 2$

$2\sqrt{3} \gtrless 3$

$12 \gtrless 9$

$ab = 2a + 2b$

$2b = 4 + 2b$

~~$b = 3$~~

$3b = 6 + 2b$

$b = 6$

$4b = 8 + 2b$

$b = 4$

$5b = 10 + 2b$

$6b = 12 + 2b$

$4b = 12$

$b = 3$

$8b = 16 + 2b$

$10b = 20 + 2b$

$ab =$

$ba =$

$a(b-2) = 2b$

$a = \frac{2b}{b-2}$

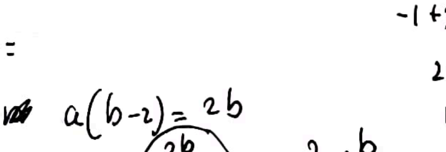
$\frac{2 \cdot b}{b-2}$

max $b - 2 = 4$

$b = 6$

$a = \frac{12}{4} = 3$; $a = \frac{10}{3}$ X; $a = \frac{8}{2} = 4$

$a = \frac{6}{1} = 6$;



$-25 - 12\sqrt{6} =$

$=$

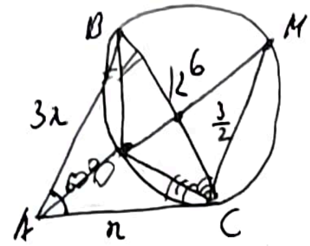
$(-1 - \sqrt{6})^3 = -(1 + \sqrt{6})^3 = -(7 + 2\sqrt{6})(1 + \sqrt{6}) =$

$= -(7 + 9\sqrt{6} + 12) = -19 - 9\sqrt{6}$ | $7 + 2\sqrt{6} + 1 + \sqrt{6} - 2 =$

$= 6 + 3\sqrt{6}$

75 (семьдесят пять)

Черновик №3/3



$\frac{36 \cdot 144}{3}$

$432 - 189 =$

$= 243$

$81 \cdot 3 =$

$9x^2 + x^2 - 2 \cdot 3x^2 \cdot \frac{1}{2} = 36$

$7x^2 = 36$

$x^2 = \frac{36}{7}$; $x = \frac{6\sqrt{7}}{7}$

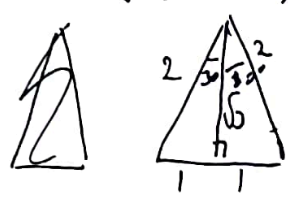
$\sqrt{3x^2 - \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{2}} =$

$= \sqrt{3x^2 - \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 36}{7} - \frac{27}{4}} =$

$= \sqrt{\frac{12 \cdot 36 - 189}{28}} = \sqrt{\frac{243}{7 \cdot 4}} = \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} =$

$= \frac{9\sqrt{21}}{14}$

$\sqrt{4-1} = 3$

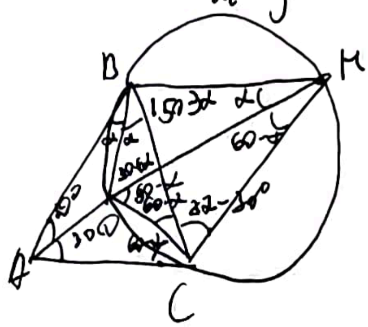


$\frac{6\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{y}{\frac{9\sqrt{21}}{14} - y}$

$\frac{4\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{9\sqrt{21}}{14} - \frac{4\sqrt{7}}{7} \cdot y = y$

$\frac{18\sqrt{3}}{7} = y\left(1 + \frac{4\sqrt{7}}{7}\right)$

$y = \frac{18\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{7}{7 + 4\sqrt{7}} = \frac{18\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{7}}$



$x^2 = \frac{18\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{7}} \cdot \left(x + \frac{18\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{7}}\right)$

$\frac{36}{7} = \frac{36}{7} \cdot \frac{7 + 4\sqrt{7}}{18\sqrt{3}} = \frac{14 + 8\sqrt{7}}{7\sqrt{3}} = x + \frac{18\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{7}}$

