0 936408 050005

93-64-08-05
(161.20)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Пашкалева Амира Аслановна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата «13» апреля 2025 года

Подпись участника

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
93-64-08-05	75	+	+	+	+	+	0	0	0
93-64-08-05		+	+	+	+	+	0	0	0

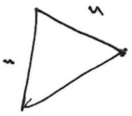
93-64-08-05
(161.20)

75 (семьдесят пять)

$-\left(\sqrt{-(-5)}\right)^2 =$

$x+1 \leq 0$

$\left(5^{3-\frac{1}{x}}\right)' =$



$244 = 4 \cdot 61$

$a \leq 5^3 - 0$

$4x^2+12x+9=0$

$4(x^2+3x+\cancel{3})$

$D = 144 - 144$

$a \leq 5^{3-\frac{1}{x}} - \sin 3^x$

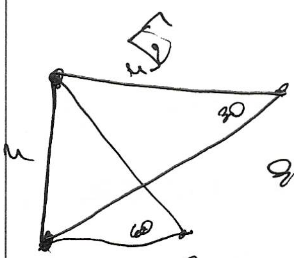
$x_1 = \frac{-12}{8}$ AB·AD

$\left(-x^{-1}\right)' =$

$4\left(x+\frac{12}{8}\right)^2 = 4\left(x^2+3x+\frac{9}{4}\right)$

$\left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-2} =$

$= -\frac{1}{x^2}$



$\sin(2x)' = 2$

$8x^2+12x+4 =$

$\left(3-\frac{1}{x}\right)' =$

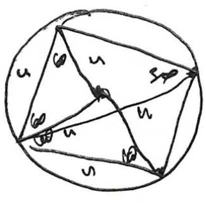
$\frac{-12}{18} = -\frac{2}{3}$

$\frac{4}{\sin\frac{11}{6}} = 4\sqrt{2}$

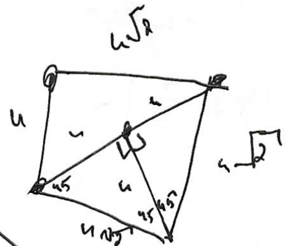
$\frac{1}{x^2} \cdot \ln(5) \cdot 5^{3-\frac{1}{x}} -$

$4 = 7+\sqrt{24} + 7-\sqrt{24} - 2 \cdot 5$

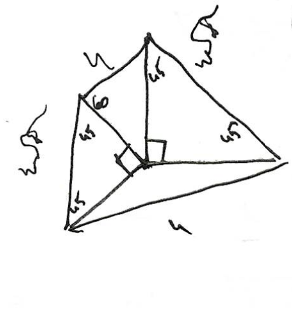
$- \ln(3) \cdot 3^x \cdot \cos(3^x)$

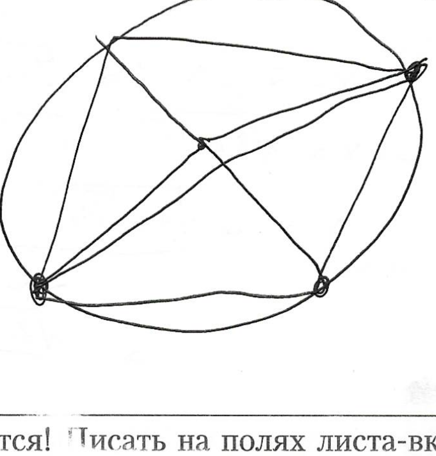


$-4x-4 = 6-4$



$a <$





Чистовик

№1

$4x^2+12x+9=4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$ $\qquad x+1\le 0$

$\qquad x\le -1$

$9x^2+12x+4=9\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 2\left|x+\frac{3}{2}\right|+3\left|x+\frac{2}{3}\right|+x+1=\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}} \\ x\le -1 \end{cases}$$

Т.к $x\le -1$, то $x+\frac{2}{3}\le 0 \Rightarrow \left|x+\frac{2}{3}\right|=-x-\frac{2}{3}$

Если $x\ge -\frac{3}{2} \Rightarrow x\in\left[-\frac{3}{2};-1\right]$, то $\left|x+\frac{3}{2}\right|=x+\frac{3}{2}$.

