21-06-63-43
(061.18)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант

Место проведения Екатеринбург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Пономарева Никиты Евгеньевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата «13» апреля 2025 года

Подпись участника ПНЕ

21-06-63-43 (162.15)

9 класс

№4

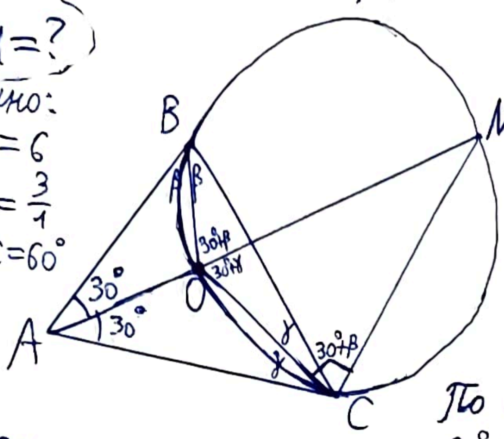
$OM = ?$

Дано:

$BC = 6$

$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{1}$

$\angle BAC = 60^\circ$



Пусть $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$.

Биссектрисы $\triangle ABC$ делят угол 60° на 2 угла по 30°, угол 2β на 2 угла по β, угол γ на 2 угла по γ.

По сумме углов треугольника $60^\circ + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ \Rightarrow \beta + \gamma = 60^\circ$.

$\angle BOM = 30^\circ + \beta$, $\angle COM = 30^\circ + \gamma$ как внешние углы.

$\angle BCM = \angle BOM = 30^\circ + \beta$ по вписанности.

$\angle BOC = \angle BOM + \angle COM = 30^\circ + \beta + 30^\circ + \gamma = 120^\circ$, т.к. $\beta + \gamma = 60^\circ$.

Обозначим радиус опис. окружности $\triangle OBC$ за R.

Тогда по т. синусов $\frac{BC}{\sin\angle BOC} = 2R$.

Следовательно, $R = \frac{BC}{2\sin\angle BOC} = \frac{6}{2\sin 120^\circ} = \frac{6}{\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

$\angle OCM = \angle OCB + \angle BCM = \gamma + 30^\circ + \beta = 90^\circ$, т.к. $\beta + \gamma = 60^\circ$.

Напротив OM лежит вписанный прямой угол OCM, поэтому OM – это диаметр. Диаметр равен двум радиусам, а радиус мы нашли.

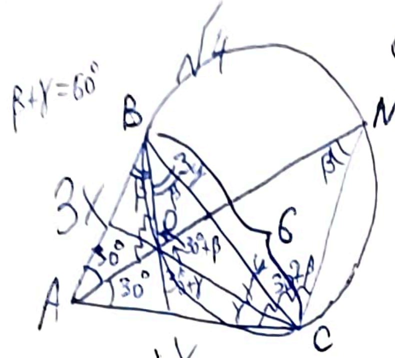
$OM = 2R = 2\cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

ЧИСТОВИК

80 (восемьдесят)

