85-67-09-57
(160.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Пызина Юрия Игоревича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

85-67-09-57
(160.1)

55 (пятьдесят пять)

Черновик

Задача 1

$$\sqrt{\log_2^2 x + 3\log_2 x - \sqrt{\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4}} \geq \log_2 x + 1$$

$\log_2 x = t$

$\sqrt{t^2+3t-\sqrt{t^2+3t-4}} \geq t+1$

$t^2+3t-4=0$

$D=9+4\cdot 4=5^2$

$(t+4)(t-1)=0$

$\boxed{t\in(-\infty;-4]\cup[1;+\infty)}$

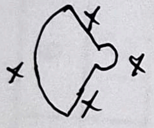
$t^2+3t-\sqrt{t^2+3t-4}\geq 0$

$t^2+3t \geq \sqrt{t^2+3t-4}$

$t^4+6t^3+9t^2 \geq t^2+3t-4$

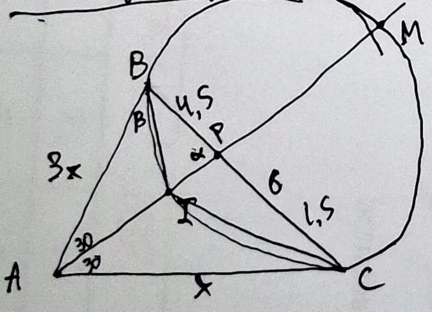
$t^4+6t^3+8t^2-3t+4\geq 0$

$t\in(-\infty;-4]$



$t^2+3t-\sqrt{t^2+3t-4} \geq t^2+2t+1$

$t-1\geq\sqrt{t^2+3t-4}$



$\sqrt{1-\frac{5+\sqrt{28}}{2\sqrt{28}}} = \frac{\sqrt{28}-5}{2}$

$3:\ \sqrt{9+9-\sqrt{9+9-4}}\geq 4$

$4:\ \sqrt{16+12-\sqrt{16+12-4}}\geq 5$ $\quad \cos 2\beta = \frac{5}{\sqrt{28}}$

$\log_2^2 x+3\log_2 x = t$ $\quad \cos\beta = \sqrt{\frac{\cos 2\beta+1}{2}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{28}}{2\sqrt{28}}}$

$D=9+4t$

$\log_2 x = \frac{-3\pm\sqrt{9+4t}}{2}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$

$\log_2 x\leq -4$ $\quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\cos\alpha + 1$

$x\leq 2^{-4}=\frac{1}{16}$ $\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}}$

$\log_2 x\geq 1$

$x\geq 2$

Задача 2

$\frac{4,5}{\sin 30^\circ} = \frac{3x}{\sin\alpha} = \frac{AP}{\sin 2\beta}$

$\frac{1,5}{\sin 30^\circ} = \frac{x}{\sin\alpha} = \frac{AP}{\sin(120-2\beta)}$

$\frac{AP}{\sin 2\beta} = 3\frac{AP}{\sin(120-2\beta)}$

$\sin(120-2\beta) = 3\sin 2\beta$

$\sin\frac{2\pi}{3}\cos 2\beta - \cos\frac{2\pi}{3}\sin 2\beta = 3\sin 2\beta$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-3\right)\cos 2\beta = 0$

Чистовик

Задача 1

$\sqrt{\log_2^2 x + 3\log_2 x - \sqrt{\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4}} \geq \log_2 x + 1$

$\log_2 x = t$

$\sqrt{t^2+3t-\sqrt{t^2+3t-4}} \geq t+1$

ОГР: $t^2+3t-4 \geq 0$

$(t+4)(t-1) \geq 0$

$t \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$

Заметим, что при $t \leq -4$, $x \leq \frac{1}{16}$, при этом ОГР: $x>0$

$0 < x \leq \frac{1}{16}$ + ~~[illegible]~~, заметим, что $x = \frac{1}{16}$ подходит и что $f(x) \in \mathbb{Z}$, при $0 < x \leq \frac{1}{16}$, только для $x = \frac{1}{16}$

$f\left(\frac{1}{16}\right) = 1$

Рассмотрим $t \in [1; +\infty)$

$\sqrt{t^2+3t-\sqrt{t^2+3t-4}} \geq \underbrace{t+1}_{\geq 0} \quad |\,^2$

$t^2+3t-\sqrt{t^2+3t-4} \geq t^2+2t+1$

$0 \leq t-1 \geq \sqrt{t^2+3t-4} \quad |\,^2$

$t^2-2t+1 \geq t^2+3t-4$

$5t \leq 5$

$t \leq t \leq 1 \Rightarrow t = 1$ - единственное ~~[illegible]~~ решение при $t \in [1; +\infty)$

