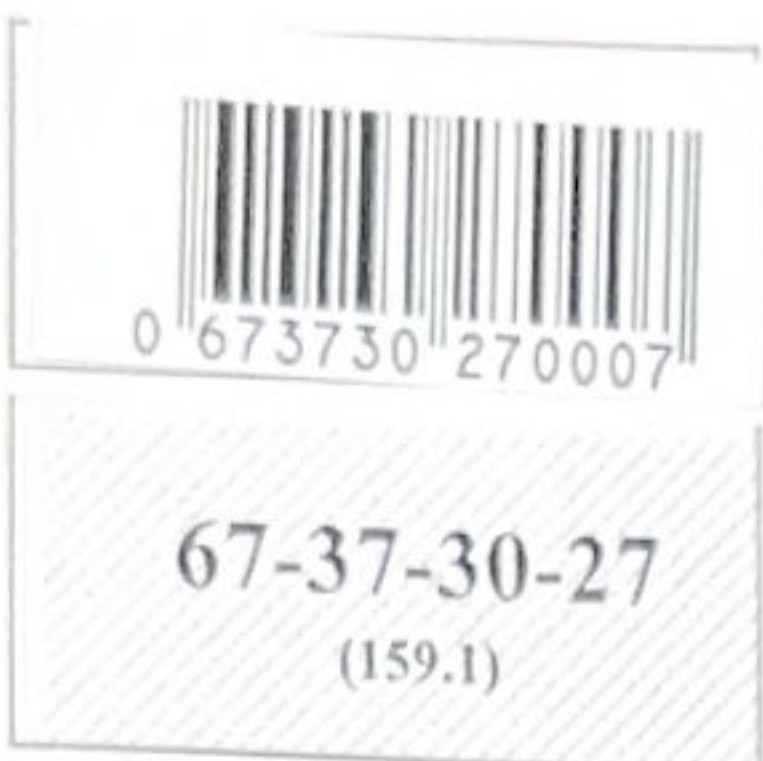




МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9 КЛАСС

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Петровой Марии Вазимовны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«13» апреля 2025 года

Подпись участника

М.Пех

$$N2 \quad x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13$$

~~$$x^3 - x^2 + x + 2 = 12x - 13$$~~
~~$$x^3 + x^2 - x - 2 = 12x - 13$$~~

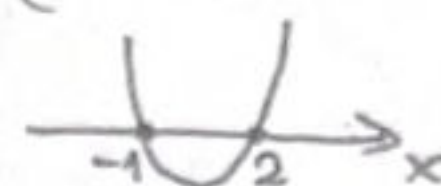
$$\begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^3 - x^2 + x + 2 = 12x - 13 \\ -1 < x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x^3 + x^2 - x - 2 = 12x - 13 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 2$$

$$(x-2)(x+1)$$



$$(1) \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2 \\ x^3 - x^2 + x + 2 = 12x - 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2 \\ (x-3)(x^2+2x-5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x \leq -1 \\ x \geq 2 \\ x^2 + 2x - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 5 &= 0 \\ D &= 4 + 20 = 24 \\ x_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{2} \\ x_{1,2} &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2} \\ x_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x \leq -1 \\ x \geq 2 \\ x = -1 + \sqrt{6} \\ x = -1 - \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 - \sqrt{6} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} -1 < x < 2 \\ x^3 + x^2 - x - 2 = 12x - 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2 \\ (x-1)(x^2+2x-11) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -1 < x < 2 \\ x^2 + 2x - 11 = 0 \end{cases}$$

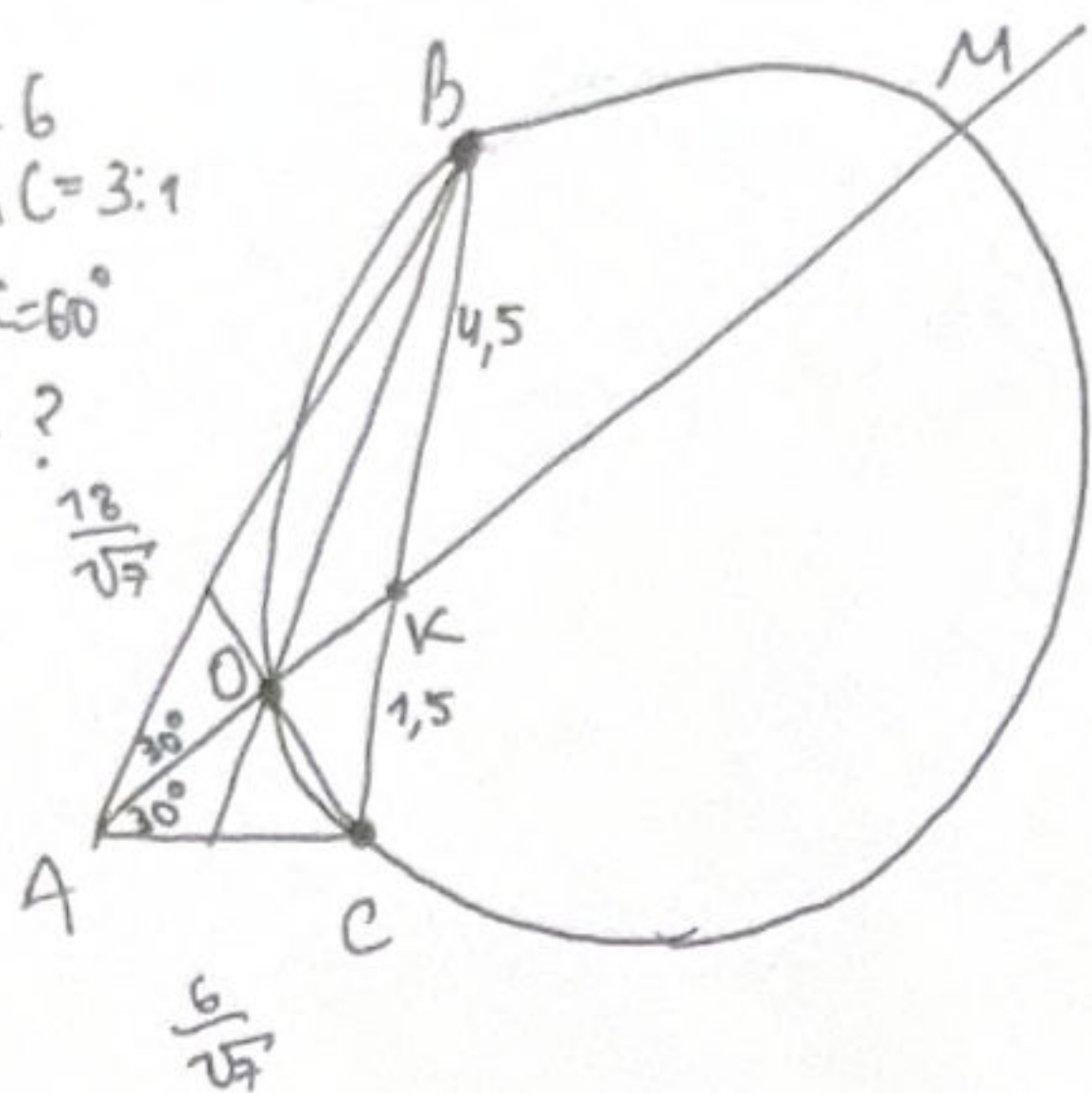
$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 11 &= 0 \\ D &= 4 + 44 = 48 \\ x_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{48}}{2} \\ x_{1,2} &= \frac{-2 \pm 4\sqrt{3}}{2} \\ x_{1,2} &= -1 \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ -1 < x < 2 \\ x = -1 + 2\sqrt{3} \\ x = -1 - 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 + 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \{-1 - \sqrt{6}; 1; -1 + 2\sqrt{3}; 3\}$$

N4

BC=6
AB:AC=3:1
 $\angle BAC=60^\circ$
OM=?



Решение:
1) $\triangle ABC$ по св-ву Дюсс-и:

$$\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC} = 3 \Rightarrow BK=4,5, KC=1,5$$

2) Пусть: $AC=x \Rightarrow AB=3x$ (усл.)

По т. косинусов в $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos \angle BAC$$

$$36 = x^2 + 9x^2 - 2 \cdot x \cdot 3x \cdot \cos 60^\circ$$

$$36 = 10x^2 - 3x^2$$

$$36 = 7x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{36}{7}} \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{7}} \Rightarrow AC = \frac{6}{\sqrt{7}}, AB = \frac{18}{\sqrt{7}}$$

3) AK-диссек $\angle BAC \Rightarrow \angle CAK = 30^\circ = \angle BAK$ (по опр. дисс.)

