0 392934 100001

39-29-34-10
(158.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7-8 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Разуваевой Анастасии Николаевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

39-29-34-10 (158.6)

65 (шестьдесят пять)

Чистовик

Задача № 1

Рассмотрим выигрышные позиции. Если осталось не более $\frac{10}{100}$ пирога, то можно доесть пирог, следовательно $\frac{10}{100}$ пирога выигрышная позиция. Позиция $\frac{11}{100}$ пирога проигрышная т.к. при любом съеденом куске от $\frac{1}{100}$ до $\frac{10}{100}$ мы попадаем в выигрышную ~~пози~~ позицию. Позиции от $\frac{12}{100}$ до $\frac{21}{100}$ выигрышные т.к. мы можем попасть в проигрышную позицию $\frac{11}{100}$ и т.д. Отсюда все проигрышные позиции это $\frac{11}{100}, \frac{22}{100}, \frac{33}{100}, \frac{44}{100}, \frac{55}{100}, \frac{66}{100}, \frac{77}{100}, \frac{88}{100}, \frac{99}{100}$ следовательно $\frac{100}{100}$ выигрышная и с нее начинает Аня.

Стратегия Ани: каждым своим ходом загонять Ваню на проигрышную позицию, Первым своим ходом она отрежет и съест $\frac{1}{100}$ пирога.

Выиграет Аня

Задача № 3.

Рассмотрим на какую цифру оканчивается степень числа 8:

$8^1 = 8$, $8^2 - 4$, $8^3 - 2$, $8^4 - 6$, $8^5 - 8$, $8^6 - 4$ ....

У нас возникла закономерность последних цифр степени числа 8: 8, 4, 2, 6

Рассмотрим число 2025^{2025}. $2025 \equiv_{\bmod 4} 0 \Rightarrow 2025^{2025} \equiv_{\bmod 4} 0$.

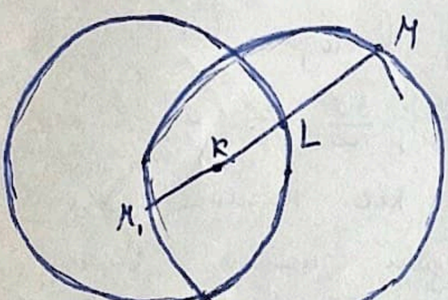
Из предыдущего рассуждения каждая 4 степень ~~числа~~ числа 8 оканчивается на одно и тоже число. 8^4 оканчивается на 6 $\Rightarrow 8^{2025^{2025}}$ оканчивается на 6.

Чистовик

Задача № 4

Раз коза стоит ровно посередине между двумя поливалками значит она находится в центре пересечения окружностей двух поливалок.

Раз коза может идти только прямо, то она попадет только в одну из окружностей (не считая их пересечения). Рассмотрим один из вариантов как могла пойти коза.



Пусть отрезок по которому идет коза пересекает одну окружность в точке L другую в точке M, тогда мы знаем что на отрезке KL трава гуще, а т.к. коза стоит в центре пересечения двух окружностей, то количество съеденой травы на участке KM будет эквивалентен если бы коза ела траву только на 1 окружности на отрезке M_1M (M_1 пересечение окружности и прямой KM) отсюда коза съест столько травы сколько встретит на хорде одной из окружностей. Самая большая хорда это диаметр ⇒ коза должна идти по диаметру одной из окружностей. Чтобы съесть как можно больше травы

39-29-34-10
(158.6)

Чистовик

Задача №2.

Суперсчастливое число будет хотя бы трёх значным т.к. Однозначным оно быть не может т.к. мы не сможем разбить все ~~числа~~ цифры на 2 группы. Двузначным оно быть не может т.к. в каждой группе будет по 1 ~~числу~~ цифре ⇒ все цифры числа одинаковы, а двух подряд двузначных чисел с одинаковыми цифрами не бывает.

Рассмотрим трёх значные числа, предположим что последняя цифра счастливого числа не 9 тогда у следующего числа т.е. при прибавлении 1 к счастливому числу перехода единицы в десятки не будет, следовательно сумма цифр 1 числа на 1 ~~больше~~ меньше второго, но раз все цифры можно разбить на 2 одинаковых группы ⇒ сумма цифр числа четна, но из 2 последовательных чисел одно точно нечетно ⇒ у суперсчастливого числа последняя цифра 9. Переберём такие числа у которых 9 последняя ~~109 с~~ цифра и они счастливы

189 - счастливое, 190 - не счастливое
279 - счастливое, 280 - не счастливое
369 - счастливое, 370 - не счастливое
459 - счастливое, 460 - не счастливое
549 - счастливое, 550 - счастливое

Отсюда наименьшее суперсчастливое число: 549

3 из 6

Чистовик

Задача 5.

Возьмем одну грань кубика и посмотрим какие жуки только могут попасть на эту грань

Жуки которые уже находятся на этой грани там остаться не могут т.к. они обязательно должны перебежать на другую грань. Жуки на противоположной грани не перебегут на выбранную грань т.к. она не соседняя. И того на каждую грань не могут попасть те жуки которые находятся на этой и противоположной гранях. Сумма на всех противоположных гранях равна 7, а на всем кубике 21 следовательно максимальное значение жуков на 1 ~~ребро~~ грани кубика равно 14.