$64 - 28 = 36$

$\frac{1}{x} = -18x + a$

$\frac{1}{x} \cdot 18x + a = y$

$-18x + a = 0$

$\frac{1}{x} = -18x + a$

$D = -18x^2 + a$

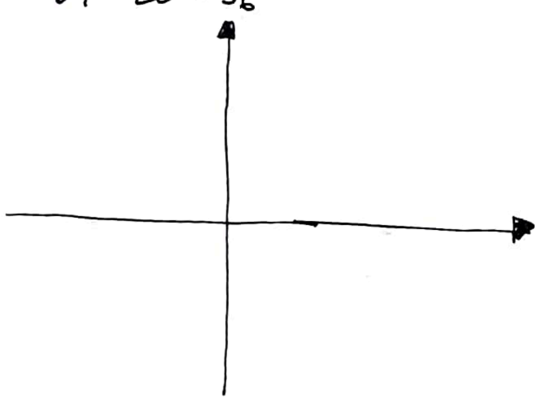
$x^2 = \frac{a}{18}$

$x = \frac{\sqrt{a}}{3\sqrt{2}} =$

$= \frac{\sqrt{2a}}{6}$

$-1 = 18 + a$

$1 = -18 + a$



$\frac{1}{x} = -18x + a \mid x$

$1 = -18x^2 + ax$

$18x^2 - ax + 1 = 0$

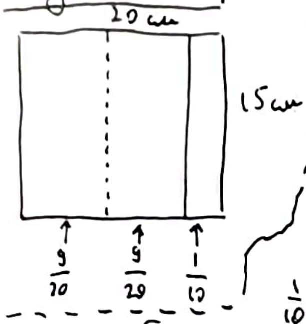
$D = a^2 - 72$

$\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 72}}{36}; \frac{36}{a - \sqrt{a^2 - 72}}\right)$; $(0; a)$; $\left(\frac{\sqrt{2a}}{6}; 0\right)$

$\frac{a \pm \sqrt{a^2 - x^2}}{36} = x$

Задача №1

Чистовик №1/4



Т.к. Аля ходит первая, то пусть она разрежет пирог на 3 части так, чтобы одна часть по площади была равна $\frac{1}{10}$ пирога, притом являлась прямоугольником и 2 остальные части были равны по площади и являлись прямоугольниками. Тогда пусть Аля съест $\frac{1}{10}$ пирога (по условию можно). Тогда следующими ходами будет ходить Валя и на каждый её ход Аля может ответить, вот почему:

1) Пусть она сделала разрез перпендикулярный пунктиру, тогда второй разрез (если он есть) тоже будет перпендикулярен пунктиру, и съест один кусок, тогда из симметричности ходов, Але не нужно будет делать разрезов и она съест кусок симметричный Валиному.

2) Пусть она сделала разрезы параллельные пунктиру и съела кусок, тогда сделаем такие же разрезы симметричные Валиным и съедим кусок симм. Валиному.

3) Пусть она сделала другие разрезы не параллельные и не перп. пунктиру и съела кусок, тогда сделаем симметричные ей относительно пунктира разрезы и съедим кусок симметричный Валиному.

4) Если она просто съела кусок, тогда из соображения симметрии съедим симметричный относительно пунктирной линии ему.

Тогда на каждый Валин ход у нас есть ответ, тогда если у неё есть ход то и у нас есть, а если у нас нет хода, то они проиграли $\Rightarrow$ Валя проиграет, а Аля выиграет.

Ответ: Аля выиграет.

Задача №2

$x^3-|x^2-x-2|=12x-13$, при $x\in(-1;2)$: $x^2-x-2<0$, а при $x\in(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$: $x^2-x-2\ge0$, тогда раскроем:

$$\left[\begin{array}{l} x^3-x^2+x+2=12x-13, \text{ при } x\in(-\infty;-1]\cup[2;+\infty) \\ x^3+x^2-x-2=12x-13, \text{ при } x\in(-1;2) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^3-x^2-11x+15=0, \text{ при } x\in(-\infty;-1]\cup[2;+\infty) \\ x^3+x^2-13x+11=0, \text{ при } x\in(-1;2) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (x-3)(x^2+2x-5)=0, \text{ при } x\in(-\infty;-1]\cup[2;+\infty) \\ (x-1)(x^2+2x-11)=0, \text{ при } x\in(-1;2) \end{array}\right.$$