4) По т. косинусов в $\triangle ABK$:

$$BK^2 = AB^2 + AK^2 - 2 \cdot AB \cdot AK \cdot \cos 30^\circ$$

$$20,25 = \frac{324}{7} + AK^2 - \frac{36}{\sqrt{7}} \cdot AK \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AK^2 - \frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot AK + \frac{729}{28} = 0$$

$$D = \frac{324 \cdot 3}{7} - \frac{4 \cdot 729}{28 \cdot 7} = \frac{972 - 729}{7} = \frac{243}{7}$$

$$x_{1,2} = \frac{\frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \pm \sqrt{\frac{243}{7}}}{2}$$

$$x_1 = \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

$$x_2 = \frac{27\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AK = \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \\ AK = \frac{27\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \end{cases}$$

$$\text{если: } AK = \frac{27\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{27\sqrt{21}}{14} = \frac{27}{14} \sqrt{21}$$

$$AK: \frac{108}{14} < \frac{27}{14} \sqrt{21} < \frac{135}{14}$$

$$BK: BK=1,5$$

$$AC = \frac{6}{\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{7}}{7} = \frac{6}{7} \sqrt{7}$$

$$AC: \frac{12}{7} < \frac{6}{7} \sqrt{7} < \frac{18}{7}$$

$$\text{в } \triangle AKC: AK > \frac{108}{14}, \text{ при этом } AK < CK + AC$$

$$CK + AC < \frac{18}{7} + \frac{3}{2} = \frac{36+21}{14} = \frac{57}{14} = W$$

$$\Rightarrow AK = \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

$$5) \text{ по св-ву Дюсс: } \frac{AB}{BK} = \frac{AO}{OK} = \frac{18 \cdot 2}{\sqrt{7} \cdot 9} = \frac{4}{\sqrt{7}} \Rightarrow OK = \frac{9\sqrt{3}}{2(4+\sqrt{7})}$$

$$6) \text{ по св-ву пересек. хорд: } KC \cdot BK = OK \cdot KM$$

(2)

$$1,5 \cdot 4,5 = \frac{9\sqrt{3}}{2(4+\sqrt{7})} \cdot \text{км}$$

$$6,75 = \frac{9\sqrt{3}(4-\sqrt{7})}{2 \cdot 9} \cdot \text{км}$$

$$\frac{27}{4} = \frac{\sqrt{3}(4-\sqrt{7})}{2} \cdot \text{км}$$

$$27 = \frac{2\sqrt{3}(4-\sqrt{7}) \cdot \text{км}}{27}$$

$$\text{км} = \frac{2\sqrt{3}(4-\sqrt{7})}{27}$$

$$\text{г) } OM = OK + KM = \frac{9\sqrt{3}}{2(4+\sqrt{7})} + \frac{27}{2\sqrt{3}(4-\sqrt{7})} =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}(4-\sqrt{7})}{2 \cdot 9} + \frac{9\sqrt{3}(4+\sqrt{7})}{2 \cdot 9} = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{21} + 4\sqrt{3} + \sqrt{21}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Ответ: $OM = 4\sqrt{3}$

№7 Пусть ~~не~~

Докажем, что $n > 44$.

Если $n \leq 44$, то общее кол-во решённых задач $\leq 880 \Rightarrow$ эти задачи получатся разбить на 100 групп, в каждой из которых не будет не более 9 задач (по принципу Дирихле).

Пример: $\underbrace{8, 8, \dots, 8}_{20}, \underbrace{9, 9, \dots, 9}_{80}$

$$\Rightarrow n \geq 45$$

Если $n = 45$, то мин. кол-во решённых задач равно $45 \cdot 19 + 46$ (т.к. Петя решил больше Васи)

$$\begin{matrix} 11 \\ 901 \end{matrix}$$

Тогда по принципу Дирихле мы не сможем разбить задачи на 100 групп, в каждой из которых ≤ 9 задач $\Rightarrow$ в хотя бы одной будет 10, т.е. эту задачу решит не менее половины класса $\Rightarrow n = 45$ - подходит $\Rightarrow 45$ - мин.

Ответ: для $n = 45$.

67-37-30-27

(159.1)

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 3 & 6 \\ 4 & 4 \\ 6 & 3 \end{array}$$

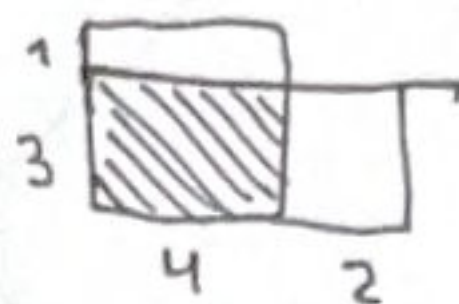
Чистовик

Прямоугольники разные $\Rightarrow$ $3 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline 6 \end{array}$ $4 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline 4 \end{array}$

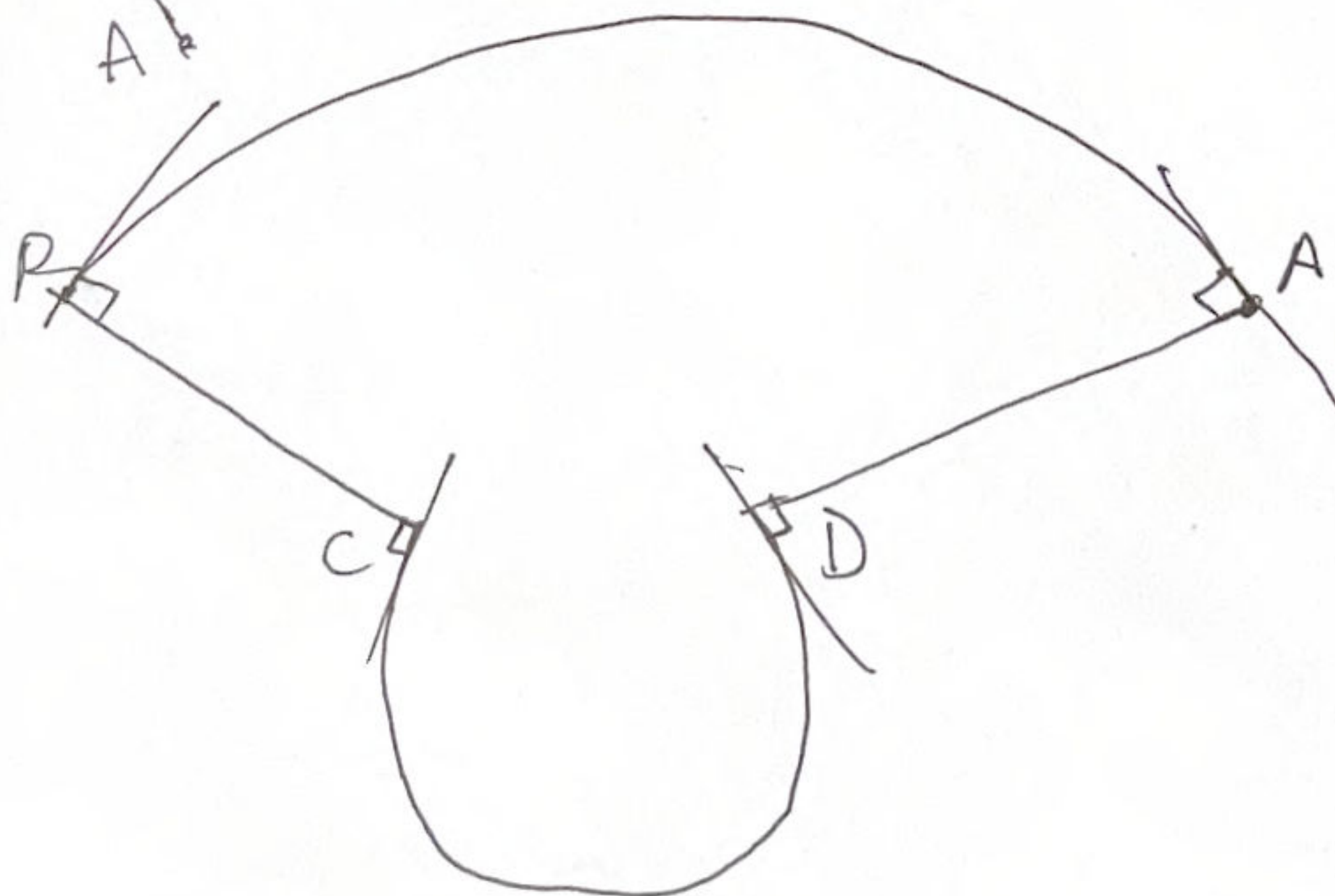
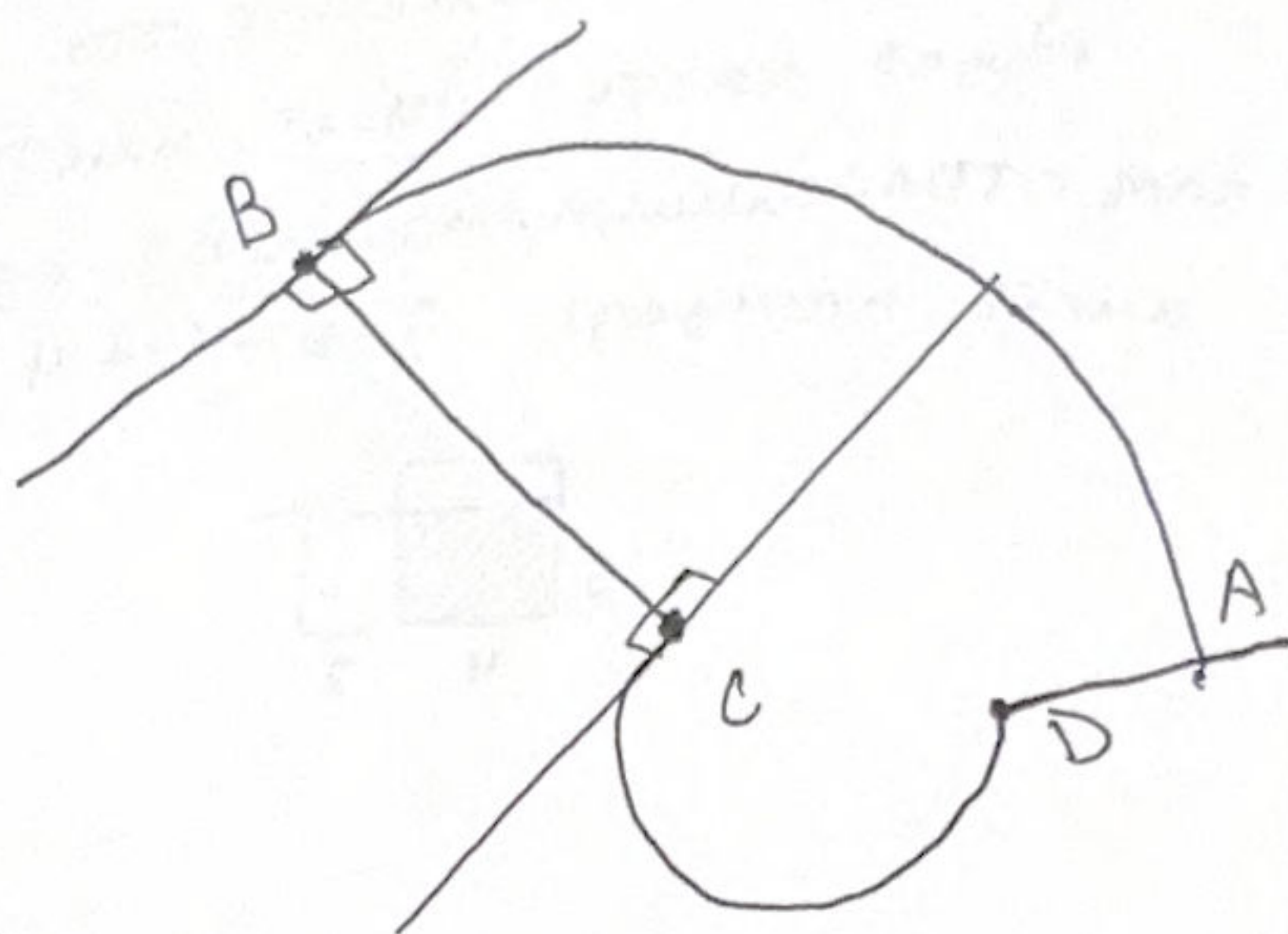
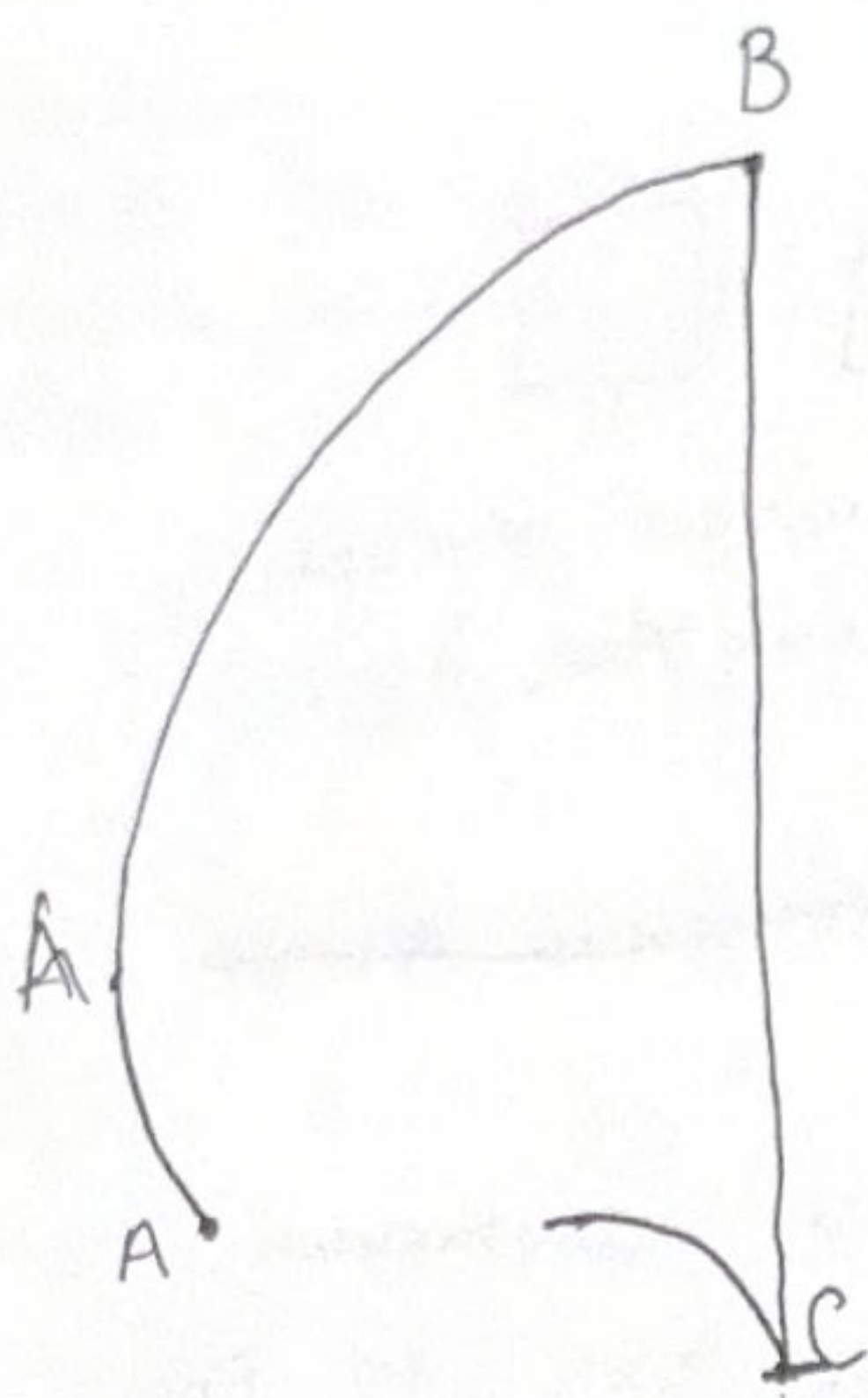
Заметим, что чем больше по площади фигуры наложены, тем меньше часть столешницы ~~то~~ будет накрыта одним слоем бумаги.