Рассмотрим этот случай:

$2x+3-3x-2+x+1=\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}$

$\Downarrow$

$2=\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}$

~~Докажем, что~~ это:

$4=7+\sqrt{24}+7-\sqrt{24}-2\sqrt{49-24}$

$4=14-10=4$ – правда, т.к

$\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}\ge 0$ и $2>0$

В случае если $x\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$:

$\left|x+\frac{3}{2}\right|=-x-\frac{3}{2}$

$\Downarrow$

$-2x-3-3x-2+x+1=\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}$

$-4x=\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}+4$

$x=\frac{\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}}{-4}-1=$

$=\frac{\sqrt{7-\sqrt{24}}-\sqrt{7+\sqrt{24}}-4}{4}=-\frac{3}{2}$

93-64-08-05
(161.20)

$-\frac{3}{2}$ – не подходит, т.к $x \in (-\infty; -\frac{3}{2})$

Ответ: $x \in [-\frac{3}{2}; -1]$

№2

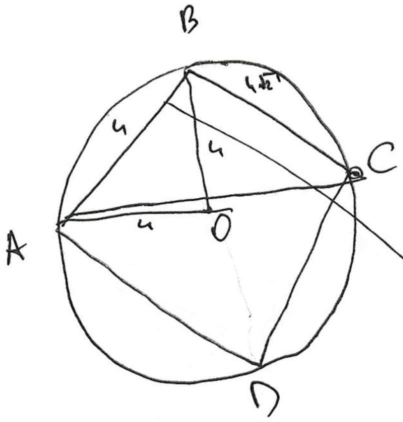
Чтобы решений не было „a" должно быть строго больше максимума функции $5^{3-\frac{1}{x}} - \sin 3^x$ на промежутке $x \in (0; +\infty)$

Заметим, что если мы будем увеличивать x, который удовлетворяет условию $\sin 3^x = -1 \Leftrightarrow 3^x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$, что $5^{3-\frac{1}{x}}$ будет стремиться к 5^3, но не достигнет, т.к $\frac{1}{x} > 0 \Rightarrow$ максимум $< 5^3 - (-1) = 126$, но при этом может быть сколь угодно близок к нему. $\Rightarrow$

$\Rightarrow a = 126$

Ответ: $a = 126$

№3



Заметим, что в таком четырехугольнике найдется треугольник со сторонами 4 и $4\sqrt{2}$. Пусть это $\triangle ABC$. O – центр опис. окр.

$\angle AOB = 60°$, т.к $\triangle AOB$ – равносторонний

$\Rightarrow \angle ACB = 30°$ (т.к $\angle ACB = \frac{\angle AOB}{2}$).

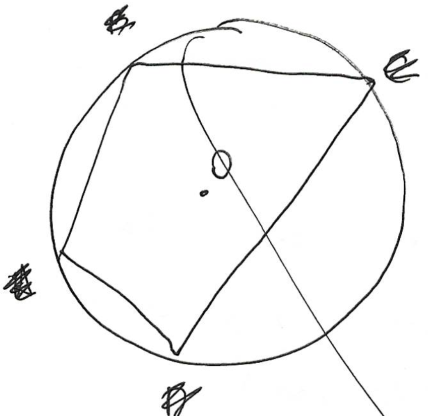
Тогда по т. Синусов:

$\frac{4}{\sin 30°} = \frac{4\sqrt{2}}{\sin \angle BAC} \Rightarrow \sin \angle BAC = \sin(30°)\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\angle BAC = 45°/135°$,

Если $\angle BAC = 45°$, то $\angle ABC = 105°$

№3



Пусть O – центр окр. ~~ABCD~~ – ~~четырёхугольная~~

Все далее рассматриваемые треугольники имеют вершину O

Площадь треугольника со стороной 4: $\frac{1}{2} r^2 \cdot \sin 60^\circ =$

$= 8 \cdot \sin 60 = 4\sqrt{3}$, т.к. все углы в таком треугольнике по 60°

Площадь треугольника со стороной $4\sqrt{2}$:

