0 032353 820004

03-23-53-82
(161.27)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Пиатов Дмитрий Николаевич
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход из аудитории 13:03 – 13:05

Дата

«13» 04 2025 года

Подпись участника

Горшков

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
03-23-53-8г		+	+	+	−	+	∓	−	−
								∅	∅

63 (шестьдесят пять)

03-23-53-82 (161.27)

N-1

$$\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}+\left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2=\sqrt{3+\sqrt{8}}-$$
$$-\sqrt{3-\sqrt{8}};$$

$$\begin{cases}|2x-3|+|x-3|+2-x=\sqrt{1+2\sqrt{2}+2}-\\ -\sqrt{1-2\sqrt{2}+2};\\ x\leq 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}|2x-3|+|x-3|+2-x=(1+\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1)\\ x\leq 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}|2x-3|-x+3+2-x=2\\ x\leq 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}|2x-3|=2x-3\\ x\leq 2\end{cases}\Rightarrow 2x-3\geq 0;\ x\geq 1{,}5$$

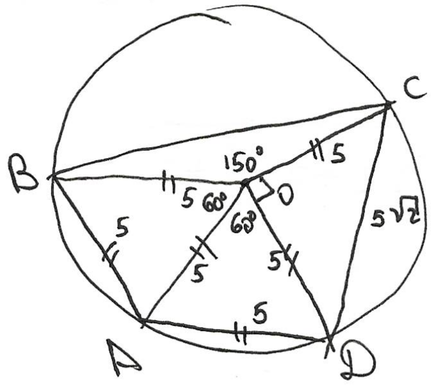
$\Rightarrow$ Ответ: $x\in[1{,}5;2]$

N-2

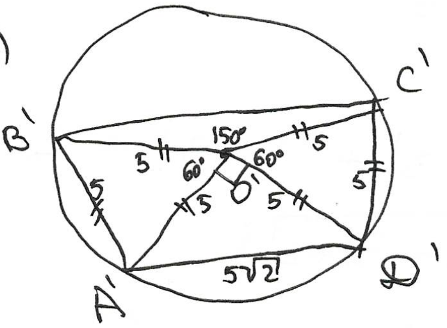
$4^{5-\frac{1}{x}}\geq a+\sin 2^x$; Заметим, что $a+\sin 2^x\in[a-1;a+1]$. Так как нужно, чтобы не было решений при $x>0$, то будем рассматривать только такие x. При $x\to+\infty$ $4^{5-\frac{1}{x}}\to 4^5=1024$ $\Rightarrow a\geq 1025$ точно подходит. Докажем, что меньше нельзя. Ну а это очевидно, т.к. если $a<1025$, то т.к. бесконечно много таких x, что $\sin 2^x=-1$ $\Rightarrow$ всегда найдется такой x, что $4^{5-\frac{1}{x}}>a+\sin 2^x$ (Просто рассматривая всё большие x, что $\sin 2^x=-1$ $a+\sin 2^x=const$, а $4^{5-\frac{1}{x}}\uparrow$ до 1024). Ответ: $a=1025$.

N-3 Чистовик

1)



2)



Есть 2 варианта 1) - стороны 5 и 5 соседние и 2) - противоположные, заметим ~~в~~, что в обоих случаях 2 равных р/с тр. со стороной 5 и один прямоуг. р/б тр. с катетом 5. $\Rightarrow \angle BOC$ в обоих случаях будет $= 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 150^\circ \Rightarrow \triangle B'O'C' = \triangle BOC$ (по 2 ст. и углу). (Уточнение: тр. со сторонами $5, 5, 5\sqrt{2}$ прямоуг. по т. Пифагора).