~~Несложно заметить, что при наложении фигур таким образом, чтобы они~~

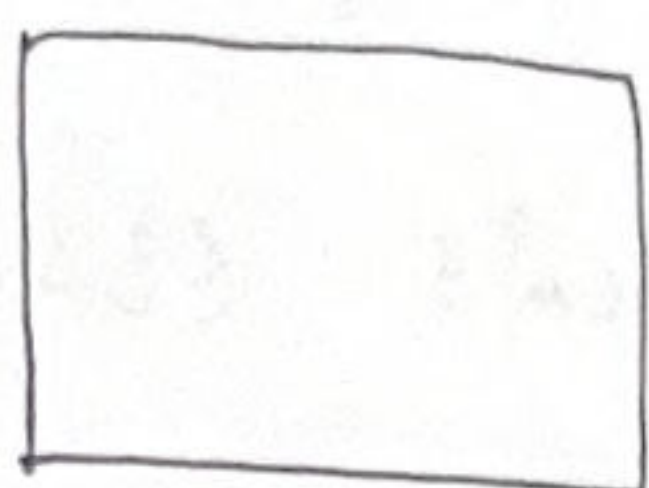
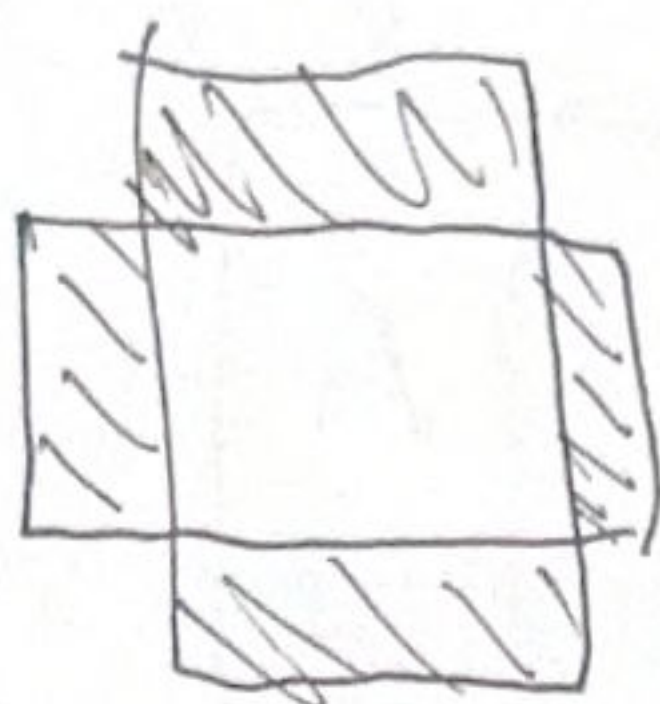
Несложно заметить, что при таком наложении одна часть будет иметь площадь $3 \times 4 = 12$. Тогда часть столешницы, накрытая одним слоем бумаги, будет иметь площадь $3 \cdot 6 - 12 + 4 \cdot 4 - 12 = 6 + 4 = 10$.



Ответ: 10.



ЧЕРНОВИК



$$2(a+b) = ab$$

$$ab = 2a + 2b$$

$$b = 2\frac{a}{b} + 2$$

4 4

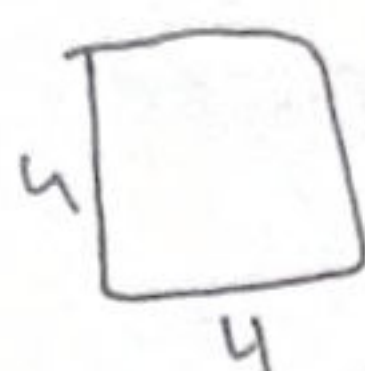
$\frac{b}{2} =$

$$2\frac{a}{b} = b - 2 \quad \frac{16-8}{2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b-2}{2}$$

$$a = \frac{b^2 - 2b}{2}$$

$$\frac{36-12}{2} = \frac{24}{2} = 12$$



$$ab = 2a + 2b$$

$$b = 2 + 2\frac{b}{a}$$

6 12

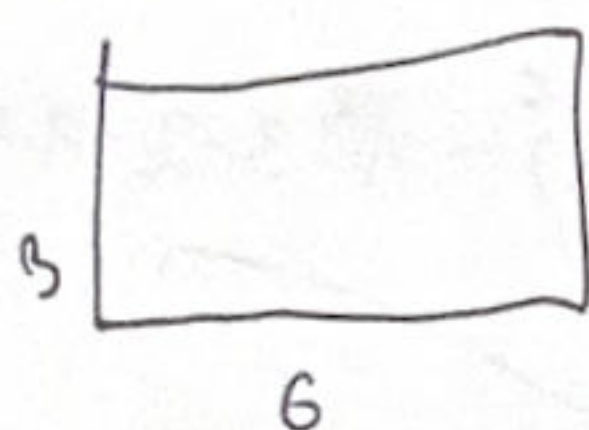
$$2 \cdot 2 = 2 \cdot 12$$

$$\frac{2b}{a} = b - 2$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b-2}{2}$$