Пусть $BC = 4\sqrt{2}$

По т. косинусов: Тогда ~~∠BOC~~ $BC^2 = 32 = BO^2 + OC^2 - 2BO \cdot OC \cdot \cos\angle BOC =$

$= 32 - 32\cos\angle BOC \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\angle BOC = 0 \Rightarrow \sin\angle BOC = 1$

по О.Т.Д

$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin\angle BOC =$

$= 8$

Пусть CD ~~…~~ – сторона неизвестная (т.к. CD не связано с BC, считаем, что это разные рисунки)

Тогда $S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin\angle COD = 8\sin\angle COD$

$2 \cdot \frac{1}{2}$

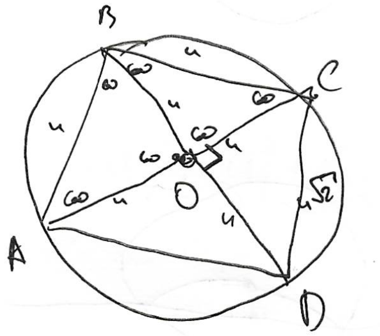
2B

93-64-08-05 (161.20)

№3

$S_{ABCD} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{OAD}$ — так находилась площадь.

Рассмотрим случай, когда стороны длиной 4 находятся рядом:



Пусть O — центр. окр.

$AB = BC = 4$; $CD = 4\sqrt{2}$ (без умаления общности)

Тогда $\angle AOB = \angle BOC = 60^\circ$ (т.к $\triangle AOB$ и $\triangle BOC$ — равносторон.)

$\Downarrow$

$\angle COD = 90^\circ$, т.к $\cos\angle COD = 0$, то (по теореме косинусов для $\triangle COD$)

$\angle COD = 90^\circ / 270^\circ$, но если он 270°, то $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD > 360^\circ$ — противоречие.

$\Downarrow$

$\angle AOD = 150^\circ$

$\Downarrow$

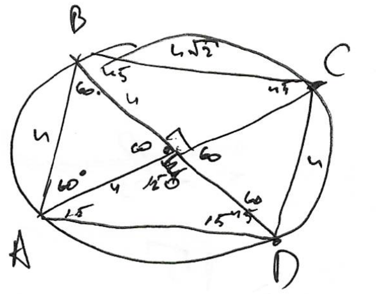
$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} 4 \cdot 4 \cdot \sin\angle 150 = 8 \cdot \sin\angle 150 = 4$

$S_{\triangle AOB} = 4\sqrt{3} = S_{\triangle BOC}$

$S_{\triangle COD} = 8$

$S_{\triangle ABCD} = 8\sqrt{3} + 12$

Если стороны длины 4 находятся друг против друга, то пусть $AB = CD = 4$, $BC = 4\sqrt{2}$. O — центр опис. окр. (без умал. общн.)



$\angle ABO = 60^\circ$, т.к $\triangle ABO$ — р/с. ($\angle ABO = \angle AOB = \angle BAO$)

Аналогично $\angle COD = \angle OCD = \angle ODC = 60^\circ$

$\Downarrow$

$\angle BOC = 90^\circ$ (т.к он не может быть 270°)

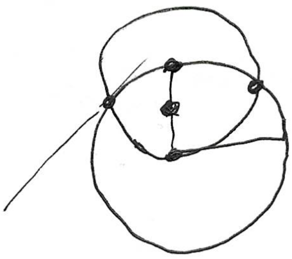
$\Downarrow$

$\angle AOD = 150^\circ \Rightarrow S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 150 = 4$

$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD} = 4\sqrt{3}$ $S_{\triangle BOC} = 8 \Rightarrow S_{\triangle ABCD} = 12 + 8\sqrt{3}$

