



98-02-16-81

(159.1)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Тракунина Артёма Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

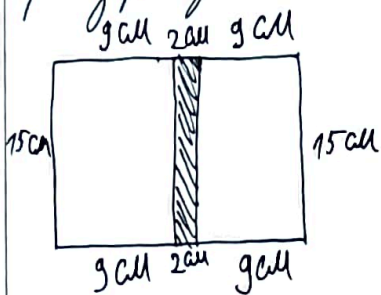
П

98-02-16-81

(159,1)

№1

Первый ходом Аня делает такие 2
разреза и сводает закрашенный кусок.



Этот кусок равен $\frac{1}{10}$ пирога.

Затем у нас остается
2 куска. Если Вова сделал
надрез только на 1 куске -
задача Аня сделана

симметричный разрез относительно
первого сведенного куска и свести кусок
симметричный куску Вовы. ~~Вывод: Вывод~~

Если такие разрезы совпадают, Аня и Вова
режут не надо, а просто свести симметрич-
ный Вовы кусок. П.к. оба разреза на
разных кусках, то если у Вовы нет куска
меньше $\frac{1}{100}$, то у Ани такого куска не будет.

При 2 разрезах также зеркально ^{после хода} Аня
относительно середины. В итоге ~~у Вовы~~ Аня
все время будет симметричная картина;
а когда пирога не останется - тоже симметричная
картина $\Rightarrow$ Последний кусок свела Аня.

1/2.

$$1) x^2 - x - 2 \geq 0, x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2), \text{ где } x \leq -1 \text{ или } x \geq 2$$

$$\text{Тогда } x^2(x^2 - x - 2) = 12x - 13 = x^3 - x^2 - x + 2$$

$$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0 = \cancel{x(x-1)(x-1)(x-1)} - \cancel{11x} + 15 = \cancel{x^2(x-1)(x-1)} + 4$$

$$= x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 6x - 5x + 15 = x^2(x-3) + 2x(x-3) - 5(x-3) =$$

$$= (x^2 + 2x - 5)(x-3) = 0 \quad | \quad x-3=0 \Rightarrow x=3$$

$$x^2 + 2x - 5 = 0, \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 20}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{24}}{2} = -1 \pm \sqrt{6}$$

$-1 + \sqrt{6}$ $-1 \leq -1 + \sqrt{6} < 2$. Такой корень не подходит. $x = -1 - \sqrt{6}$, $x = 3$.

$$2) x^2 - x - 2 \leq 0, (x+1)(x-2) \leq 0, \quad -1 \leq x \leq 2$$

$$\text{Тогда } x^3 + x^2 - x - 2 = 12x - 13, \quad x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0 =$$

$$= x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x - 11x + 11 = x^2(x-1) + 2x(x-1) - 11(x-1) =$$

$$= (x^2 + 2x - 11)(x-1) = 0, \quad \text{или } x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x^2 + 2x - 11 = 0, \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 44}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{48}}{2} = -1 \pm \sqrt{12}$$

~~Но так как~~ $-1 + \sqrt{12} > 2$, а $-1 - \sqrt{12} < -1$. Поэтому они не подходят. Тогда $x = -1$.

Тогда есть 3 корня: $x = 3$, $x = 1$, $x = -1 - \sqrt{6}$.

15.

Если отрезки равны, то их проекции также равны. Найдём координаты последнего отрезка $\frac{a}{18}$.
все. Найдём координаты концов
равных отрезков и решаем
уравнения: 1) $\frac{1}{\frac{a}{54}} = \frac{2}{3} a$,



$$\frac{2a^2}{3 \cdot 54} = 1, a = \pm 9$$

$$2) \frac{1}{\frac{a}{27}} = \frac{1}{3} a, \frac{a^2}{81} = 1, a = \pm 9.$$

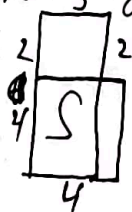
В обоих уравнениях оба корня совпадают,
а значит $a = 9$, или $a = -9$, оба ответа подходят.
Ответ: $a = 9$ или -9 .

13

Если периметр равен площади,
то $a + b = 2a + 2b$, $2a = (a-2)b$, $b = \frac{2a}{a-2}$, $a > 2$, $a \geq 3$.

Пусть $a = 3$, $b = \frac{2 \cdot 3}{3-1} = 6$. Следующее наименьшее
число это $a = 4$, тогда $b = 4$ (случай $a = b$ и $b = 3$ не
н.к. будут одинаковые прямоугольники). Тогда

~~мы получили прямоугольник и квадрат~~
используем на возможное положение прямоу-
гольников: 2



это одно н.к. второй прямоу-
гольник - квадрат.

максимально увеличили
наименьшую площадь:

Тогда площадь итоговой фигуры будет
не меньше чем $3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 - 2a_{\min} \cdot b_{\min} = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 4 =$
 $= 18 + 16 - 24 = 10$. Это есть минимальная
площадь полученной. $\frac{2a}{a-2} = 2 + \frac{4}{a-2}$, $a \leq 6$.