8

8



$$a = \frac{2b}{b-2}$$

6

3

3, 6
4, 12

$$\frac{12}{4}$$

$$\frac{2b}{b-2} = 2 + \frac{4}{b-2}$$

$$\frac{2b}{b-2} = 2 + \frac{4}{b-2}$$

$$\frac{2b - 4}{b-2} = 4$$

28

14

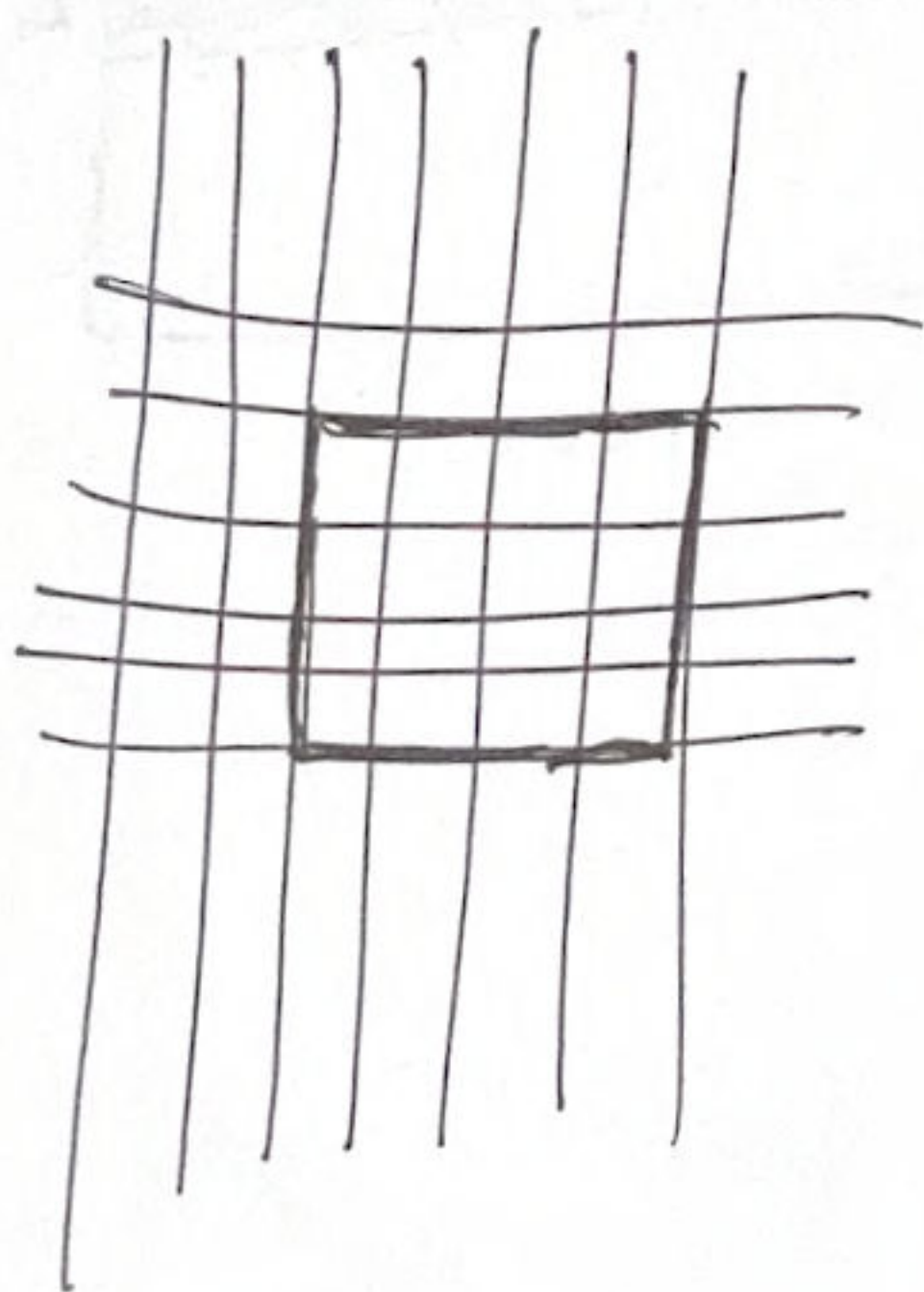
$$\frac{16}{6}$$

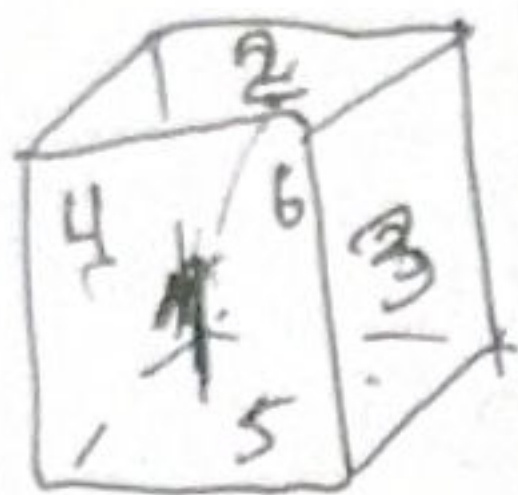
$$\frac{18}{7}$$

$$\frac{20}{8}$$

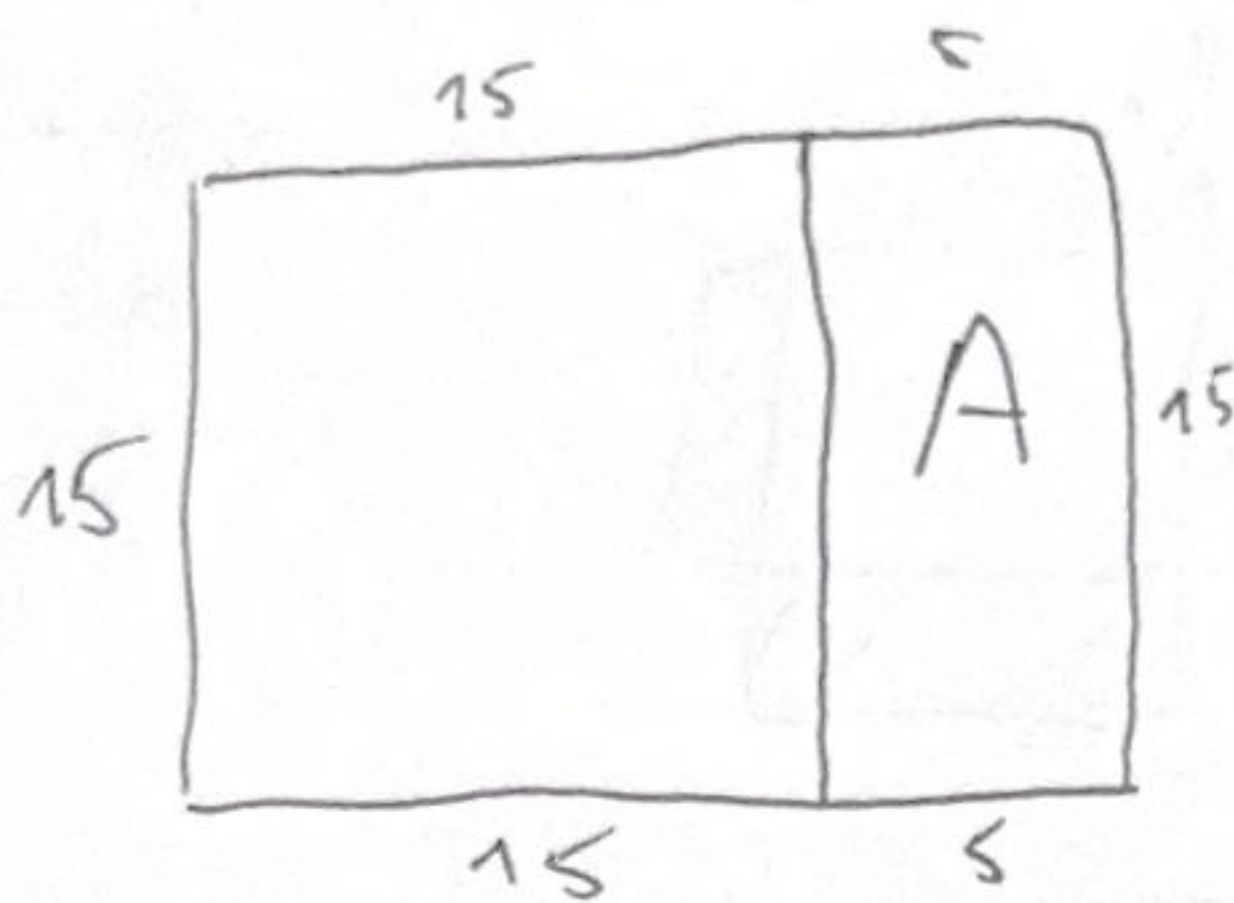
$$b = 3 \quad 4 \quad 6$$

2 +





4⁶



1 - 2345

2 - 1346

3 -

