0 330623 190001

33-06-23-19
(161.22)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Рашевой Анны Михайловны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+2 листа

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
33-06-23-19		+	+	+	+	+	0	—	0
	60	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12	0	—	0

Мохненко И.Ю. ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

33-06-23-19 (161.22)

75 (семьдесят пять)

Черновик

$4x^2+12x+9 \geq 0$ $\quad (2x+3)^2$

$9x^2+12y+4 \geq 0$

$-(x+1) \geq 0 \quad x+1 \leq 0 \quad x \leq -1$

$|2x+3| + |3x+2| - (-(x+1)) =$

$= |2x+3| + |3x+2| + x+1 = \sqrt{7+\sqrt{24}} - \sqrt{7-\sqrt{24}}$

$-1{,}5 \quad -1 \quad -\frac{2}{3} \quad x$

$x < -1{,}5 : -2x-3-3x-2+x+1 = \sqrt{\ } - \sqrt{\ }$

$-4x-4 = \sqrt{\ } - \sqrt{\ }$

$49-24=25$

$(-4x-4)^2 = 24$

$\left(\sqrt{7+\sqrt{24}} - \sqrt{7-\sqrt{24}}\right)^2 = 7+\sqrt{24}+7-\sqrt{24}+2\sqrt{25} =$

$= 14+10 = 24$

(1) $-4x-4 = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$x = \frac{2\sqrt{6}+4}{-4} = \frac{\sqrt{6}+2}{-2} \overset{?}{\leq} -1{,}5$

$\sqrt{6}+2 \geq 3$ ✓

(2) $-4x-4 = -2\sqrt{6}$

$4x+4 = 2\sqrt{6}$

$x = \frac{2\sqrt{6}-4}{4} = \frac{\sqrt{6}-2}{2} \rightarrow \varnothing$

$-1{,}5 \leq x \leq -1$: $2x+3-3x-2+x+1 = \sqrt{\ } - \sqrt{\ }$

$2 = \sqrt{\ } - \sqrt{\ } \quad \varnothing$

Чистовик

№ 1

Заметим, что

$$\sqrt{7+\sqrt{24}} - \sqrt{7-\sqrt{24}} = 2$$

Докажем: $\left(\sqrt{7+\sqrt{24}} - \sqrt{7-\sqrt{24}}\right)^2 = 7+\sqrt{24}+7-\sqrt{24} -$

$-2\sqrt{49-24} = 14-10=4$

$\Downarrow$

$$\left(\sqrt{7+\sqrt{24}} - \sqrt{7-\sqrt{24}}\right)^2 = 4$$

$$\left|\sqrt{7+\sqrt{24}} - \sqrt{7-\sqrt{24}}\right| = 2$$

Т.к. $7+\sqrt{24} > 7-\sqrt{24} \Rightarrow \sqrt{7+\sqrt{24}} - \sqrt{7-\sqrt{24}} = 2$.

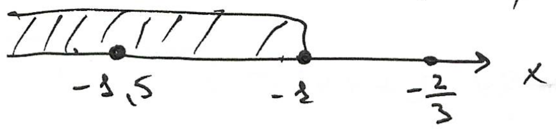
ч.т.д.

Заметим, $4x^2+12x+9 = (2x+3)^2$
$9x^2+12x+4 = (3x+2)^2$ | т.к. это квадраты, то всегда ≥ 0. Значит под корнем неотр. зн.

Также $-(x+1)\geq 0$, т.к. под корнем
$x+1 \leq 0 \Rightarrow x \leq -1$
$\left(\sqrt{-(x+1)}\right)^2 = -(x+1)$

Тогда исходное выражение можно записать:

$|2x+3| + |3x+2| + (x+1) = 2$



1) $x \leq -1,5 \Rightarrow -2x-3-3x-2+x+1=2$
$-4x-4=2$
$-4x=6 \Rightarrow x=-\frac{6}{4}$; $x=-1,5$

2) $-1,5 < x \leq -1 \Rightarrow 2x+3-3x-2+x+1=2$
$2=2 \Rightarrow$ подходят все $x\in(-1,5;-1]$

Ответ: $x\in[-1,5;-1]$

33-06-23-19
(161.22)

Черновик

$5^{3-\frac{1}{x}} \geqslant a+\sin 3^x$

a - полож.

Заметим, что $5^{3-\frac{1}{x}} > 0$. Можно найти такое x, чтобы $\sin 3^x = -1$

$\sin b = -1 \Rightarrow b = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

Пусть $3^x = \frac{3\pi}{2}$

$x = \log_3 \frac{3\pi}{2}$; $x > 0$, т.к. $3 > 1$
$\frac{3\pi}{2} > 1$

$5^{3-\frac{1}{x}} \geqslant a+\sin 3^x$

Значит $\left(3-\frac{1}{x}\right)' = \left(3-x^{-1}\right)' = 3+\frac{1}{x^2} = 0$

на полож. возраст.