$t = 1 \Rightarrow x = 2$, $f(x) = 3\mathbb{Z}$

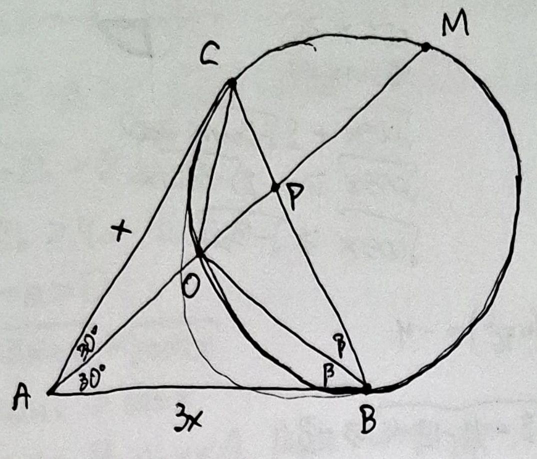
Отв: ~~32~~ 33

85-67-09-57 (160.1)

Чистовик

Задача 2

Дано: $BC=6$, $\angle CAB=60^\circ$
$\frac{AB}{AC}=\frac{3}{1}$



1. По св-ву биссектрисы AP: $\frac{BP}{CP}=\frac{AB}{AC} \Rightarrow BP=4,5;\ CP=1,5.$

2. Пусть $\angle ABC=2\beta$

Из Т. синусов для $\triangle ABP$ и $\triangle ACP$ следует

$\frac{BP}{\sin\angle BAP}=\frac{AP}{\sin\angle ABC}$; $\frac{AP}{\sin\angle ABC}=\frac{4,5}{\sin 30^\circ}$

$\frac{CP}{\sin\angle CAP}=\frac{AP}{\sin\angle ACB}$; $\frac{AP}{\sin(120^\circ-\angle ABC)}=\frac{1,5}{\sin 30^\circ}$

$\Downarrow$

$3\sin 2\beta=\sin(120^\circ-2\beta)$

$3\sin 2\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\beta+\frac{1}{2}\sin 2\beta$

$5\sin 2\beta=\sqrt{3}\cos 2\beta$

$\sqrt{28}\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{28}}\sin 2\beta-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}\cos 2\beta\right)=0$, Пусть $\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{28}}$, $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}$

$\sin(2\beta-\varphi)=0$

$2\beta-\varphi=2\pi k$, пусть $k=0$

$2\beta=\varphi$ | $\cos\angle ABC=\frac{5}{\sqrt{28}}$, $\sin\angle ABC=\sqrt{\frac{3}{28}}$

$\cos\beta=\sqrt{\frac{5+\sqrt{28}}{2\sqrt{28}}}$, $\sin\beta=\sqrt{\frac{\sqrt{28}-5}{2\sqrt{28}}}$

3. $AP=9\sin\angle ABC=\frac{9}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$

4. Из AP получаем PO, $PO\cdot PM=CP\cdot PB$

AB получаем из Т косинусов для $\triangle ABP$ и $\angle APB$

Черновик

$\sqrt{\sqrt{\cos x}+2\sqrt{-3\sin x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{\cos x}-\sqrt{-3\sin x}}$