4 -

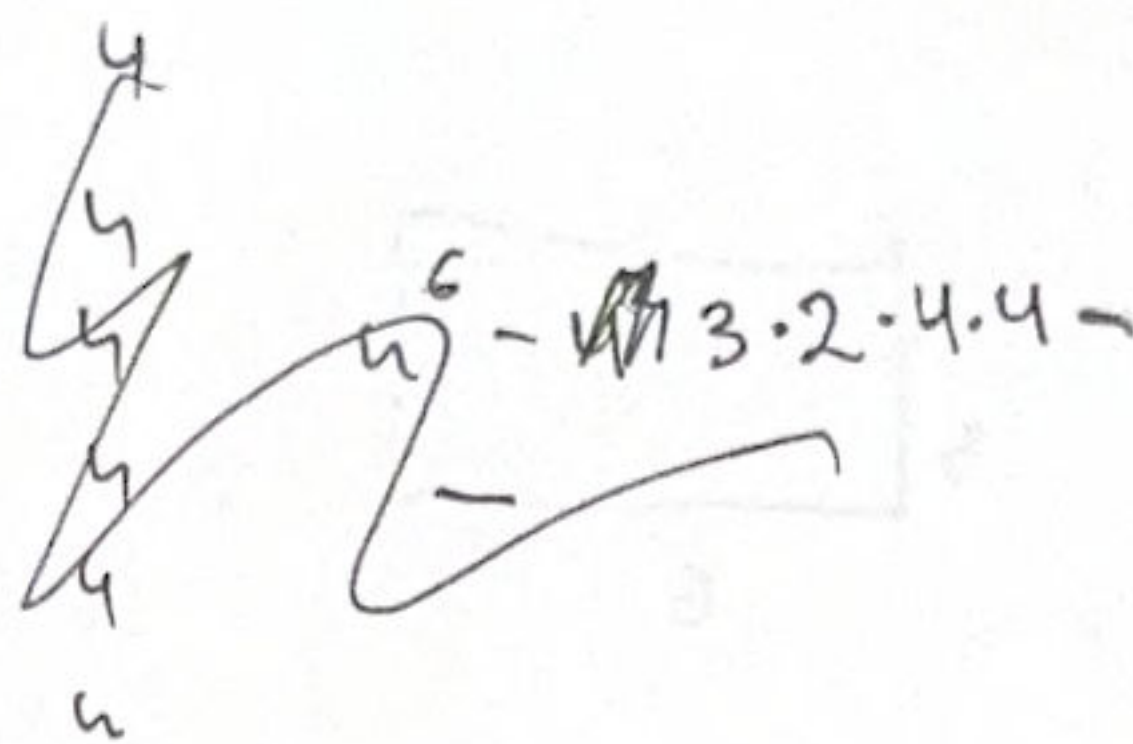
5 -

6 -

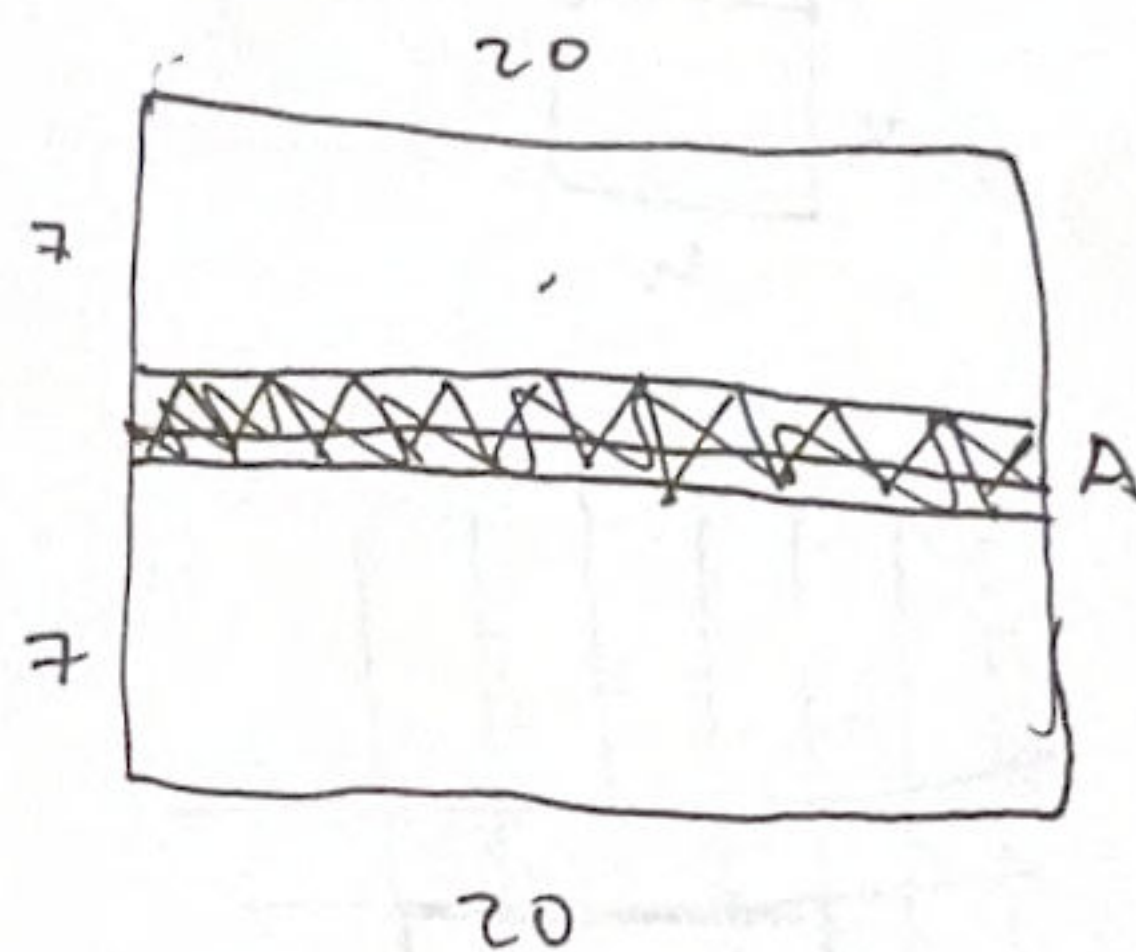
	1	2	3	4	5	6
1	///	///				///
2	///	///			///	
3			///	///	///	
4			///	///	///	
5		///			///	
6	///				///	///

$$3\text{cm}^2 \leq \leq 30\text{cm}^2$$

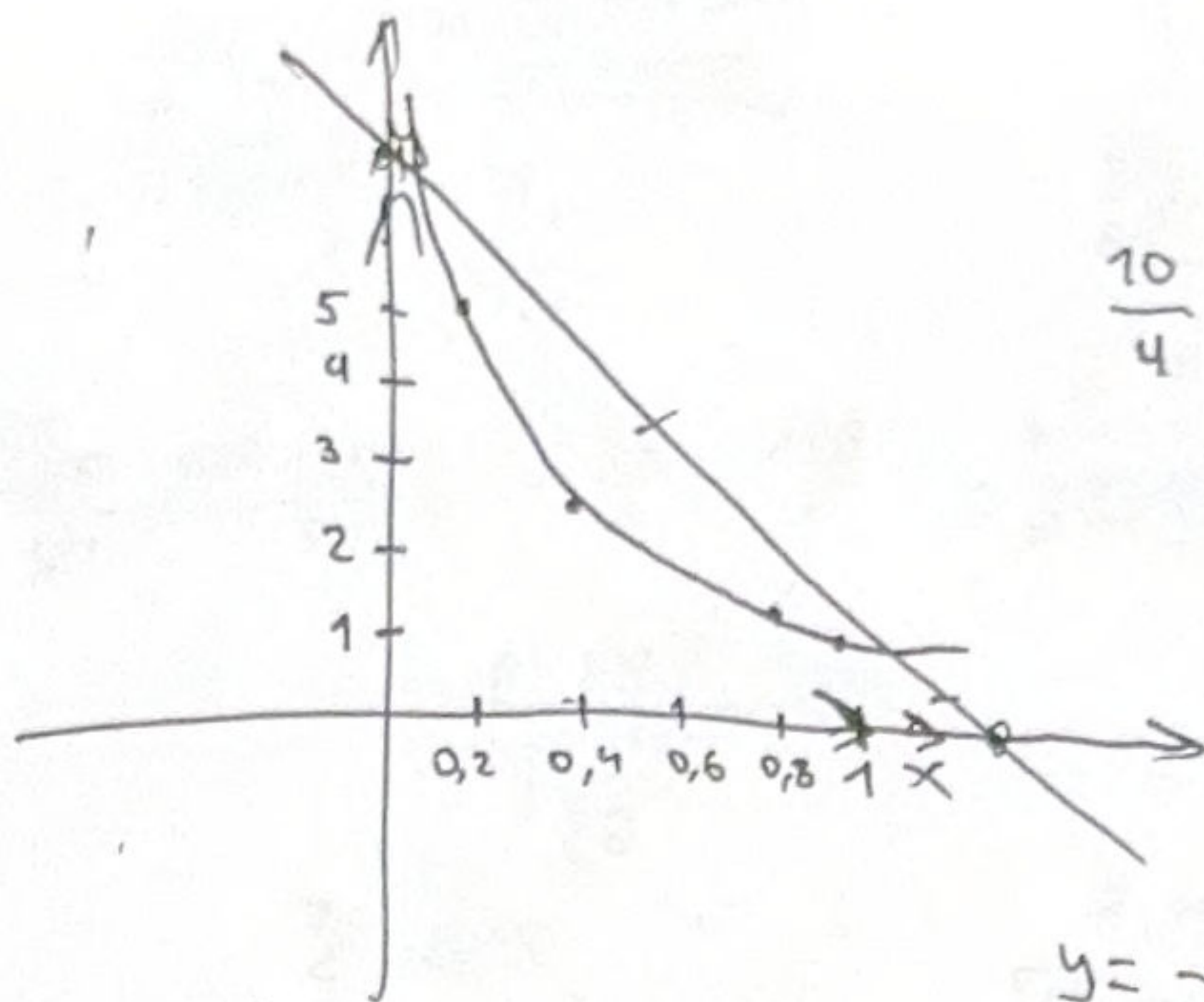
$$\frac{180}{8} = \frac{45}{2} \quad 20$$



am	1	2	3	4	5	6
1	///					
2		///				
3			///			
4			///	///		
5				///	///	
6					///	///