$OM = ?$



$(x+1-2\sqrt{3})(x+1+2\sqrt{3}) =$

$= (x+1)^2-(2\sqrt{3})^2 = x^2+2x+1-12$ ✓

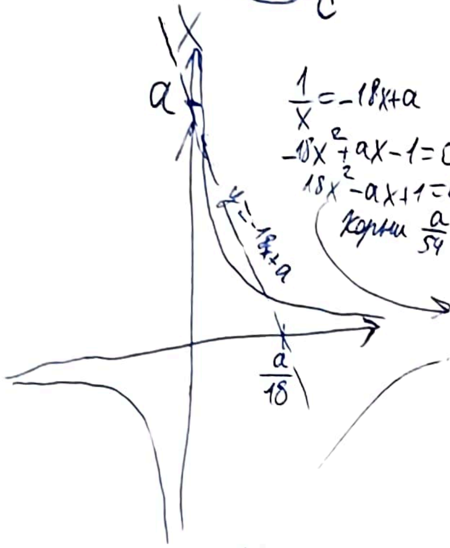
$-1+2\sqrt{3} \vee 2$

$2\sqrt{3} \vee 3$ | 12

$12 > 9$

$(x+1-\sqrt{6})(x+1+\sqrt{6}) =$

$= (x+1)^2-6 = x^2+2x-5$



$\frac{1}{x} = -18x+a$

$-18x^2+ax-1=0$

$18x^2-ax+1=0$

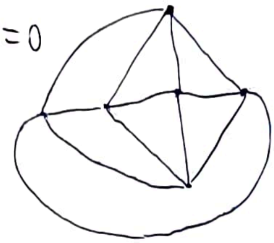
корни $\frac{a}{54}$ и $\frac{2a}{54}$

$(54x-a)(27x-a)=0$

$D = a^2-72$

$\frac{2a}{\cancel{54}\,\cancel{6}\,3} = \frac{a+\sqrt{a^2-72}}{\cancel{36}\,4}$

$\frac{a}{\cancel{54}\,\cancel{6}\,3} = \frac{a-\sqrt{a^2-72}}{\cancel{36}\,\cancel{4}\,2}$

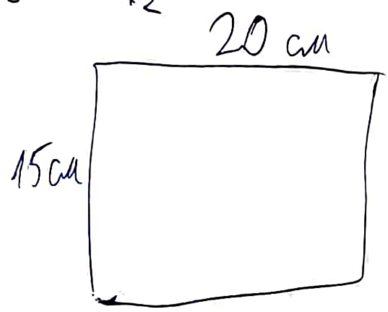


✓

$4a-3a = 3\sqrt{a^2-72}$

$a^2 = 9a^2-9\cdot72$

$8a^2 = 9\cdot8\cdot9$



min 20n+1 зад

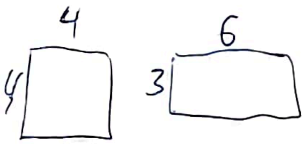
$ab = 2a+2b$

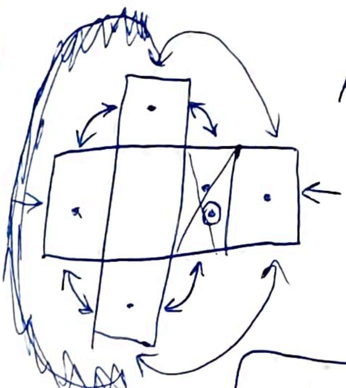
$a = \frac{2b}{b-2} = 2+\frac{4}{b-2}$

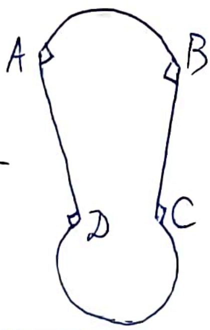
$4 \vdots (b-2)$

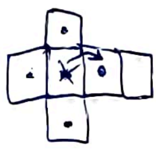
900

$b=6 \Rightarrow a=3$
$b=4 \Rightarrow a=4$
$b=3 \Rightarrow a=6$
~~$b=1$~~
~~$b=0$~~
~~$b=-2$~~









4

Черновик

№2

2

$$x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13.$$

Рассмотрим 2 случая:

1) $x^2 - x - 2 < 0$

$(x+1)(x-2) < 0$

$x \in (-1; 2)$

В этом случае модуль раскрыв. с минусом:

$x^3 + x^2 - x - 2 = 12x - 13.$

$x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0$

Подберем корень $x = 1$, поделим на $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 - 13x + 11 & x-1 \\ \cline{2-2} -\ x^3 - x^2 \quad\quad\quad\quad & x^2 + 2x - 11 \\ \hline 2x^2 - 13x \quad\quad & \\ -\ 2x^2 - 2x \quad\quad & \\ \hline -11x + 11 & \\ -\ -11x + 11 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$D = 4 + 44 = 48$

$x_2 = \frac{-2+\sqrt{48}}{2} = -1 + 2\sqrt{3}.$

$x_3 = -1 - 2\sqrt{3}.$

В итоге уравнение разложилось след. образом:

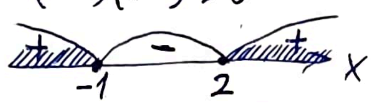
$(x-1)(x+1-2\sqrt{3})(x+1+2\sqrt{3}) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \cancel{x = -1 + 2\sqrt{3}} \\ \cancel{x = -1 - 2\sqrt{3}} \end{array}\right.$ ← не попадают в рассм. промежуток, т.к. $-1 + 2\sqrt{3} > 2$, а $-1 - 2\sqrt{3} < -1$.