$\sqrt{\cos x}=a \overset{0}{\geq}, \quad \sqrt{-3\sin x}=b \geq 0$

$\sqrt{a+2b} \geq 2\sqrt{a-b}$

$a+2b > 4a-4b$

$6b-3a>0$

$2b-a \geq 0$

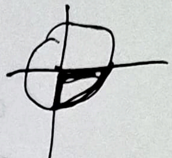
$\sqrt{\cos x}-\sqrt{-3\sin x} \geq 0$

$\sqrt{\cos x} > \sqrt{-3\sin x}$

$\cos x > -3\sin x \geq 0$

$\cos x + 3\sin x \geq 0$

$\frac{1}{\sqrt{10}}\cos x + \frac{3}{\sqrt{10}}\sin \geq 0$



$\cos x \geq 0$

$\sin x \leq 0$

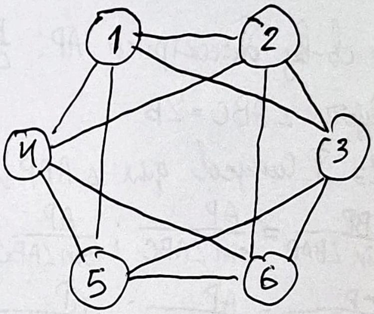
$\sqrt{\cos x}+2\sqrt{-3\sin x} \geq 0$

$\sqrt{\cos x} \geq -2\sqrt{-3\sin x}$

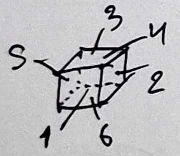
$\sqrt{\cos x} \geq \sqrt{-3\sin x}$

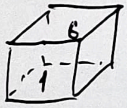
$\log_2\left(\frac{1}{16}\right) = -4$

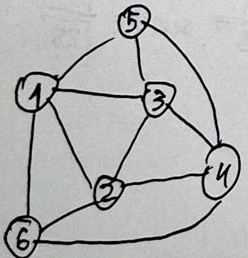
$\sqrt{16-12} - 16-12-4 \geq -3$

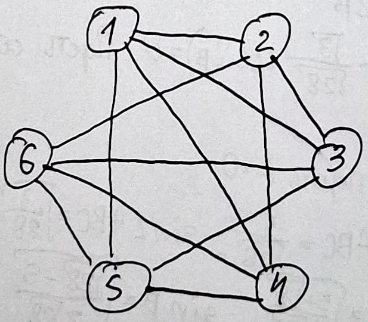


Задача 5









1: $1=1$

2: $1\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

3: $\left(\frac{2}{4}\right)^2\cdot 1+\left(\frac{2}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}+\left(\frac{2}{4}\right)^2\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{16}\left(4+\frac{3}{4}+\frac{2}{4}\right)=\frac{21}{64}$

4:

5: $\cancel{\log_2\left(\frac{1}{16}\right)}$

6:

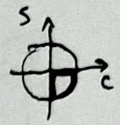
Чистовик

Задача 3

$\sqrt{\sqrt{\cos x}+2\sqrt{-3\sin x}} > 2\sqrt{\sqrt{\cos x}-\sqrt{-3\sin x}}$

ОДЗ:

$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x \leq 0 \\ \sqrt{\cos x}+2\sqrt{-3\sin x} \geq 0 \\ \sqrt{\cos x} \geq \sqrt{-3\sin x} \end{cases}$



$\sqrt{\cos x}=a\geq 0$, $\cancel{\sqrt{\sin x}=b\geq 0}$ $\sqrt{-3\sin x}=b\geq 0$

$\sqrt{a+2b} > 2\sqrt{a-b}$

$a+2b > 4a-4b$

$2b-a>0$

$2\sqrt{-3\sin x} > \sqrt{\cos x}$

$-12\sin x > \cos x$

$\frac{1}{\sqrt{145}}\cos x + \frac{12}{\sqrt{145}}\sin x < 0$, Пусть $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{145}}$, $\sin\varphi = \frac{12}{\sqrt{145}}$, $\varphi = \operatorname{arctg} 12$

$\cos(x-\varphi)<0$

$\frac{\pi}{2}+2\pi k < x-\varphi < \frac{3\pi}{2}+2\pi k$

$x\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k+\varphi;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k+\varphi\right)$

$ОДЗ_{12}$: $x\in\left[\frac{3\pi}{2}+2\pi k;\ 2\pi+2\pi k\right]$

$ОДЗ_4$: $\sqrt{\cos x}\geq\sqrt{-3\sin x}$

$\cos x + 3\sin x \geq 0$

$\frac{1}{\sqrt{10}}\cos x + \frac{3}{\sqrt{10}}\sin x \geq 0$, Пусть $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\gamma=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\gamma = \operatorname{arctg} 3$

$\cos(x-\gamma)\geq 0$

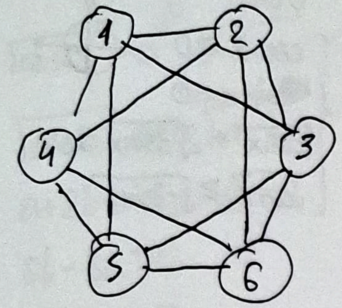
$-\frac{\pi}{2}+2\pi k \leq x-\gamma \leq \frac{\pi}{2}+2\pi k$

$x\in\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k+\gamma;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k+\gamma\right]$

Отв: $x\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k_1+\varphi;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k_1+\varphi\right)\cap\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k_2;\ 2\pi k_2\right]\cap\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k_3+\gamma;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k_3+\gamma\right]$

~~Чистовик~~ Черновик

Задача 5



Пусть перебегание жуков состояло из 6 ходов. На n-м ходу перебегал n-ный жук.