на сл. стр

Чистовик №2/4

$$\left[\begin{aligned}&(x-3)(x+(1+\sqrt6))(x+(1-\sqrt6))=0, \text{ при } x\in(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)\\&(x-1)(x+(1+2\sqrt5))(x+(1-2\sqrt5))=0, \text{ при } x\in(-1;2)\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&x\in\{3;-1-\sqrt6;-1+\sqrt6\}, \text{ при } x\in(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)\\&x\in\{1;-1-2\sqrt5;-1+2\sqrt5\}, \text{ при } x\in(-1;2)\end{aligned}\right.$$

$-1+\sqrt6>-1$, и <2, все остальные подходят

$-1-2\sqrt5<-1$; $-1+2\sqrt5>2$, 1 подходит,

тогда

$$\left[\begin{aligned}&x\in\{3;-1-\sqrt6\}\\&x\in\{1\}\end{aligned}\right.$$

$x\in\{3;1;-1-\sqrt6\}$

Ответ: $\{3;1;-1-\sqrt6\}$

Задача №3

Периметр прямоугольника со сторонами a и b : $2a+2b$, площадь ab, тогда найдем всевозможные прямоугольники, для которых $2a+2b=ab$, причем $a;b\in\mathbb{N}$;

$2a+2b=ab$; $2a=b(a-2)$; $b=\frac{2a}{a-2}$; Заметим, что если $a>3$ и $a\not\vdots\,2$, то $b\notin\mathbb{N}$, т.к. ~~2~~ 2 — не имеет в себе нечет. множ., кроме един., а a, а $НОД(a;a-2)=1$ тогда; Заметим что $\max НОД(a;a-2)=2$, тогда $\max НОД(2a;a-2)=4$, тогда $\max(a-2)=4$

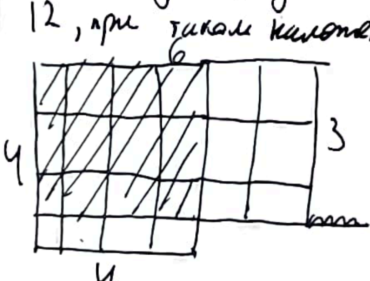
$\Rightarrow a-2=4 \Rightarrow a=6$, тогда $b=\frac{12}{4}=3$

$a-2=3 \Rightarrow a=5$, тогда $b=\frac{10}{3}=3\frac13 \Rightarrow \times$

$a-2=2 \Rightarrow a=4$, тогда $b=\frac{8}{2}=4$

$a-2=1 \Rightarrow a=3$, тогда $b=\frac{6}{1}=6$

Тогда у нас возможны только прямоугольники со сторонами 6 и 3 ; 4 и 4 ; Тогда у нас 2 различных прямоугольника: ~~1-со сторонами~~ 1-ый — 4×4, 2-ой — 6×3, чтобы найти min-не совпадения, нужно найти max совпадения, который равен 12, при таком наложении:



Заштриховано — совпадение, тогда накрыто одним слоем бумаги:

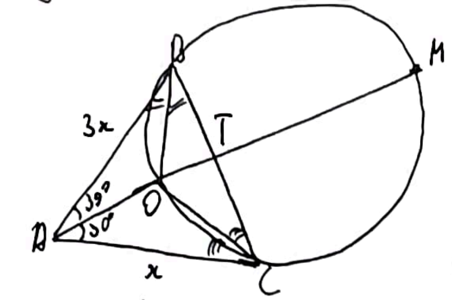
$2\cdot3+4\cdot1=10$

Ответ: 10.

06-67-29-56 (162.17)

Задача №4

Чистовик №3/4



BC = 6

по т. косинусов:

$9x^2+x^2-2\cdot 3x\cdot x\cdot \cos 60^\circ = 36$

$10x^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3x^2=36$

$7x^2=36;\ x^2=\frac{36}{7};\ x=\frac{6\sqrt7}{7}$

из св.-ва биссектрисы $BT=3TC=4{,}5,\ TC=1{,}5$

по т. Стюарта: AT, т.к. биссектриса: $AT=\sqrt{3x^2-BT\cdot TC}=\sqrt{\frac{108}{7}-\frac{27}{4}}=\sqrt{\frac{432-189}{28}}=\sqrt{\frac{243}{28}}=\frac{9\sqrt3}{2\sqrt7}=\frac{9\sqrt{21}}{14}$; $\frac{AO}{OT}=\frac{x}{\frac32}$; $OT=y \Rightarrow AO=\frac{9\sqrt{21}}{14}-y$