Остается только $x = 1$.

2) $x^2 - x - 2 \geq 0$

$(x+1)(x-2) \geq 0$



$x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

В этом случае модуль раскрыв. с плюсом:

$x^3 - x^2 + x + 2 = 12x - 13.$

$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$

Подберем корень $x = +3$, поделим на $x - 3$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 11x + 15 & x-3 \\ \cline{2-2} -\ x^3 - 3x^2 \quad\quad\quad\quad & x^2 + 2x - 5 \\ \hline 2x^2 - 11x \quad\quad & \\ -\ 2x^2 - 6x \quad\quad & \\ \hline -5x + 15 & \\ -\ -5x + 15 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$D = 4 + 20 = 24$

$x_2 = \frac{-2+\sqrt{24}}{2} = -1 + \sqrt{6}$

$x_3 = -1 - \sqrt{6}$

В итоге уравнение разложилось след. образом:

$(x-3)(x+1-\sqrt{6})(x+1+\sqrt{6}) = 0$

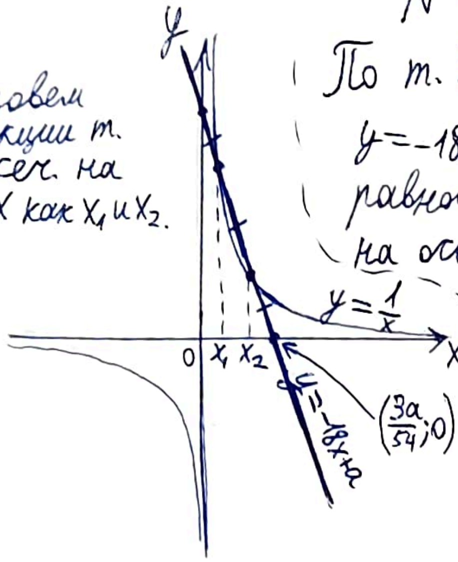
$\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ \cancel{x = -1 + \sqrt{6}} \\ x = -1 - \sqrt{6} \end{array}\right.$ ← не попадает в рассм. промежуток, т.к. $-1 < -1 + \sqrt{6} < 2$.

Остаются $x = 3$ и $x = -1 - \sqrt{6}$.

ЧИСТОВИК

Ответ: $1;\ 3;\ -1-\sqrt{6}$.

№5



Назовем проекции т. пересеч. на ось X как X_1 и X_2.

По т. Фалеса отсечение на прямой $y=-18x+a$ 3-х равных отрезков равносильно тому, что в проекции на ось X также отсекутся равные отрезки. Сейчас будем рассматривать случай, когда прямая пересекается с гиперболой в 1-й четверти.

Найдем абсциссу т. пересеч. прямой с осью X, для этого приравняем y к нулю: $0=-18x+a \Rightarrow x=\frac{a}{18}=\frac{3a}{54}$.

Для того, чтобы отрезки проекций были равны, должно выполняться $X_1=\frac{a}{54}$, $X_2=\frac{2a}{54}$.

Эти числа должны быть корнями системы $\begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ y=-18x+a. \end{cases}$

Решим её, для начала приравняв правые части:

$\frac{1}{x}=-18x+a \;\Big|\cdot x$

$18x^2-ax+1=0$ должно иметь корни X_1 и X_2.

По т. Виета $X_1X_2=\frac{1}{18} \Rightarrow \frac{a}{54}\cdot\frac{2a}{54}=\frac{1}{18} \;\Big|\cdot\frac{54\cdot54}{2}$

$a^2=\frac{54\cdot54}{2\cdot18}=\frac{27\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{9}^{3}}{\cancel{2}\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{3}}=27\cdot3=81$

$a^2=81 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=9 \text{ — случай в 1-й четв.} \\ a=-9 \text{ — случай в 3-й четв.} \end{array}\right.$

Если бы мы делали рисунок, когда прямая пересекается с гиперболой не в 1-й, а в 3-й четверти, было бы то же самое. В силу симметрии можно минего не рассматривать.