Ответ: 10

Всего 2 возможных
прямоугольника
(3x6 и 4x4)

Если Петя решил ^{н₇} задач больше, чем
Вася, то Петя сделал минимум $n+1$ задачу.
Тогда весь класс в сумме сделал минимум
 $20n+1$ задач. Тогда если любую задачу
решит меньше половины класса
(не больше 9 чел), то всего они решат
не больше $9 \cdot 100 = 900$ задач. $900 \geq 20n+1$,
 $n \leq 45 - \frac{1}{20}$, $n \leq 44$. Три таких n такой случай
возможен. Если возьмем $n=45$, то $20n+1 > 900 \Rightarrow$
Есть задача, которую решила половина
класса. Три $n=44$ есть пример, когда
нет такой задачи: Первый ученик решил
с 1 по 45 задачи (это Петя), второй - с 46 по 89,
3 с 90 по 100 и с 1 по 33, четвертый с 34 по 77 и
т.д., так что после k -ого ученика в сумме
было решено $44k+1$ задач. Итого в конце
получится 81 задача, решенная 9 раз и 19
задач, решенных 8 раз. Итого $n \geq 45$
Ответ: $n \geq 45$. ($n_{\min} = 45$)

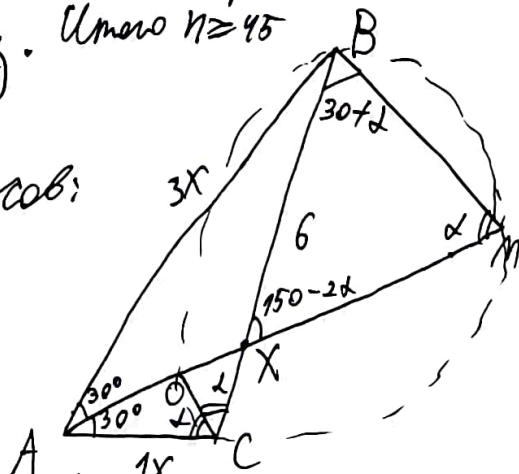
Запишем теорему косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cos(60^\circ) AB \cdot AC =$$

$$= 9x^2 + x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3x^2 = 7x^2 = 36,$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{7}}, 3x = \frac{18}{\sqrt{7}}, 6 = BC = \sqrt{7}x$$

Помимо т.к. AX - биссектриса, $\frac{AB}{BX} = \frac{AC}{CX}$, $BX = \frac{AB}{AC} CX =$
 $= 3 CX$ Тогда $CX = 1,5$, $BX = 4,5$



Запишем теорему косинусов еще раз:
 $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cos(2\angle) AC \cdot BC = x^2 + x^2 - 2 \cos(2\angle) \sqrt{7} x^2 = 9x^2$,
 $2 \cos(2\angle) \sqrt{7} = -1$, $\cos(2\angle) = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$.

$$\cos(\angle) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\angle)}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4\sqrt{7}}}, \quad \sin(\angle) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4\sqrt{7}}} \cdot \frac{\sin(30 + \angle)}{\sin(\angle)} = \frac{\sin(30) \cdot \cos(\angle) + \sin(\angle) \cdot \cos(30)}{\sin(\angle)} =$$

$$= \cos(30) + \sin(30) \sqrt{\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4\sqrt{7}}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4\sqrt{7}}}} = \cos(30) + \sin(30) \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{7}-1}{2\sqrt{7}+1}} =$$

$$= \cos(30) + \sin(30) \cdot \sqrt{\frac{(2\sqrt{7}-1)^2}{(2\sqrt{7})^2 - 1^2}} = \cos(30) + \sin(30) \cdot (2\sqrt{7}-1) \cdot$$

$$\sqrt{\frac{1}{27}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{7}-1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 + \frac{2\sqrt{7}-1}{9}\right) =$$

$$= \frac{XM}{BX}, \quad XM = 4,5 \cdot \frac{\sin(30 + \angle)}{\sin(\angle)} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (8 + 2\sqrt{7}) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} (4 + \sqrt{7}). \text{ Ибо также } \cancel{BM = 4\sqrt{3}}$$

$$OX \cdot XM = BX \cdot XC = 4,5 \cdot 4,5.$$

$$OX = \frac{BX \cdot XC}{XM} = \frac{4,5 \cdot 4,5}{\frac{\sqrt{3}}{2} (4 + \sqrt{7})} = \frac{4,5 \sqrt{3}}{4 + \sqrt{7}} \cdot \frac{4 - \sqrt{7}}{4 - \sqrt{7}} =$$

$$= \frac{4,5 \sqrt{3} \cdot (4 - \sqrt{7})}{9} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (4 - \sqrt{7}). \text{ Тогда } OM =$$

$$= OX + XM = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (4 - \sqrt{7}) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (4 + \sqrt{7}) = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Answer } OM = 4\sqrt{3}$$