Задача 7. (начало)

Пусть П - пальцы правой руки, Λ - пальцы левой руки

Возьмем правую руку и посмотрим куда можно положить пальцы левой руки. Перед и после всех пальцев правой руки можно положить все 5 пальцев и не нарушать условие, между пальцами можно положить не более 2 пальцев левой руки, от сюда у нас получается: _ _ _ _ _ П _ _ П _ _ П _ _ П _ _ П _ _ _ _ _

где "_" места куда можно положить пальцы левой руки значит всего способов C_{18}^{5}, но здесь не учтены запрещенные расстановки например ΛПППΛΛПΛΛП

Посчитаем их. Пусть между двумя правыми пальцами будет только 1 левый: ① ПΛПППП, ② ППΛППП ③ ПППΛПП и ④ ППППΛП. остальные будут перед и после них

У 1 и 2. случая с переди может быть не больше 3 пальцев иначе может получится правильная расстановка ΛΛΛΛПΛПППП

4 из 6

39-29-34-10 (158.6)

Чистовик.

Задача 7 (Продолжение)

После всех пальцев в 1 и 2 случаях может быть 4 пальца следовательно у них по C_7^4 запрещенных растановок. _ _ _ П ∧ ПППП _ _ _ _

В 3 и 4 случае спереди ~~после~~ всех пальцев может быть 4 пальца, а после 3 по той же причине, отсюда у них по C_7^4 запрещенных растановок.

_ _ _ _ ППП ∧ ПП _ _ _

Рассмотрим когда между двумя пальцами правой руки может стоять 2 левых это: П ∧ ППП ∧ П

Других нет т.к. другой случай либо разобран либо разрешён. Спереди и после этих пальцев может быть по 3 левых пальца т.е. всего таких растановок

C_6^3 : _ _ _ П ∧ ППП ∧ П _ _ _

Отсюда мы получаем что разрешенных растановок было $\dfrac{C_{18}^5 - 4 \cdot C_7^4 - C_6^3}{5!}$ делим на 5! т.к. пальцы считаются идентичные.

5 из 6

Чистовик

Задача 6.

Предположим, что каждую задачу решили меньше половины людей т.е. каждую задачу решило не более 9 человек, а в сумме учениками решено не более 9000 задач. Значит каждый ученик решил не более $\frac{9000}{20} = 45$ задач. Пусть $n = 45$ тогда. Т.к. Петя решил больше чем Вася он решил хотябы 46 задач. А в сумме хотябы 901 задача решено всего (всеми детьми). По принципу Дирихле хотябы 1 задачу решило 10 человек т.к. $9 \cdot 100 < 901$ следовательно нашлась такая задача, которую решили больше половины. Меньше быть не могло т.к. $44 \cdot 20 + 1 < 900$ значит такого быть не могло. Отсюда наименьшее $n = 45$.

6 из 6

39-29-34-10
(158.6)

Черновик.

всего 20000.

Решено Д 20п..

П∧ПППП. П∧ППП∧П

ПП∧ППП

ППП∧ПП ~~ППП~~ П∧∧ППП∧

ПППП∧П

00

20000
9000

1из2

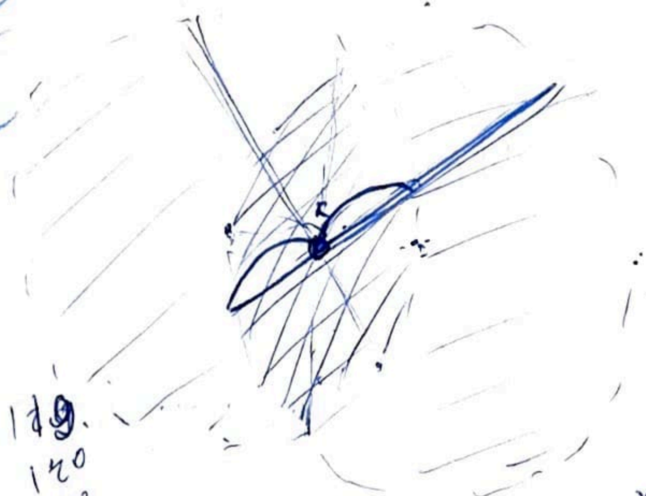
№3. Черновик

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

8 6 ... 2 ... 6 3 4 2 6 8.

$2025 \equiv_{\text{mod } 4} 0 \Rightarrow 2025^{2025} \equiv_{\text{mod } 4} 0$ оканч. на 6.

№4.



n=n+1

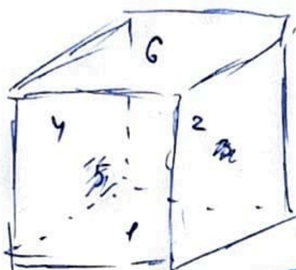
110 119

110 120

22

129

№5.



21

xyz

189

190 209

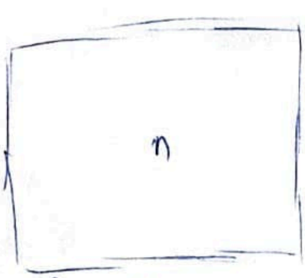
199

П П П П П

2 мест 5 мест

279 369

280 370



~~Аня~~ от $\frac{n}{10}$ до $\frac{n}{100}$

Валя от $\frac{n-k}{10}$ до $\frac{n-k}{100}$

459 549

460 550

22

$\le \frac{10}{100}$, $\frac{11}{100}$, от $\frac{12}{100}$ до $\frac{21}{100}$, $\frac{22}{100}$

В поз. П. В

2 из 2