Ответ: $12 + 8\sqrt{3}$

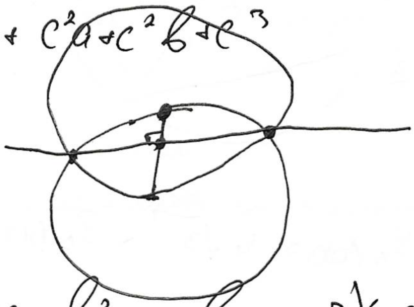
Черновик



$a^3 + b^3 - c^3 = (a+b-c)^3$

$(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)(a+b+c) =$

$= a^3 + a^2b + a^2c + b^2a + b^3 + b^2c + c^2a + c^2b + c^3$

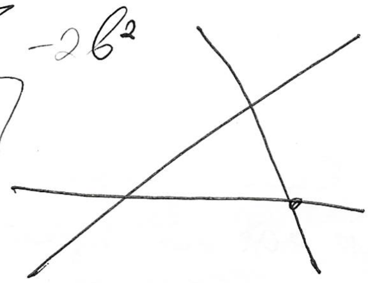


$0.7^3 + 0.2^3 - 0.3^3 = 0.6^3$

$(a+b-c)(a+b-c) = (a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + c^2)(a+b-c)$

$= a^3 + 2a^2b - 2a^2c + b^2a - 2b^2c - c^3 +$

$+ \cancel{2b^2b}\ 2ab^2 - 2abc + \cancel{b^3} - 2b^2$



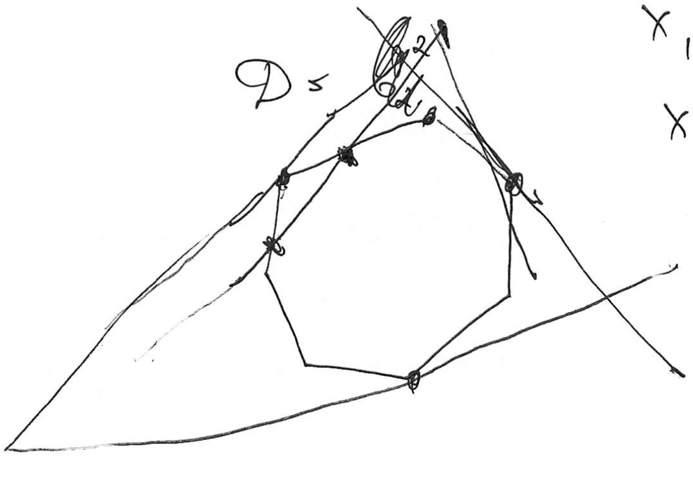
$12a_1 = 15a_2 = 20a_3$

$a_1^2 - b_2 a_1 + 15 = 0$

$x_1 + y_2 = -b_2$

$D = b_2^2$

$x_1 x_2 = 15$



№5

При $x=0$:

$$12a_1 = 15a_2 = 20a_3$$

Заметим, что при $x = -a_1$:

$$(-a_1+a_2)(a_1^2 + b_2a_1 + 15) = 0$$

Если $a_2 - a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = a_1$, то $12a_1 = 15a_1 \Rightarrow a_1 = 0$ — противоречие

$$\Downarrow$$

$$a_1^2 - b_2a_1 + 15 = 0$$

Аналогично при $x = -a_3$:

$$a_3^2 - b_2 \cdot a_3 + 15 = 0$$

Т.к. $x^2 + b_2x + 15$ — уравнение 2-ой степени, то a_1 и a_3 — все его корни $\Rightarrow$ по т. Виета: $a_1 + a_3 = b_2$

$a_1 \cdot a_3 = 15$

$a_1 \cdot \frac{3a_1}{5} = 15$

$\Downarrow$

$a_1^2 = 25$

$a_1 = 5$, т.к. $a_1 > 0$.

