



50-71-92-66
(161.29)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Прокорова Миклаша Михайловича

фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход из аудитории: 12:51 – 12:53 Сейф

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Прокорова

Черновик

80 (восемьдесят)

$$2 > x$$

$$2x - 3 \vee 0$$

$$x - 3 \vee 0$$

$$x \vee \frac{3}{2}$$

$$x \vee 3$$

$$\min a > 0$$

$$\forall x: x < 0$$

1

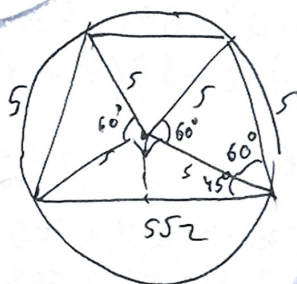
$$\frac{4^5}{2^{\frac{9}{2}}} \geq a + 9 \ln 2^x$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 23 & 13 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 &= \\ &= 3(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc \end{aligned}$$



465°

$$3a^2b + 3bc^2 + 3b^2a$$

$$\begin{aligned} x^3 + x^2b_1 + 6x \\ a_1x^2 + 6b_1x + 6a_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b_1 + a_1) \\ (6 + a_1b_1) \end{aligned}$$

$$6a_1$$

$$8a_2$$

$$12a_3$$

$$b_1 + a_1 = b_2 + a_2$$

$$\begin{cases} 3a_1 = 4a_2 = 6a_3 \\ 8 + a_1b_1 = 8 + a_2b_2 = 12 + a_3b_3 \\ a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{4a_2}{3a_1} \rightarrow \frac{4}{3}b_1$$

$$x_1 \cdot x_2 = 6$$

$$x_2 \cdot x_3 = 8$$

$$x_3 \cdot x_1 = 12$$

$$(a+b+c)^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 7$$

$$x_1x_2$$

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{3}{4}$$

$$x_3x_1 = 12$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

$$x_3 = 4 \quad x_1 = 3 \quad x_2 = 2$$

$$x_3$$

$$\sqrt{4x^2 - 72x + 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} + (\sqrt{-(x-2)})^2 = \sqrt{3+58} - \sqrt{3-58}$$

$$\sqrt{2x-3} + |x-3| + (-(x-2)) = \sqrt{3+58} - \sqrt{3-58}$$

$$2 - x + 2 \geq 0$$

$$|2x-3| - x + 2 - x + 3 = \sqrt{3+58} - \sqrt{3-58}$$

$$= \sqrt{3+58} - \sqrt{3-58} = \sqrt{1+252+2} - \sqrt{1+2-252} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}+1 - (\sqrt{2}-1) = 2$$

$$(2x-3) - x + 5 = 2$$

$$\begin{cases} x \in (\frac{3}{2}; 2] : 2x-3 - 2x+5 = 2 \rightarrow 2=2 \\ 2x-3 \rightarrow x \in (-\infty; \frac{3}{2}] : 3-2x - 2x+5 = 2 \rightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ans: } [\frac{3}{2}; 2]$$

$$a) \sin^4(x) + \sin^2(2x) - \sin^2(4x) = (\sin^2(x) + \sin^2(2x) - \sin^2(4x))^3$$

$$\begin{cases} a = \sin^2 x \\ b = \sin^2 2x \\ c = -\sin^2 4x \end{cases}$$

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 0$$

$$0 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\begin{cases} a = -b \\ c = -b \\ a = -c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow x = \pi k \\ \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

Одн. 3.

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 2x = 0 \\ \sin^2 x - \sin^2 4x = 0 \\ \sin^2 x + \sin^2 4x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \sin^2 \frac{3}{2} x \cos \frac{\pi x}{2} = 0 \\ 2 \sin^2 \pi x \cos 3\pi x = 0 \\ 2 \sin^2 \frac{3}{2} x \cos \frac{5\pi x}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} \pi x = \pi k \\ \frac{2x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \pi x = \pi k \\ 3\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 5\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2\pi}{3} \\ x_2 = \frac{2\pi}{3} k + 1 \\ x_3 = \pi k \\ x_4 = \frac{1}{6} + \frac{2\pi}{3} \\ x_5 = \frac{1}{5} + \frac{2\pi}{5} \end{cases} \quad \begin{matrix} n, k, m, q, z \in \mathbb{Z} \\ \cos \pi k; \\ [0, 3; 1, 8] \\ \frac{2}{70} \quad \frac{8}{70} \quad \frac{9}{5} \end{matrix}$$