Ответ: 9; −9.

Чистовик

№3

Для начала найдем все прямоугольники с нат. сторонами, у которых $P=S$.

Пусть стороны — ~~это~~ числа a и b.

Тогда $S=ab$, $P=2a+2b$.

$S=P \Rightarrow ab=2a+2b$. $\quad b=\frac{2a}{a-2}$.

Так как $b\in\mathbb{N}$, дробь „целая" и $2a \,\vdots\, (a-2)$.

Пока не очень содержательно, но мы можем выделить в дроби целую часть: $\frac{2a}{a-2}=\frac{2a-4+4}{a-2}=\overbrace{2+\frac{4}{a-2}}^{b}$.

Теперь уже число $\frac{4}{a-2}$ должно быть целым и $4 \,\vdots\, (a-2)$.

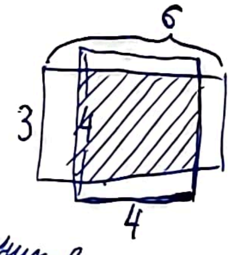
$4 \,\vdots\, (a-2)$ только при $a\in\{-2;0;1;3;4;6\}$.

a, равные -2 и 0, не натуральные, а при $a=1$ $b=-2$.

Остаются пары $\begin{cases}a=3\\b=6\end{cases}$, $\begin{cases}a=4\\b=4\end{cases}$ и $\begin{cases}a=6\\b=3\end{cases}$.

Возможные прямоугольники — это 6×3 и 4×4.

Расположим их по правилам:



площадь, закрытая ровно одним слоем бумаги, равна разности суммы площадей прямоугольников и площади их пересечения, умноженной на 2.

$S_{\text{одним слоем}}=3\cdot6+4\cdot4-2S_{\text{пересеч}}$

Для того, чтобы накрытая столешница одним слоем была минимальной площади, площадь пересечения должна быть как можно больше.

Максимум — это 12, когда прямоуг. пересечения 4×3, поскольку из-за нахожд. внутри квадрата обе стороны ≤4, а из-за нахожд. внутри прямоугольника одна сторона ≤3.

$S_{\text{одним слоем}} \overset{\shortparallel}{=}$

$=3\cdot6+4\cdot4-2\cdot3\cdot4=10$

Ответ: 10.

ЧИСТОВИК

№7

Если каждый из 20-ти учащихся решил не менее n задач, а Петя – больше чем Вася (то есть, хотя-бы $n+1$), то всего было решено хотя-бы $20n+1$ задач.

Спрашивается про то, чтобы нашлась задача, которую решила хотя-бы половина класса, то есть хотя-бы 10 человек.

Пусть это не так, и каждую задачу решило не более 9 человек. Тогда всего было решено не более $9 \cdot 100 = 900$ задач. Если более 900, то по принципу Дирихле хотя-бы одну решило бы более 9.

Итак, нам нужно, чтобы решений было хотя-бы 901, но мы уже знаем, что решений хотя-бы $20n+1$.

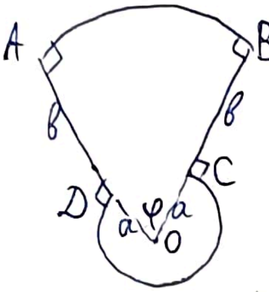
$$20n+1 \geqslant 901$$
$$20n \geqslant 900$$
$$n \geqslant 45. \qquad \min n = 45.$$

Действительно, если каждый решил хотя-бы 45, а Петя хотя-бы 46, то всего было хотя-бы 901 решение.

Ответ: 45.

Чистовик

№8



$\breve{AB} = BC =$
$= \breve{DC} = AD$
$\varphi = ?$

Пусть прямые AD и BC пересек. в т. O, а угол между ними φ.

Так как для окружности с дугой AB AO и BO перпендикулярны касательным, то AO и BO — это радиусы. То есть, точка O — это центр окружности, содержащей $\breve{AB}$.

Аналогично O — центр окр-сти, содержащей $\breve{DC}$, а DO и CO — равные радиусы. Обозначим их за a, а равные по условию звенья AD и BC за b.

Радианная мера дуги AB — это радиус · угол, в данном случае $(a+b)\cdot\varphi$.