ЧЕРКОВИК



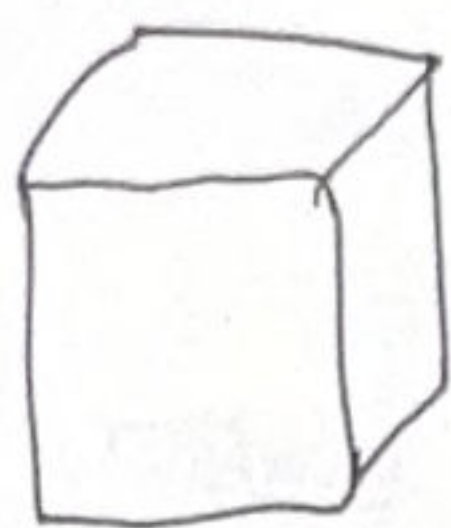
$$\frac{10}{4} = 2,5$$

$$\frac{10}{6} =$$

$$\frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25$$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y = -18x + a$$



$$\geq 10$$

100 задач

20 ученик. ≥ 10 задач

~~10 задач~~

100 задач

20 учеников - каждый ≥ 10 задач

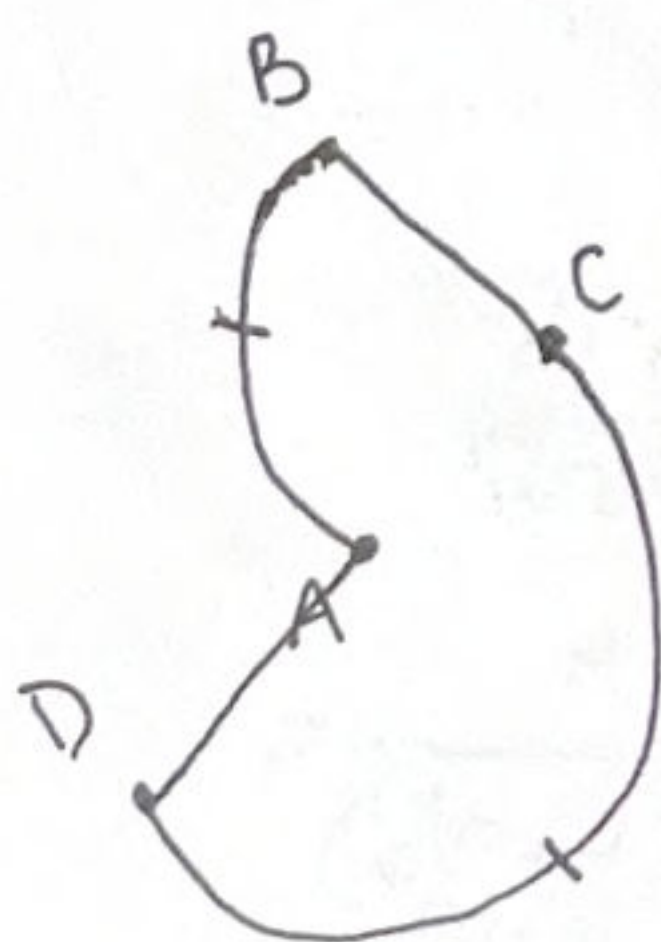
Есть задача, которую решило ≥ 10 человек

$$50 \quad 49$$

$$\begin{array}{r} \times 19 \\ 40 \\ \hline 760 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \cdot 19 \\ \times 19 \\ \hline 45 \\ 95 \\ \hline 905 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 49 \\ \times 19 \\ \hline 441 \\ 49 \\ \hline 931 \\ 855 \end{array} \quad \begin{array}{r} 981 \\ 900 \end{array}$$



ЧЕРНОВИК

$$\begin{array}{r} 4,5 \\ \times 4,5 \\ \hline 225 \\ + 180 \\ \hline 20,25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 567 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 7 \\ \hline 567 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 4 \\ \hline 1296 \end{array}$$

$$\frac{324}{7} \div 20 \frac{1}{4} = \frac{324}{7} - \frac{81}{4} = \frac{1296 - 567}{28} = \frac{729}{28}$$

729

$$\frac{729}{28}$$

2 3

$$\frac{6}{\sqrt{7}} > \frac{6\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{6}{7} \sqrt{7}$$

$$\frac{12}{7} < \frac{18}{7}$$

$$< 4,5$$

$$\begin{array}{r} 1,5 \\ 6\sqrt{3} \\ \times 0,5 \\ \hline 3\sqrt{3} \\ 4,5 \sqrt{\frac{3}{7}} \\ 13,5 \sqrt{\frac{3}{7}} \end{array}$$

$$4,5 \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\begin{array}{r} 4,5 \\ 18\sqrt{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4,5 \\ 10 \\ \hline \sqrt{\frac{3}{7}} \end{array}$$

$$243 = 3^5$$

$$\frac{9 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{7}} + \frac{9 \cdot \sqrt{21}}{14}$$

$$6,75 = 6 \frac{3}{4} = \frac{27}{4}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ 14 \sqrt{21} \\ \times 8 \\ \hline 36 \\ 72 \\ \hline 108 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{12}{7} < \frac{6}{\sqrt{7}} < \frac{18}{7} \\ \frac{36}{7} < \frac{18}{\sqrt{7}} < \frac{54}{7} \\ \frac{36}{14} < 4,5 \sqrt{\frac{3}{7}} < \frac{45}{14} \\ \frac{108}{14} < 13,5 \sqrt{\frac{3}{7}} < \frac{135}{14} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4,5 \\ \times 1,5 \\ \hline 225 \\ + 45 \\ \hline 6,75 \end{array}$$

$$\frac{9 \cdot \sqrt{21}}{2 \cdot 7} = \frac{9 \sqrt{21}}{14}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{18}{7} = \frac{21+18}{14} = \frac{39}{14}$$

$$\frac{9}{2} + \frac{54}{7}$$

$$\frac{9 \sqrt{3}(4-\sqrt{7})}{2 \cdot 7}$$

$$\frac{27}{135}$$

$$AO = \frac{4}{\sqrt{7}} \cdot OK$$

$$\frac{AO}{OK} = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow OK = \frac{\sqrt{7} \cdot AO}{4}$$

$$AO + OK = \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

$$AO \cdot \frac{4+\sqrt{7}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

$$\begin{aligned} AO &= \frac{9\sqrt{3} \cdot 4}{2\sqrt{7}(4+\sqrt{7})} = \\ &= \frac{36\sqrt{3}}{8\sqrt{7}+14} = \frac{18\sqrt{3}}{4\sqrt{7}+7} \end{aligned}$$

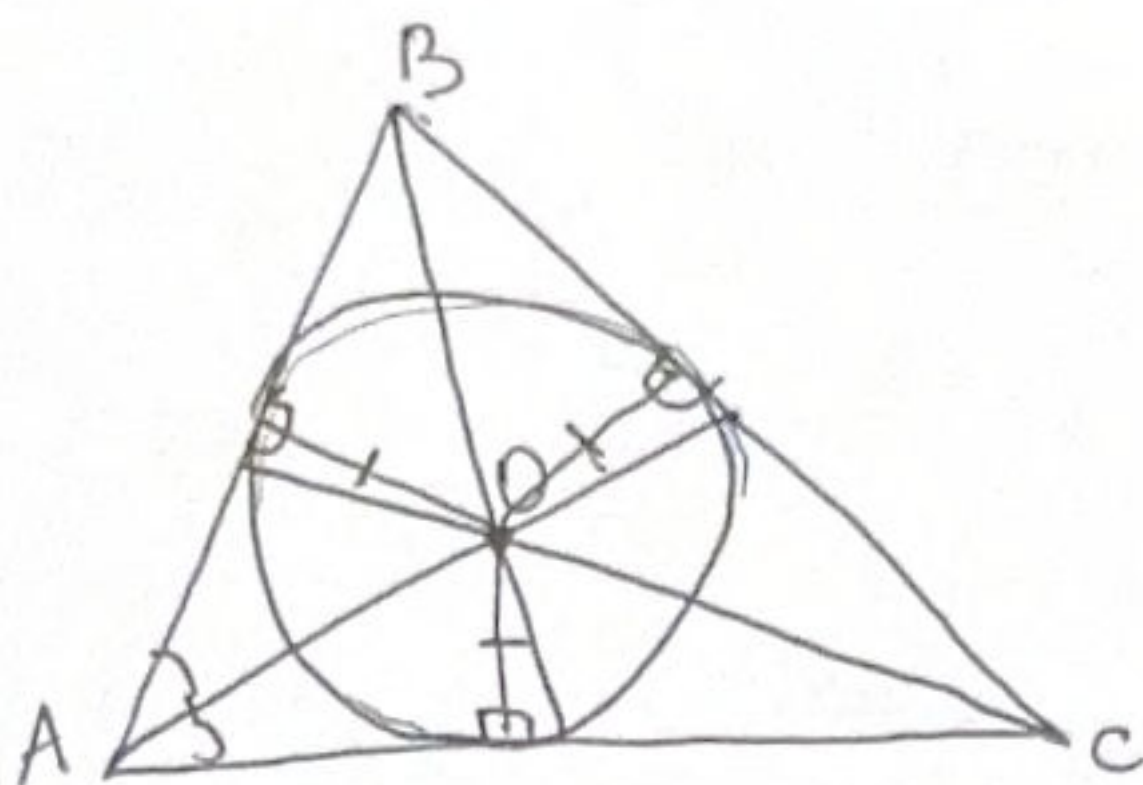
$$\left(\frac{4}{\sqrt{7}} + 1 \right) \cdot OK = \frac{9\sqrt{21}}{14}$$