отн:

$$\begin{cases} x_1 \in \{\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 \in \{\frac{1}{6}; \frac{5}{6}; \frac{7}{6}; \frac{9}{6}\} \\ x_5 \in \{\frac{1}{5}; \frac{7}{5}; \frac{9}{5}\} \end{cases}$$

$$\text{Ans: } \left\{ \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; 1; \frac{5}{6}; \frac{7}{6}; \frac{9}{6}; \frac{1}{5}; \frac{7}{5}; \frac{9}{5} \right\}$$

$$\frac{3}{70} \leq \frac{1}{6} + \frac{9}{5} \leq \frac{18}{70} \quad | \cdot 30$$

$$9 \leq 5 + 10 \leq 54$$

$$q \in \{1; 2; 3; 4\}$$

$$\frac{3}{70} \leq \frac{1}{5} + \frac{2}{5} z \leq \frac{18}{70} \quad | \cdot 10$$

$$3 \leq 2 + 4z \leq 18$$

$$z \in \{1; 2; 3; 4\}$$

[illegible]

$$R = 5$$

$$a_{\text{вн}} = 5, 5, 5\sqrt{2}$$

шматовик

$$1) \text{ и.к. } AO = OB = OC = OD = \boxed{AB = BC = 7}$$

$$\Rightarrow \text{по т. кос: } \cos \angle AOC = 0 \Rightarrow \angle AOC = 90^\circ$$

$\triangle AOB, \triangle BOC$ - п/е

2) следовательно может быть и $5, 5\sqrt{2}, 5$ но в таком случае также будет такая же площадь (максим. не боимся)

$$3) \angle AOB = 360^\circ - 2 \cdot 60^\circ - 90^\circ = 150^\circ$$

$$\text{по т. кос: } AP^2 = 25 + 25 + 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$9) S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{AOB} + S_{COD} + S_{AOC} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot \sin 60^\circ \right) + \frac{1}{2} \sin 150^\circ \cdot 25 =$$

$$= 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 25 \cdot \frac{1}{2} + 25 \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{4} \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3} \right)$$

$$\text{Ответ: } \frac{25}{4} (3 + 2\sqrt{3})$$

$$f_1(x) = (x+a_1)(x^2+b_1x+c_1)$$

$$a_1(23), b_1(23) > 0$$

$$f_2(x) = \dots - \text{назовем } a_2, b_2$$

$$\forall x: f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$$

$$f_3(x) = \dots - a_3, b_3$$

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + b_3 + a_3 = ?$$

$$(x+a)(x^2+b_1x+c_1) = x^3 + b_1x^2 + cx + ax^2 + ab_1x + ca =$$

$$= x^3 + (b_1+a)x^2 + (c+ab_1)x + ca$$

$$1) \text{ и.к. чтобы } f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$$

$$\begin{cases} 6a_1 = 8a_2 = 12a_3 \\ 6 + a_1b_1 = 8 + a_2b_2 = 12 + a_3b_3 \\ b_1 + a_1 = b_2 + a_2 = b_3 + a_3 \end{cases} \rightarrow 3a_1 = 4a_2 = 6a_3$$

2) также заметим, что корни внешних членов не могут совпадать $\Rightarrow$ они чередуются (уп-ник)

(мажоранты, но их набор ограничен)

$$\begin{cases} 6 = x_1x_2 \\ 8 = x_2x_3 \\ 12 = x_3x_1 \end{cases} \rightarrow \frac{x_1}{x_3} = \frac{3}{4} \rightarrow x_1x_2 = 12 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = 4 \rightarrow x_3 = 2$$

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 =$$

$$= x_1 + x_2 + x_3 + (x_1 + x_2) + (x_3 + x_2) + (x_1 + x_3) =$$

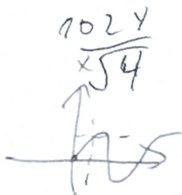
$$= 3(x_1 + x_2 + x_3) = 24 \quad \text{Ответ: } 24$$

$$\text{и.к. } b_1, b_2, b_3 = (x_1 + x_2), (x_2 + x_3), -(x_3 + x_1)$$

$$a_1, a_2, a_3 = -x_3,$$

Черновик

$2x$



$$y^{4-\frac{1}{x}} \cdot (5-\frac{1}{x}) \cdot (-1)$$

$$0 = \frac{1}{5} + \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{5} \Rightarrow x = -5$$