У большей дуги $\breve{DC}$ — это $(2\pi-\varphi)\cdot a$.

По условию $b = (a+b)\varphi = a(2\pi-\varphi)$

Раскроем скобки и превратим в систему:

$$\begin{cases} b = \varphi a + \varphi b & \text{— (1)} \\ a\varphi + b\varphi = 2\pi a - a\varphi \Rightarrow 2\pi a = 2\varphi a + \varphi b & \text{— (2)} \end{cases}$$

Вычтем из 2-го 1-е: $\boxed{2\pi a - b = \varphi a}$ — (3)

Вычтем из удвоенного 1-го 2-е: $\boxed{2b - 2\pi a = \varphi b}$ — (4)

Сложим (3) и (4): $b = \varphi a + \varphi b \quad |:b \Rightarrow \varphi\left(1+\frac{a}{b}\right) = 1$

$\frac{a}{b}\varphi + \varphi = 1$

$\frac{a}{b} = \frac{1-\varphi}{\varphi}$

Поделим (4) на b:

$2 - 2\pi\frac{a}{b} = \varphi$

Подставим $\frac{a}{b}$

$2 - 2\pi\cdot\frac{1-\varphi}{\varphi} = \varphi \quad |\cdot\varphi$

$\varphi^2 - 2\varphi + 2\pi - 2\pi\varphi = 0$

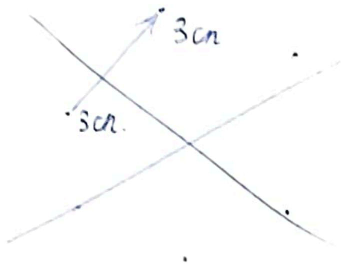
$\varphi^2 - (2+2\pi)\varphi + 2\pi = 0$

$D = 4 + 4\pi^2 - 8\pi - 8\pi$

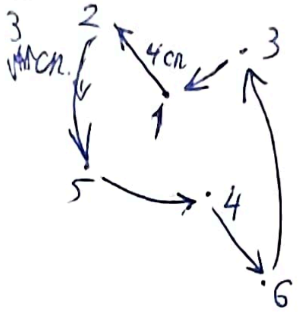
$\sqrt{D} = 2\sqrt{\pi^2 - 4\pi + 1}$

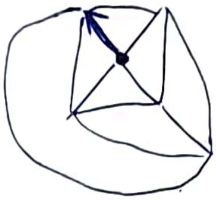
$\varphi = \frac{2+2\pi \pm 2\sqrt{\pi^2-4\pi+1}}{2}$

Чистовик

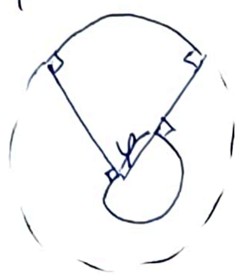


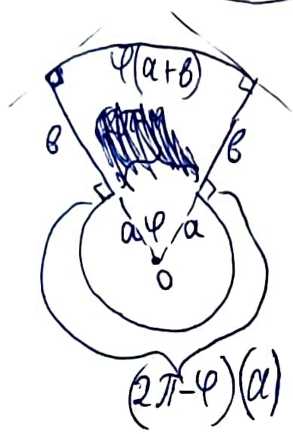
Не мен. местами





Угол φ





$b = \varphi(a+b) = (2\pi-\varphi)a$ $\qquad \varphi = ?$

$$\begin{cases} 2\varphi a + \varphi b = 2\pi a \\ 2\varphi a + 2\varphi b = 2b \end{cases}$$

$\varphi b = 2b - 2\pi a$

$\varphi = 2 - 2\pi \frac{a}{b}$

$\varphi a = 2\pi a - b$

$\varphi = 2\pi - \frac{b}{a}$

$\frac{a}{b}\varphi = 2\pi\frac{a}{b} - 1$

$\varphi + \frac{a}{b}\varphi = 1$

$\frac{a}{b} = \frac{1-\varphi}{\varphi}$

$\varphi = 2 - 2\pi \cdot \frac{1-\varphi}{\varphi} \cdot \Big| \varphi$

$\varphi^2 - 2\varphi + 2\pi - 2\pi\varphi = 0$

Черновик