$\Rightarrow$ Площадь 4-ёхугольника равна во всех случаях

$\Rightarrow S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOD} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$; $S_{\triangle COD} = \frac{25}{2}$; $S_{BOC} = \frac{1}{2}\cdot 25 \cdot \sin 150^\circ = \frac{25}{4}$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{25\sqrt{3}}{2} + \frac{25}{2} + \frac{25}{4} = \frac{25(2\sqrt{3}+3)}{4}$$

Ответ: $\frac{25(2\sqrt{3}+3)}{4}$

N-4

$\sin(\pi x) = a$
$\sin(2\pi x) = b$
$\sin(4\pi x) = c$

$a^3 + b^3 - c^3 = (a+b-c)^3$;

$\Rightarrow a^3 + b^3 - c^3 = a^3 + b^3 - c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3ac^2 - 3a^2c + 3bc^2 - 3b^2c - 6abc$;

$$3a^2b + 3ab^2 + 3ac^2 - 3a^2c + 3bc^2 - 3b^2c - 6abc = 0$$

$\cancel{\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) \Rightarrow \sin(\pi x)\cdot\sin(2\pi x) =}$
$\cancel{= \frac{1}{2}\cdot(\cos(\pi x) - \cos(3\pi x))}$

$a^2b + ab^2 + ac^2 - a^2c + bc^2 - b^2c - 3abc = -abc$

$(ab - ac - bc)(a+b-c) = -abc$;

N-5 Чистовик

Т. к. для любого действительного x $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$ то функции совпадают. Кубический многочлен можно задать по 4-ем точкам => их вид совпадает:

$f_1(x) = x^3 + (a_1 + b_1)x^2 + (6 + a_1 b_1)x + 6a_1$

$f_2(x) = x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (8 + a_2 b_2)x + 8a_2$

$f_3(x) = x^3 + (a_3 + b_3)x^2 + (12 + a_3 b_3)x + 12a_3$

=> $6a_1 = 8a_2 = 12a_3$ => $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ (если не равны 0). По теореме виета для куб. многочлена

=> $-a_1 - a_2 - a_3 = -a_1 - b_1$ (для ~~первого~~ f_1)

($-a_1$; $-a_2$; $-a_3$ - корни, причём различные)

=> $b_1 = a_2 + a_3$. Аналогично $b_2 = a_1 + a_3$; $b_3 = a_1 + a_2$

=> $a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 = 3(a_1 + a_2 + a_3)$. Также по т. Виета => $-a_1 a_2 a_3 = -6a_1$ (для f_1)

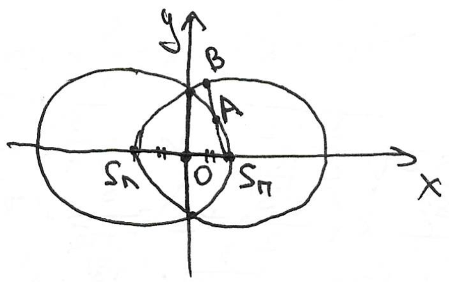
$a_2 a_3 = 6$; $a_1 a_3 = 8$; $a_1 a_2 = 12$; $(a_1 a_2 a_3)^2 = 2\cdot3\cdot2^3\cdot2^2\cdot3$

$a_1 a_2 a_3 = 8\cdot3 = 24$; => $a_1 = 4$; $a_2 = 3$; $a_3 = 2$;

=> ~~сумма~~ $3(a_1 + a_2 + a_3) = 3\cdot(4+3+2) = 27$

Ответ: 27.

N-6



Введём координатные оси. O - нора. O(0;0) Тогда т.к. рисунок симметричен относительно Oy и Ox, то будем рассматривать только I четверть, тогда пусть A - место где мышь на своём пути пересекает левую окружность. Очевидно, что тогда минимальное расстояние будет ломаная ~~OA~~ состоящая из отрезков OA и AB, где AB - минимальное расстояние до ~~ок~~ правой окружности, то есть отрезок лежащий ~~на~~ на $AS_п$. $k=\frac{3}{2+\sqrt{2}}$; Тогда пусть $A(x_1;y_1)$. Тогда т.к. A лежит на левой окр

$\Rightarrow (x_1+\frac{k}{2})^2+y_1^2=k^2$; ~~Расст~~ $AO=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