$\Downarrow$

$a_1 = 5$; $a_2 = 4$; $a_3 = 3 \Rightarrow b_2 = 8$

Аналогично:

$a_1 + a_2 = b_3$; $a_2 + a_3 = b_1 \Rightarrow b_3 = 9$; $b_1 = 7$

$\Downarrow$

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 = 5 + 7 + 4 + 8 + 9 + 3 = 36$$

Ответ: 36

Черновик

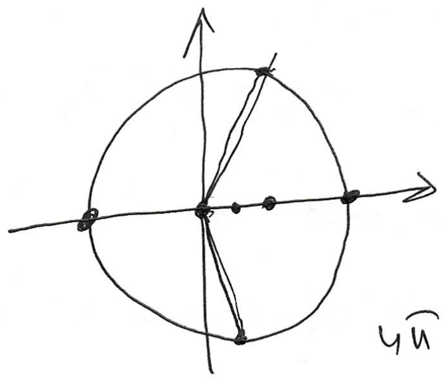
$-1 = -1+1-1$

$\cos 2\pi = 1$

$\cos \pi = -1 \quad \cos 4\pi = 1$

$\cos \frac{3\pi}{10} = \cos 54^\circ$

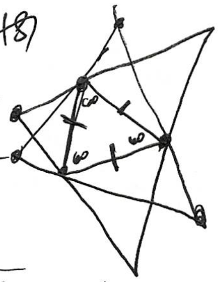
$\cos \frac{16\pi}{10} = \cos$



4π

16·18

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 108 \\ 18 \\ \hline 288 \end{array}$$



$\cos \pi x = \cos 4\pi x = -\cos 2\pi x$

cos

$x - y = 2\beta$

$\beta = \frac{x-y}{2}$

$x = \alpha + \beta$

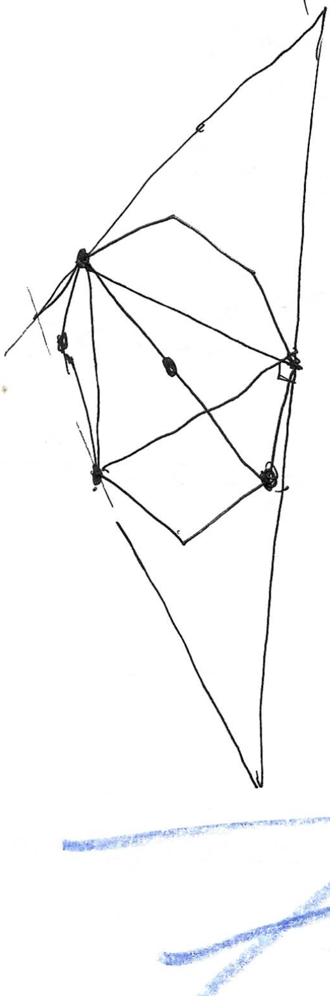
$y = \alpha - \beta$

$2\alpha = \frac{x+y}{2}$

$\cos(x) + \cos y) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

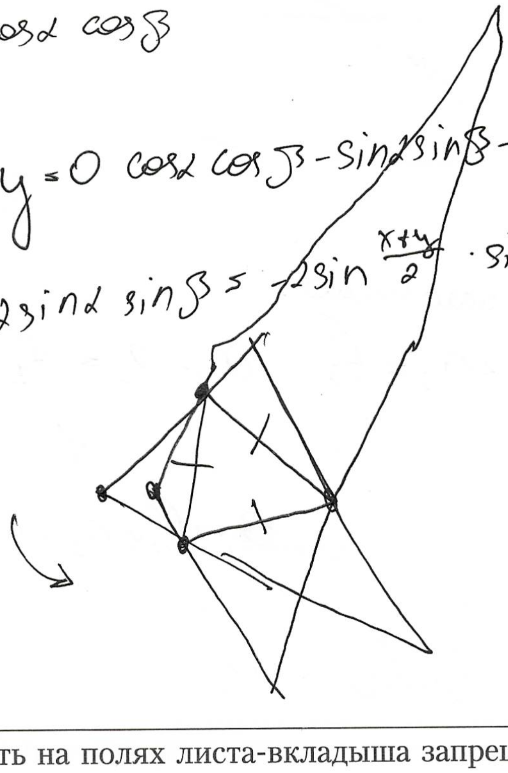
$+ \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$2\cos\alpha\cos\beta$