$$\frac{4+\sqrt{7}}{\sqrt{7}} \cdot OK = \frac{9\sqrt{21}}{14}$$

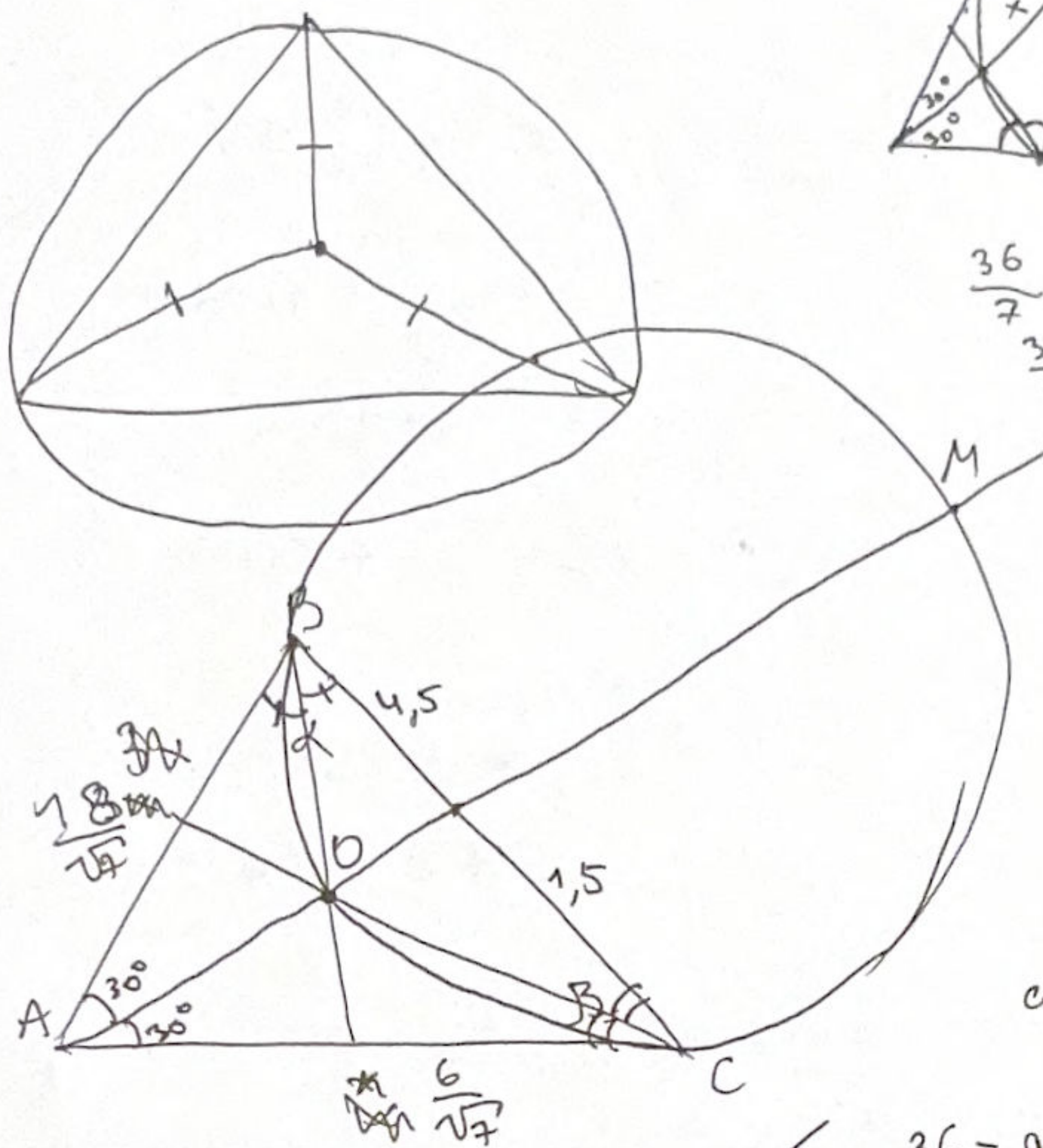
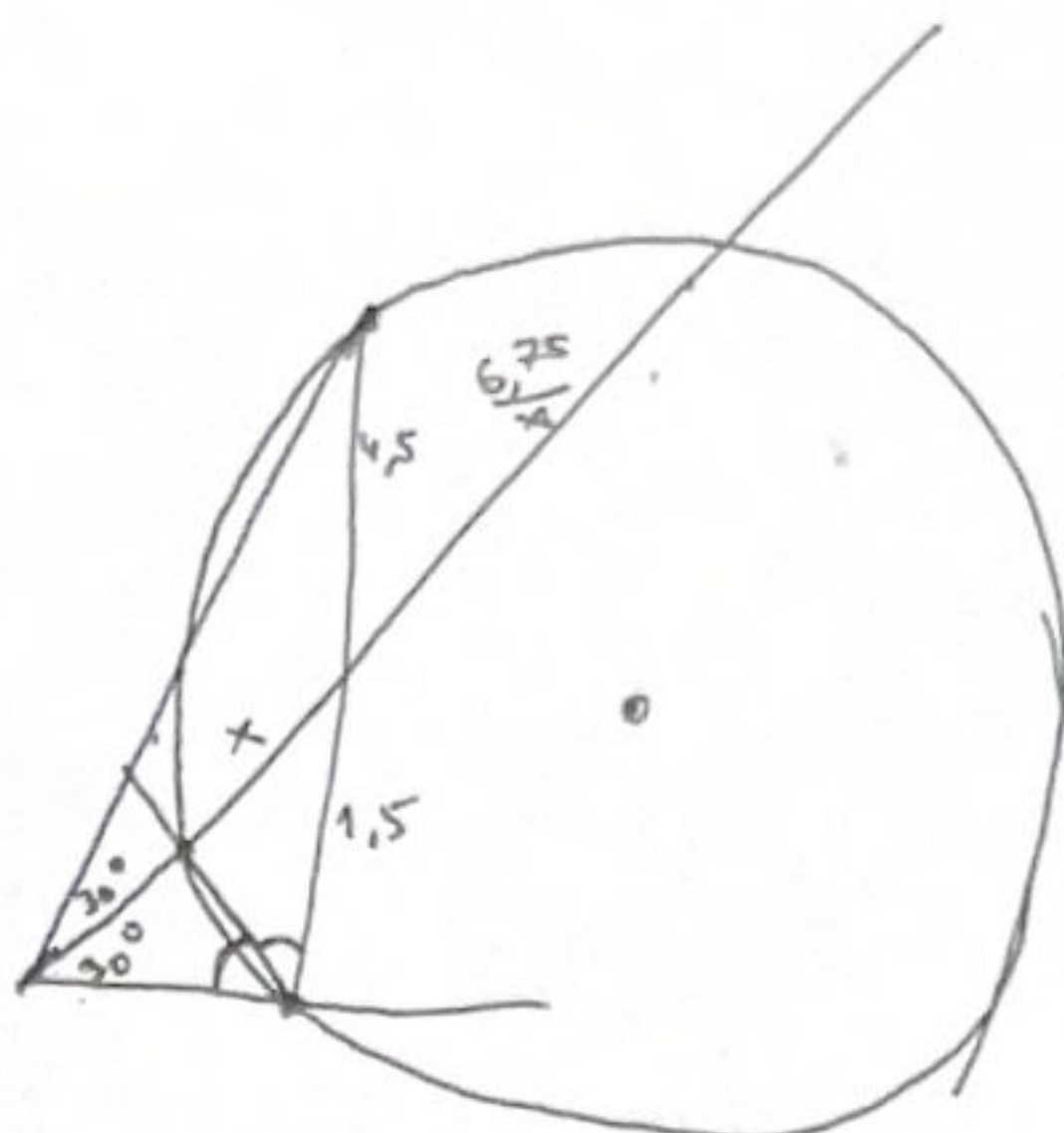
$$OK = \frac{9\sqrt{21} \cdot \sqrt{7}}{14(4+\sqrt{7})} =$$

$$= \frac{9\sqrt{3} \cdot 7}{2(4+\sqrt{7})}$$

ЦЕРКОВИК



$$\begin{array}{r} 1,5 \\ \times 4,5 \\ \hline 6,75 \end{array}$$



$$\frac{36}{7} = 36 + 324 - \frac{216}{\sqrt{7}} \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{36}{7} = 360 - \frac{216}{\sqrt{7}} \cdot \cos \alpha$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 6 \cdot 3 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\cos \alpha = \frac{(360 - \frac{36}{7}) \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{360\sqrt{7} - \frac{36}{\sqrt{7}}}{216}}{360 - \frac{36}{7} = \frac{10\sqrt{7} - \frac{1}{\sqrt{7}}}{6}}$$

$$36 = 9x^2 + x^2 - 6x^2 \cdot \cos 60^\circ \quad \frac{36 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$36 = 10x^2 - 3x^2$$