для $S_п A \Rightarrow \begin{cases} \frac{k}{2}\cdot a+b=0; \\ x_1 a+b=y_1; \end{cases} \Rightarrow a(x_1-\frac{k}{2})=y_1$

$a=\frac{y_1}{x_1-\frac{k}{2}}$;

$b=-\frac{k}{2}\cdot\frac{y_1}{x_1-\frac{k}{2}} \Rightarrow y=\frac{y_1}{x_1-\frac{k}{2}}x-\frac{ky_1}{2x_1-k}$

$\Rightarrow$ координаты B $\Rightarrow \frac{y_1}{x_1-\frac{k}{2}}x-\frac{ky_1}{2x_1-k}=\sqrt{k^2-(x-\frac{k}{2})^2}$

Тогда минимальное значение это $2\cdot AO+$

$+k-AS_п=2\sqrt{x_1^2+y_1^2}+k-\sqrt{(\frac{k}{2}-x_1)^2+y_1^2}$

$\Rightarrow$ нам нужен его минимум

$x_1^2+2x_1\cdot\frac{k}{2}+y_1^2=k^2$; $x_1^2+y_1^2=k^2-x_1k$;

$\Rightarrow 2\sqrt{k^2-x_1k}+k-\sqrt{\frac{k^2}{4}-x_1k+k^2-x_1k}=G(x)$

$G'(x)=2\cdot\left(-k\cdot\frac{1}{\sqrt{k^2-x_1k}}\right)-\left(-2k\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}k^2-2x_1k}}\right)=0;$

$2k\left(\frac{1}{\sqrt{k^2-x_1k}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}k^2-2x_1k}}\right)=0; \Rightarrow k^2-x_1k=\frac{5}{4}k^2-2x_1k$

$x_1k=\frac{1}{4}k^2$; $x=\frac{k}{4}$; $\Rightarrow G(x)=2\sqrt{\frac{3}{4}k^2}+k-\sqrt{\frac{5}{4}k^2-\frac{k^2}{2}}=$

$=k\sqrt{3}+k-\frac{1}{2}k\sqrt{3}=$ ~~$\frac{3\sqrt{3}}{2}$~~ $k(\frac{\sqrt{3}}{2}+1)=\frac{3}{2+\sqrt{2}}\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}+1)$

Ответ: $\frac{3}{2+\sqrt{2}}\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}+1)$

$a^2b + ab^2 + ac^2 - a^2c + bc^2 - b^2c - \frac{abc}{2}$ – Черновик

$a(ab - ac - bc)$

$x^3 + b_1x^2 + 6x + a_1x^2 + a_1b_1x + 6a_1$

$x^3 + x^2(b_1 + a_1) + (6 + a_1b_1)x + 6a_1$

$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 = \cancel{a_1 + a_2 + a_3}$