$\frac{\frac{9\sqrt{21}}{14}-y}{y}=\frac{\frac{6\sqrt7}{7}}{\frac32}$; $\frac{\frac{9\sqrt{21}}{14}-y}{y}=\frac{4\sqrt7}{7}$; $\frac{9\sqrt{21}}{14}=\frac{4\sqrt7}{7}y+y$; $y=\frac{\frac{9\sqrt{21}}{14}}{\frac{4\sqrt7}{7}+1}=$

$=\frac{\frac{9\sqrt{21}}{14}}{\frac{4\sqrt7+7}{7}}=\frac{9\sqrt{21}}{8\sqrt7+14}=\frac{9\sqrt3}{8+2\sqrt7}=\frac{72\sqrt3-18\sqrt{21}}{36}=\frac{4\sqrt3-\sqrt{21}}{2}$

по интересному свойству: $OT\cdot TM=BT\cdot TC$

$TM=\frac{\frac{27}{4}}{\frac{4\sqrt3-\sqrt{21}}{2}}=\frac{27}{8\sqrt3-2\sqrt{21}}=\frac{9\sqrt3}{8-2\sqrt7}=\frac{72\sqrt3+18\sqrt{21}}{64-28}=\frac{72\sqrt3+18\sqrt{21}}{36}=$

$=\frac{4\sqrt3+\sqrt{21}}{2}$; $OM=OT+TM=\frac{4\sqrt3+\sqrt{21}}{2}+\frac{4\sqrt3-\sqrt{21}}{2}=4\sqrt3$

Ответ: $4\sqrt3$

Задача №7

Заметим, что чтобы ~~у кого~~ точно хотя-бы одну задачу решили ≥ половины класса (≥10 человек), нужно что бы всего решений ≥ 901, потому что если ≤ 900, то может найтись расстановка в которой каждую задачу решили ≤ 9 раз.

Заметим, что если $n=44$, то 19 человек решили хотя бы 44 задачи, а Петя 45 $\Rightarrow$ $\min = 44\cdot 19+45=881$, что <901, значит не подходит; Но если $n\geq 45$, то 19 человек решили хотя бы 45 задач, а Петя − 46 $\Rightarrow$ $\min = 45\cdot 19+46=901$, что $=901$, значит найдётся такая расстановка.

Пусть 1-ый человек решил 1-ую, 2-ую ...... 45-ую; второй решил 46-ую ...... 90-ую; 3-ий решил 51-ую.... 100-ую; 1-ую.... 35-ую........ 19 решил: 11-ую ...... 55-ую, а Петя решил 56-ую, 57-ую ..... 100-ую и 1-ую, тогда ~~для всех~~ все задачи кроме первой решили 9 раз, а первую решили 10 раз, тогда $\min n = 45$

Ответ: 45.

Задача №5 | Чистовик №4/4

Поймем при каких x-ах в ~~выполняется~~ $y=-18x+a$, пересекает $y=\frac{1}{x}$: $\frac{1}{x}=-18x+a$; если $x\neq 0$: $1=-18x^2+ax$; $18x^2-ax+1=0$

$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-72}}{36}$; а $y=\frac{36}{a\pm\sqrt{a^2-72}}$, заметим что $\frac{a-\sqrt{a^2-72}}{36}\geq 0$ всегда, тогда у нас точки $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-72}}{36};\frac{36}{a-\sqrt{a^2-72}}\right)$ и $\left(\frac{a+\sqrt{a^2-72}}{36};\frac{36}{a+\sqrt{a^2-72}}\right)$ имеют в одной полуплоскости, относительно оси ординат.; найдём точки пересечения с осями абсцисс и ординат.; точки пересечения ~~от~~ с осью абсцисс: $\left(\frac{\sqrt{2a}}{6};0\right)$, т.к. $0=-18x^2+a$; $x^2=\frac{2a}{36}$; $x=\frac{\sqrt{2a}}{6}$; а ~~ось~~ точка пересечения с осью ординат: $(0;a)$, т.к. $y=-18\cdot 0+a \Rightarrow y=a$;

Тогда наши точки расположены в таком порядке:

$(0;a)$; $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-72}}{36};\frac{36}{a-\sqrt{a^2-72}}\right)$; $\left(\frac{a+\sqrt{a^2-72}}{36};\frac{36}{a+\sqrt{a^2-72}}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2a}}{6};0\right)$

Черновик. №3/3

$\frac{1}{x} = -18x + a \quad | \cdot x$

$1 = -18x^2 + ax$

$18x^2 - ax + 1 = 0$

$D = a^2 - 72;$

$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2-72}}{36}$

$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-72}}{36}; \frac{36}{a-\sqrt{a^2-72}}\right);$

$(0; a); \left(\frac{\sqrt{2a}}{6}; 0\right); \left(\frac{a+\sqrt{a^2-72}}{36}; \frac{36}{a+\sqrt{a^2-72}}\right)$

$-18x^2 + a = 0$

$a = 18x^2 = a$

$x^2 = \frac{a}{18}$

$x = \frac{\sqrt{2a}}{6}$

$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-72}}{36}\right)^2 + \left(\frac{36}{a-\sqrt{a^2-72}} - a\right)^2 =$

$= \left(\frac{\sqrt{2a}}{6}\right)^2 + a^2 = \left(\frac{a+\sqrt{a^2-72}}{36} - \frac{\sqrt{2a}}{6}\right)^2 + \left(\frac{36}{a+\sqrt{a^2-72}}\right)^2$

$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-72}}{36}\right)^2 + \left(\frac{36}{a-\sqrt{a^2-72}}\right)^2 \mp \frac{72a}{a-\sqrt{a^2-72}} = \frac{a^2}{18}$

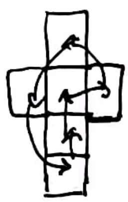
1000 900

$49 \cdot 20 = 980$

45 $45 \cdot 20 = 900$

44 45

$6 \cdot 4$ 4^6



~~$\frac{2\sqrt{a^2-72}}{36}$, $\frac{72a}{...}$~~

$\frac{2\sqrt{a^2-72}}{36};\quad \frac{36a \mp 36\sqrt{a^2-72} - 36a \mp 36\sqrt{a^2-72}}{72} =$

$\frac{\sqrt{a^2-72}}{18};\quad -\sqrt{a^2-72};\quad a^2 - 72 + \frac{a^2-72}{18} = \sqrt{\frac{19a^2 - 72 \cdot 19}{18}}$

$3\sqrt{\frac{a}{18} + a^2} = \sqrt{\frac{19a^2 - 72 \cdot 19}{18}};\quad \sqrt{\frac{a}{2} + 9a^2} = \sqrt{\frac{19a^2}{18} - 72}$

$a < \sqrt{a^2-72}$

$a^2 < a^2 - 72$

$0 < -72$

$(0, a); \left(\frac{a-\sqrt{a^2-72}}{36}; \frac{36}{a-\sqrt{a^2-72}}\right); \left(\frac{a+\sqrt{a^2-72}}{36}; \frac{36}{a+\sqrt{a^2-72}}\right)$

$\left(\frac{\sqrt{2a}}{6}; 0\right)$

$\sqrt{\frac{a}{18} + a^2};\quad \frac{\sqrt{a^2-72}}{18};\quad \frac{-72\sqrt{a^2-72}}{72}$

$\frac{a^2-72}{18};\quad a^2 - 72$

$\sqrt{\frac{a}{18} + a^2} = 3\sqrt{\frac{19a^2 - 72 \cdot 19}{18}}$

$a^2 + \frac{a}{18} = \frac{19a^2}{2} - \frac{72 \cdot 19}{2}$

$2a^2 + \frac{a}{9} = 19a^2 - 72 \cdot 19$

$17a^2 - 72 \cdot 19 - \frac{a}{9} = 0$

$153a^2 - 72 \cdot 171 - a = 0$

$D = 1 + 153 \cdot 72 \cdot 171 \cdot 4 =$

$\begin{array}{r} 153 \\ \times 171 \\ \hline 153 \\ + 1071 \\ 153 \\ \hline 26163 \end{array}$

$\begin{array}{r} 26163 \\ \times 72 \\ \hline 52326 \\ + 183141 \\ \hline 1883736 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1883736 \\ \times 4 \\ \hline 7534944 \end{array}$

7534945