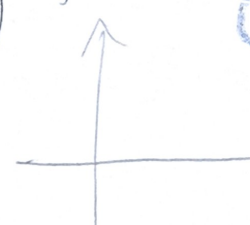
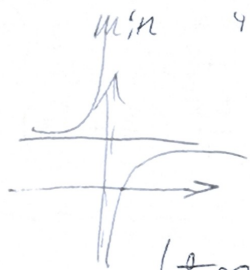
$$f(x) = y^{5-\frac{1}{x}}$$

$$g(x) = \sin 2x + a$$

$$f'(x) = y^{4-\frac{1}{x}} (5-\frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$y^{5-\frac{1}{x}} \rightarrow (\frac{1}{5}; 1)$$

$$5 - \frac{1}{x}$$



интервал; пересеклись; а также; 3 макс; max/min

$$y^{5-\frac{1}{x}} - \sin 2x \geq a$$

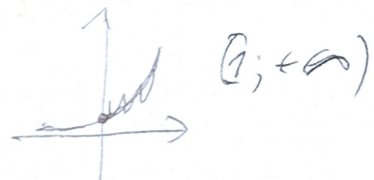
4

$$x^4 \rightarrow 4x^3$$

$$y^{4-\frac{1}{x}} (5-\frac{1}{x}) (-(-\frac{1}{x^2}))$$



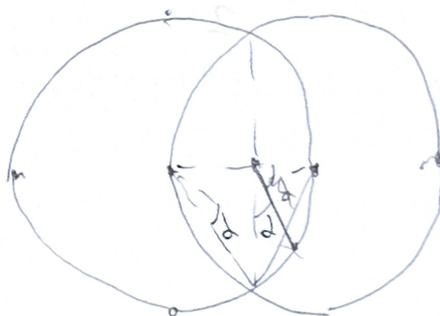
$$(-\infty; 5] \quad f = 2^x$$



$$\frac{d}{2\pi}$$

$$\frac{2R}{2\pi}$$

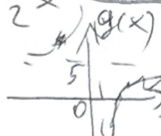
$$dR$$



$$4^5 - \frac{1}{x} \geq a + \sin 2x$$

шестовик:

$$g(x) = 5 - \frac{1}{x} \rightarrow E g(x) \in (-\infty; 5]$$



$$h(x) = a + \sin 2x$$

$$f(x) = 4^{g(x)} \rightarrow E f(x) \in (0; 4^5]$$

$f(x) = 4^{g(x)}$ при $x > 0$ (и, к счастью, возрастает)

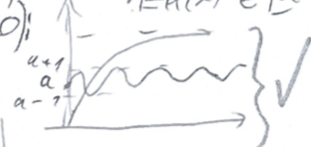
если $a \in (0; 4^5]$ тогда будет пересечение гр.-ков

и, к. $f(x) \uparrow$ и $h(x) \uparrow$ (и, к счастью, возрастает) $\Rightarrow$ непрерывная

если $a \in [4^5; 4^5 + 1)$ то т.к.

$$E f(x) \in (0; 4^5]$$

$$E h(x) \in [a-1; a+1] \Rightarrow \text{пересекаются}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$$

$f(x), h(x)$ непрерывны $\Rightarrow \exists$ пересечение гр.-ков.

$$E h(x) \in [a-1; a+1]$$

N 2

$$4^5 - \frac{1}{x} \geq a + \sin 2x$$

$$h(x) = a + \sin 2x$$

$$g(x) = 5 - \frac{1}{x} \rightarrow E g(x) \in (-\infty; 5] \rightarrow f(x) = 4^{g(x)} \rightarrow E f(x) \in (0; 4^5]$$

$a > 0$, если $a \in (0; 4^5]$ тогда будет пересек

и, к. $f(x) \uparrow$ и непрерывна и $h(x)$ - непрерывная

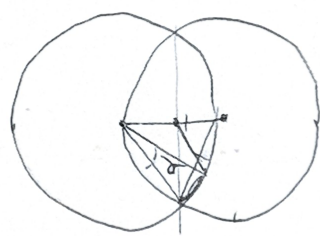
если $a \in (4^5; 4^5 + 1)$ т.к. $E f \in (0; 4^5]$

$\Rightarrow \exists$ пересечение:

и, к. тогда т.к. a , или какому $x > 0$ нет пересек

$$\text{Ответ: } 1025 (= 4^5 + 1)$$

N 6



маленький угол

$$L = S_d + 2 S_{\text{кр.}} = R^2 + \left(\frac{R^2}{2}\right) - R^2 \cos \alpha$$

$$\min L = 2R + 2 \cdot \frac{5R^2}{4} - 2R^2 \cos \alpha =$$

$$L' = 2R + 2R^2 \left(\frac{5}{4} - \cos \alpha\right) =$$

$$L' = R + 2R^2 (\sin \alpha)$$

$$L = 2R + 2 \left(\frac{5R^2}{4} - R^2 \cos \alpha\right)$$

$$L' = R + 2R^2 \sin \alpha$$

$$\min L = L\left(\arcsin\left(\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{3}\right)\right)$$

$$\frac{2R \sin \alpha}{\frac{5}{4}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{3}$$

$$\sin \alpha = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{3}$$