Посчитаем для каждого жука вероятность после перебежки оказаться в пустой грани или грани, жук в которой еще не ходил

1: $1=1$

2: $\left(\frac{2}{4}\right)\cdot 1+\left(\frac{2}{4}\right)\cdot\frac{3}{4}=\frac{7}{8}$

3: $\left(\frac{2}{4}\right)^2\cdot 1+\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\cdot\frac{3}{4}+\left(\frac{2}{4}\right)^2\cdot\frac{2}{4}=\frac{9}{16}$

4: $\left(\frac{2}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}+\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\cdot\frac{2}{4}+\left(\frac{2}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$

5:

A - счастливое число

$\overline{a9}+1 \Rightarrow \overline{(a+1)0}$

$a+9$ $\qquad$ $a+1$

$A=\overline{a_1a_2\ldots9}$

$B=\overline{b_1b_2\ldots0}$

Чистовик

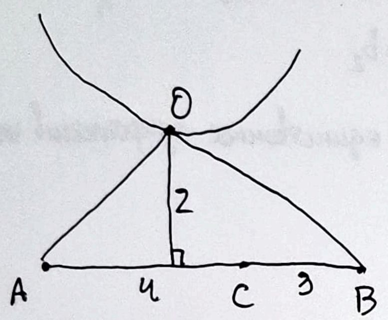
Задача 6

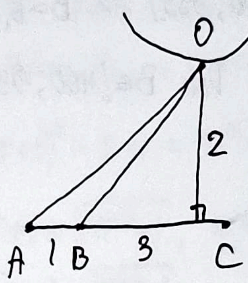
Не огр. общн. пусть парабола имеет вид $y=ax^2$

Для парабол такого вида известно, что ГМТ точек, из которых можно провести ортогональные касательные это прямая вида $y=y_0$, где y_0 = const

В нашем случае $y_0 = 2$

Есть два варианта картинки





Отв $S_{AOB} = 7$ или $S_{AOB} = 1$

Чистовик

Задача 7

Заметим, что счастливое число должно иметь четную сумму цифр.
(При разбиении $Ч=Ч \Rightarrow Ч+Ч=Ч$ или $H=H \Rightarrow H+H=Ч$)
Если при прибавлении 1 не происходит переноса разряда, сумма цифр меняет четность.
Следовательно суперсчастливое число имеет вид $A=\overline{a_1a_2\ldots 9}$
Посмотрим на счастливое число B, следующее за A. $B=\overline{b_1b_2\ldots 0}$
Рассмотрим $B\in[400;999] \Rightarrow B=\overline{b_1b_20} \Rightarrow b_1=b_2$

A	B
439	440
→ 549	550
659	660
769	770
879	880
989	990

$\Rightarrow$ Для $B\in[400;999]$, $A=549$ - единственное суперсчастлив. число

Рассмотрим $B\in[1000;1999] \Rightarrow B=\overline{1b_1b_20} \Rightarrow b_1=b_2\pm 1$

B	A
1010	1009
1210	1209
1230	1229
1430	1429
1450	1449 ←
1650	1649 ←
1670	1669
1870	1869
1890	1889
1100	1099
1120	1119
1320	1319
1340	1339
1540	1539 ←
1560	1559 ←
1760	1759
1780	1779
1980	1979

4 спсч числа

$B\in[2000;2401] \Rightarrow B=\overline{2b_1b_20}$
Заметим, что 2000 - не счастл. число $\Rightarrow A=\overline{2a_1a_29} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1+a_2=11 \\ a_1+a_2=7 \end{array}\right.$

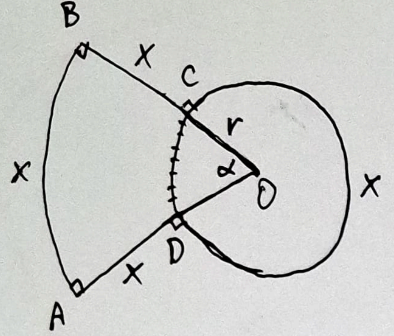
A	B
2079	2080
2169	2170
2259	2260
2349	2350 ←
2299	2300
2389	2390

1 спсч. число

Отв: 6 суперсчастливых чисел.

Чистовик

Задача 8



$$\begin{cases} x = 2\pi r \cdot \frac{2\pi - \alpha}{2\pi} \\ x = 2\pi(r+x) \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (2\pi - \alpha) r \\ x = (r+x)\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\pi r - \alpha r \\ x = \frac{r\alpha}{1-\alpha} \end{cases}$$

$$(2\pi - \alpha) \cdot r \cdot (1-\alpha) = r\alpha$$

$$\alpha = (2\pi - \alpha)(1-\alpha)$$

$$\alpha = 2\pi - 2\pi\alpha - \alpha + \alpha^2$$

$$\alpha^2 - 2(\pi+1)\alpha + 2\pi = 0$$

$$\frac{D}{4} = (\pi+1)^2 - 2\pi = \pi^2 + 1$$

$$\alpha = \pi + 1 \pm \sqrt{\pi^2+1}, \quad \alpha < 2\pi$$

$$\alpha = \pi + 1 - \sqrt{\pi^2+1}$$

Отв: $\alpha = \pi + 1 - \sqrt{\pi^2+1}$