$\cos x - \cos y = 0 \quad \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta -$

$-2\sin\alpha\sin\beta = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$



№4

Заметим, что после раскрытия скобок $\cos^3 \pi x$, $\cos^3 2\pi x$ и $\cos^3 4\pi x$ – сократятся и останется уравнение второй степени. Зафиксируем $\cos(2\pi x)$ и $\cos(4\pi x)$ и будем рассматривать полученное выражение относительно $\cos\pi x$, поскольку его степень двойка, то корней может быть не больше чем двух (относительно фиксированных $\cos 2\pi x$; $\cos 4\pi x$).
Заметим, что $\cos\pi x = -\cos 2\pi x$ и $\cos\pi x = \cos 4\pi x$ являются решениями этого уравнения. В случае если $\cos 2\pi x \neq \cos 4\pi x$ ~~это~~ это все корни (поскольку их 2)

Рассмотрим этот случай:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos\pi x = -\cos 2\pi x \\ \cos\pi x = \cos 4\pi x \end{array}\right. \\ \cos 2\pi x \neq \cos 4\pi x \end{cases}$$

$$\cos\pi x + \cos 2\pi x = 2\cos\frac{3\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2} = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\frac{3\pi x}{2} = 0 \ (1) \\ \cos\frac{\pi x}{2} = 0 \ (2) \end{array}\right. \Rightarrow$$

(1): $\frac{3\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\frac{3x}{2} = \frac{1}{2} + k$

$3x = 2k + 1$

$x = \frac{2k+1}{3} = \frac{1}{3};\ 1$

на промежутке $[0,3;\ 1,6]$

(2): $\cos\frac{\pi x}{2} = 0$

$\frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$x = 1 + 2n \Rightarrow x = 1$, при $x \in [0,3;\ 1,6]$

$$\cos\pi x - \cos 4\pi x = 0$$

$$-2\sin\frac{5\pi x}{2}\cdot\sin\frac{-3\pi x}{2} = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{5\pi x}{2} = 0 \ (3) \\ \sin\frac{-3\pi x}{2} = 0 \ (4) \end{array}\right. \Rightarrow$$

(3): $\frac{5\pi x}{2} = \pi d,\ d \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{2d}{5} \Rightarrow x = \frac{2}{5};\ \frac{4}{5};\ \frac{6}{5};\ \frac{8}{5}$

(4): $\frac{-3\pi x}{2} = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -\frac{2k}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{2}{3};\ \frac{4}{3}$

$\cos 2\pi x = \cos 4\pi x$

$-2\sin(3\pi x)\cdot\sin(-\pi x) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin 3\pi x = 0 \quad (5) \\ \sin -\pi x = 0 \quad (6) \end{array}\right.$

(5): $3\pi x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{k}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ 1;\ \frac{4}{3}$ при $x \in [0{,}3;\ 1{,}6]$

(6): $-\pi x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$x = -n \Rightarrow x = 1$ при $x \in [0{,}3;\ 1{,}6]$

Возвращаясь к системе самой первой системе получим:

$\begin{cases} x = \frac{1}{3};\ \frac{2}{5};\ \frac{4}{5};\ \frac{6}{5};\ \frac{8}{5};\ \frac{2}{3};\ \frac{4}{3};\ 1 \\ x \neq \frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ 1;\ \frac{4}{3} \end{cases}$

$\Downarrow$

$x = \frac{2}{5};\ \frac{4}{5};\ \frac{6}{5};\ \frac{8}{5}$

В случае если $\cos 2\pi x = \cos 4\pi x$, получим:

$\cos^3 \pi x = \cos^3 \pi x$, что является тождеством, и выполняется при $\forall x$.

$\Downarrow$

в этом случае $x = \frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ 1;\ \frac{4}{3}$ (это уравнение было решено ранее)

Ответ: $x = \frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ 1;\ \frac{4}{3};\ \frac{2}{5};\ \frac{4}{5};\ \frac{6}{5};\ \frac{8}{5}$