$\cancel{a_1 + b_1} = -(a_1 + a_2 + a_3) = -b_1 - a_1$

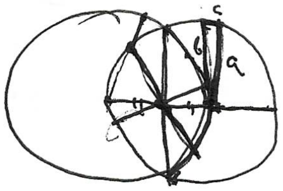
$a_2 + a_3 = b_1$

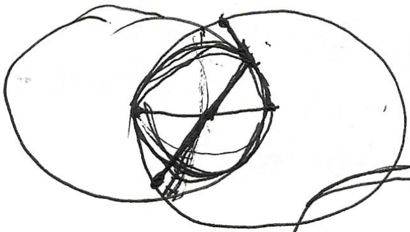
$a_1 + a_2 = b_3$

$a_1 + a_3 = b_2$

$3(a_1 + a_2 + a_3)$

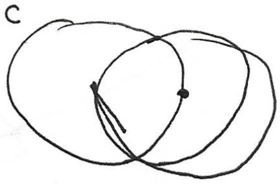
$a_1a_2a_3$

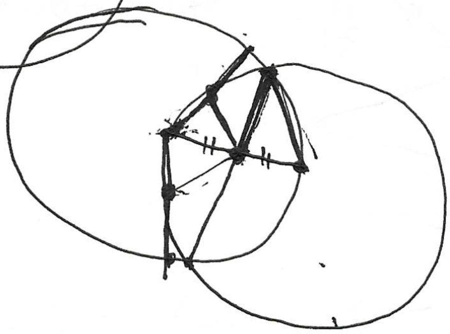




$a \le b + c$

$a - b \le c$





$\sin\alpha \cdot \sin\beta$

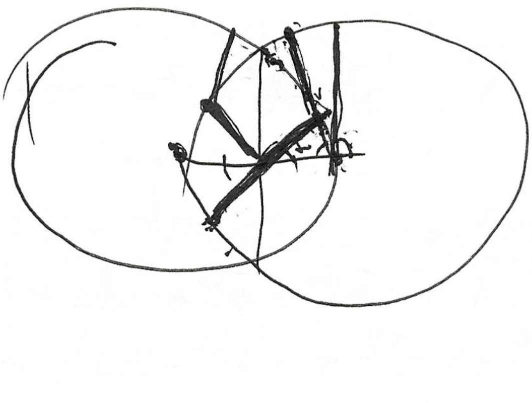
$\overset{\cos}{\sin}(\alpha + \beta) + \overset{\cos}{\sin}(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha$

$\frac{3(2 - \sqrt{2})}{2}$

$\sin(\pi x) \cdot \sin(2\pi x) = \cancel{\sin}$

$\cos\cos + \sin\sin$

$2\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$



$\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{\left(\frac{k}{2} - x_1\right)^2 + y_1^2}$

Черновик

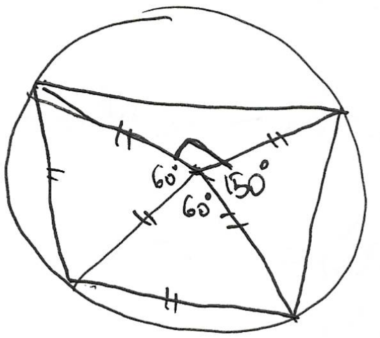
№ 2

$1024 \geq a + \sin 2^x$

$a = 1025; \quad \sin\alpha \in [-1;1]$

№ 3

$(ab - bc - ac)$



$\frac{25}{4} + \frac{25}{2} + 2\cdot\frac{25\sqrt{3}}{4}$

1) $\frac{25}{4} + \frac{25}{2}$

$\frac{a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

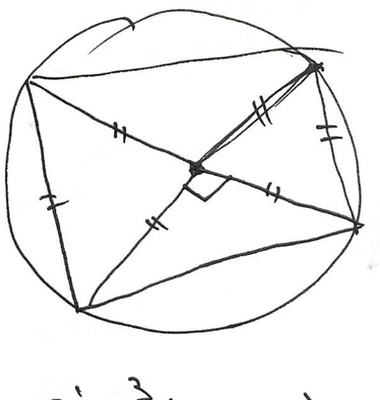
$(ab \mp bc \mp ac)(a+b\mp c) =$

$= a^2b + abc + a^2c + ab^2 + abc + b^2c$

$+ abc + bc^2 + ac^2 =$

$=$

2)



$\sin^3(\pi x) + \sin^3(2\pi x) - \sin^3(4\pi x) =$

$=$

$(\sin(\pi x) + \sin(2\pi x))(\sin^2(\pi x) - \sin(\pi x)\sin(2\pi x) + \sin^2(2\pi x))$

$a^3 + b^3 - c^3 = (a+b-c)^3; \quad (a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc)$

$(a+b-c) =$

$= a^3 + b^2a + c^2a + 2a^2b - 2a^2c - 2abc + a^2b + b^3 + bc^2 +$

$+ 2ab^2 - 2abc - 2b^2c - a^2c - b^2c - c^3 - 2abc + 2ac^2 + 2bc^2 =$

$= a^3 + b^3 - c^3 + 3ab^2 + 3a^2b + 3ac^2 - 3a^2c + 3bc^2 - 3b^2c - 6abc$