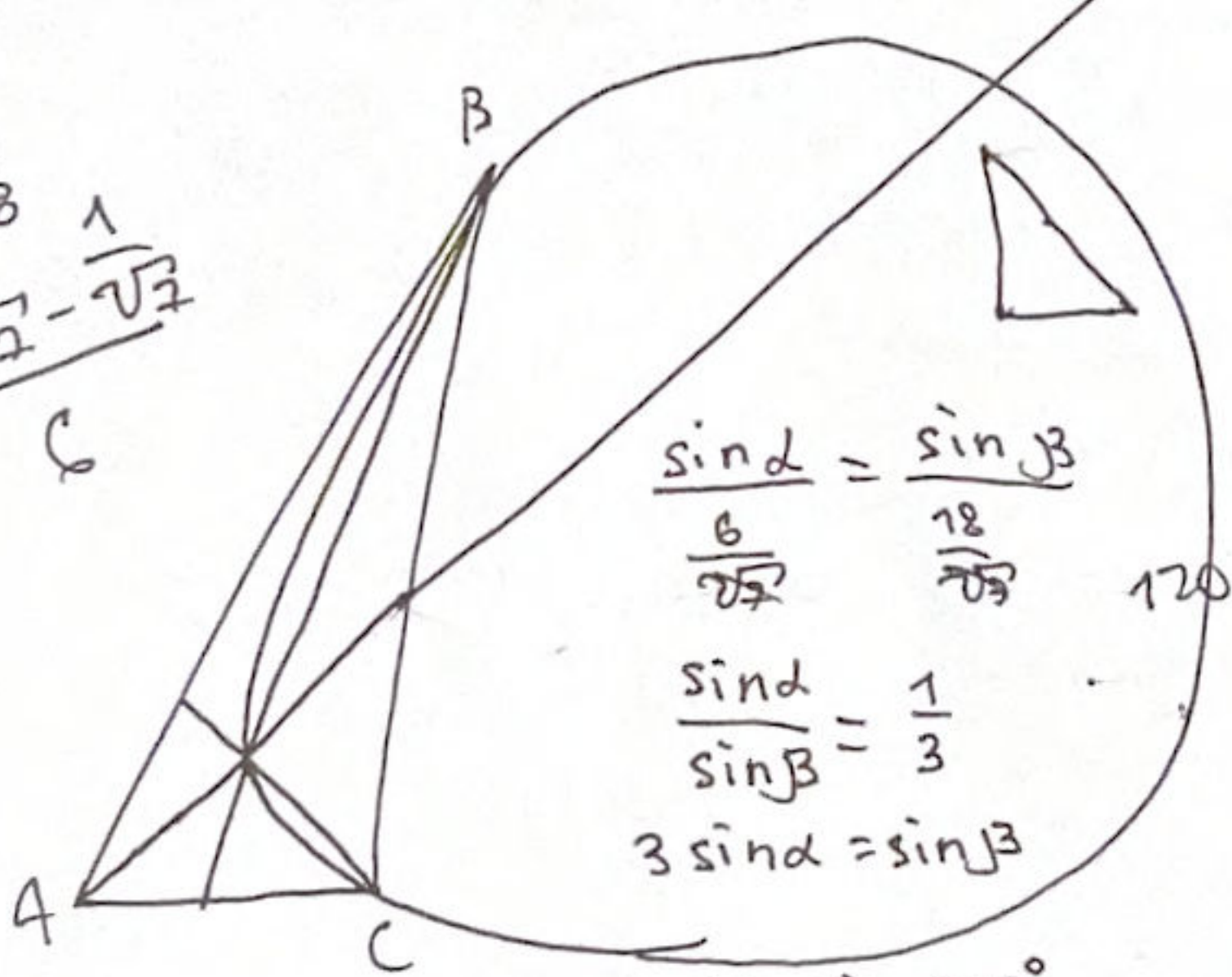
$$36 = 7x^2$$

$$x^2 = \frac{36}{7}$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{36}{7} - \frac{9}{4} = \frac{144 - 63}{28} = \frac{81}{28}$$

$$\frac{36}{7} + \frac{3}{108} = \frac{1}{10\sqrt{2} - \sqrt{2}}$$



$$\frac{\sin \alpha}{\frac{6}{\sqrt{7}}} = \frac{\sin \beta}{\frac{18}{\sqrt{3}}}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{3}$$

$$3 \sin \alpha = \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = 120^\circ$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$x^2 - x \cdot \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}} + \frac{81}{28} = 0$$

$$\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \pm \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{36 \cdot 3}{7} - \frac{4 \cdot 81}{28} = \frac{27}{7}$$

$$= \frac{108 - 81}{7} = \frac{27}{7}$$

$$\times 45$$

$$900$$

$$2,25 = x^2 + \frac{36}{7} - \frac{12}{\sqrt{7}} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2,25 = x^2 + \frac{36}{7} - \frac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{7}} \quad \frac{720}{160}$$

$$\frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

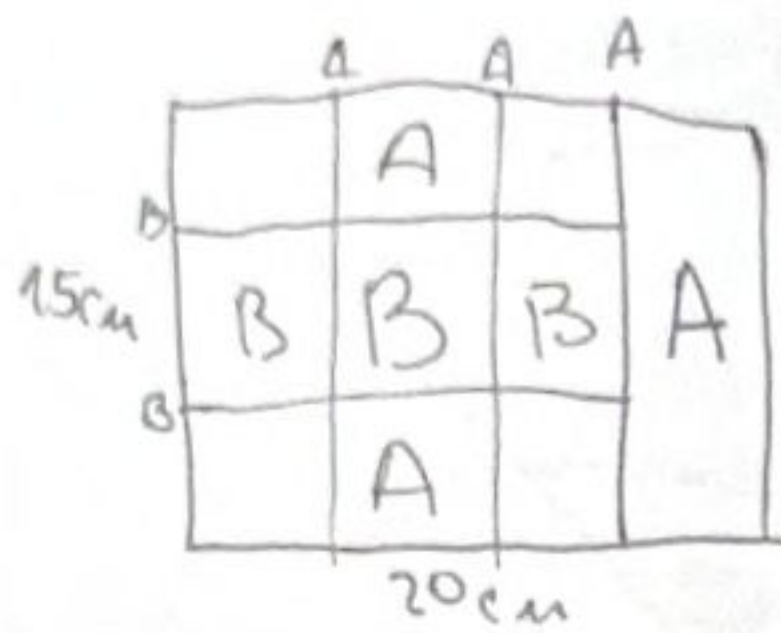
$$8a + 9b = 880$$

$$a = 100 - b$$

$$800 + b = 880$$

$$b = 80$$

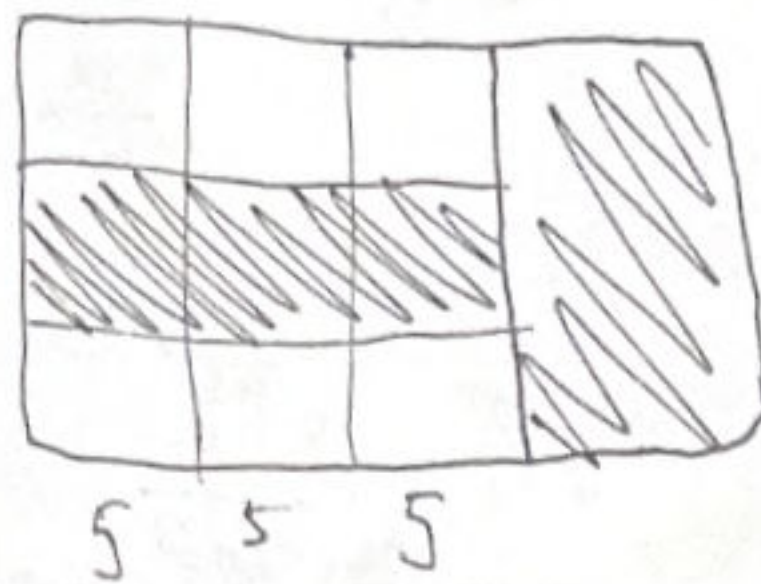
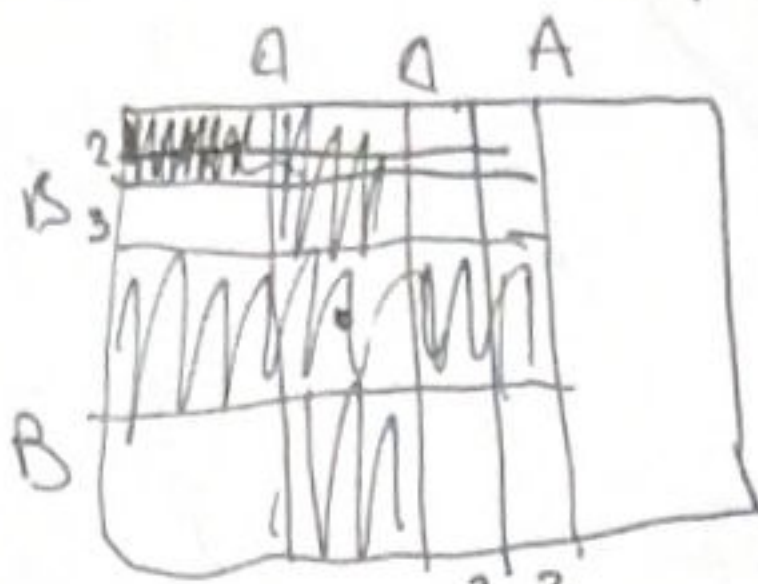
$$a = 20$$



$$300 \text{ см}^2$$

$$3 \text{ см}^2 \leq x \leq 30 \text{ см}^2$$

$$1,5 \quad 2$$



$$-425 + 25 + 65 + 11$$

$$125 + 25 - 65 + 11$$

$$-27 + 9 + 33 + 11$$

$$30$$

$$8 - 4 - 22 + 15$$

$$87$$

$$27$$

$$5 \cdot 15$$

$$27 - 9 - 33 + 15$$

$$105$$

$$27 + 9 - 39 + 11$$

$$x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13$$

$$x^3 - |(x-2)(x+1)| = 12x - 13 \quad \xrightarrow{-1 \quad 2}$$

$$\begin{cases} x^3 - x^2 + x + 2 = 12x - 13, & x \leq -1 \\ x^3 + x^2 - x - 2 = 12x - 13, & x \geq 2 \end{cases}$$

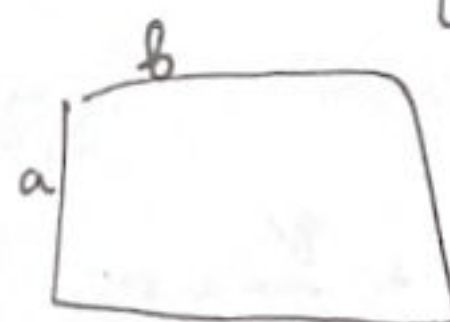
$$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$$

$$x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0$$

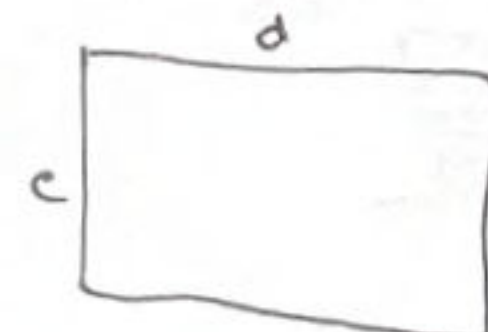
$$(x-3)(x^2 + 2x - 5) = 0 \quad \& \quad x+b=0$$

$$(x-1)(x^2 + 2x - 11) = 0$$

$$a2a + 2b = ab$$



$$ab = 2(a+b)$$



$$cd = 2(c+d)$$