$x=1: \ 3-\frac{1}{x} = 2$

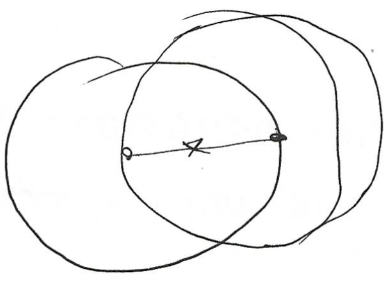
$x=2: \ 3-\frac{1}{2} = 2{,}5$

$a=125$

$5^{3-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 5^3 = 125$

$\exists x: \ \sin 3^x = -1$

$5^{3-\frac{1}{x}} > 124$



Чистовик

№7

Заметим, что $\sin 3^x = -1$. Имеет бесконечно много решений, т.к. тогда $3^x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = \log_3\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$. Т.к. $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k > 1$ $(k \in \mathbb{N})$ и $3 > 1$ $\Rightarrow x > 0$

При этом x может быть сколь угодно большим. Пусть нет, тогда x всегда будет огранич. сверху C. $x < C$.

Тогда возьмем $k = 3^{[C]+1}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = \log_3\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot 3^{[C]+1}\right) > \log_3\left(2\pi \cdot 3^{[C]+1}\right) >$

$> [C] + 1$ $\Rightarrow$ Противоречие.

~~Пусть $a < 126$. Тогда мы сможем подобрать такое x, чтобы $5^{3-\frac{1}{x}}$~~

~~Пусть $a < 126$. Тогда: $126 + \sin 3^x > a + \sin 3^x$~~

~~Т.к. $\min(\sin 3^x) = -1$ $\Rightarrow$ $125 \geq 126 + \sin 3^x > a + \sin 3^x$~~

~~Пусть~~

$\min(a + \sin 3^x) = a - 1$. Если $a < 126 \Rightarrow a - 1 < 125$

Мы можем подобрать такое значение x, чтобы $5^{3-\frac{1}{x}} > a - 1$. Т.к. $a - 1 < 125$. Пусть $126 - a = \varepsilon > 0$

Докажем, что $\exists x$: $125 - \varepsilon < 5^{3-\frac{1}{x}}$

$\Updownarrow$

$125 - 5^{3-\frac{1}{x}} < \varepsilon$

~~$\lim\limits_{x\to\infty}\left(5^{3-\frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}$~~ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5^{3-\frac{1}{x}}\right) = 5^{3-0} = 125$, т.к. $x \to \infty$

Чистовик

№2 (прод.)

Значит, по опред. предела: $\forall \varepsilon > 0 ; \exists N : \forall x > N :$
$|125 - 5^{3-\frac{1}{x}}| < \varepsilon$

При этом мы сможем выбрать такое $x : \sin 3^x = -1$, т.к. таких x много и они любые.

Т.к. $x > 0 \Rightarrow 125 - 5^{3-\frac{1}{x}} < \varepsilon \Rightarrow$ ч.т.д.

А значит $a \geq 126$. При $a = 126$:

$$5^{3-\frac{1}{x}} \geq 126 + \sin 3^x$$

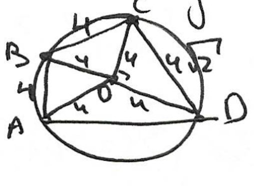
Подходит, т.к. $\min(126 + \sin 3^x) = 125$, но $5^{3-\frac{1}{x}} < 125$, т.к. $x > 0$. А значит не имеет ни одного реш.

Ответ: $a = 126$.

№3.

т.к. четырехуг. вписанный $\Rightarrow$ выпуклый.

① Пусть стороны с длиной 4 соседние:



$AB = BC = 4$.

БОО: $CD = 4\sqrt{2}$

Т.к. $R = 4 \Rightarrow OA = OB = OC = OD = 4$

Тогда $\triangle OBA$ и $\triangle OCB$ равностор. (все стороны по 4)

$\Rightarrow S_{\triangle OBA} + S_{\triangle OBC} = \frac{4 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ}{2} \cdot 2 = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

$\triangle OCD$ - прямоуг., по обр. т. Пифагора: $CO^2 + OD^2 = CD^2 \Rightarrow$
$16 + 16 = 32$

$\Rightarrow S_{\triangle OCD} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$

Тогда $\angle AOD = 360^\circ - 120^\circ - 90^\circ = 240^\circ - 90^\circ = 150^\circ \Rightarrow S_{\triangle AOD} = \frac{4 \cdot 4 \cdot \sin 150^\circ}{2} =$
$= 4 \Rightarrow S_1 = 8\sqrt{3} + 8 + 4 = 12 + 8\sqrt{3}$

② Пусть стороны с длиной 4 не соседние $\Rightarrow$ противол.

$AB = CD = 4$. БОО $BC = 4\sqrt{2}$. $OA = OB = OC = OD = 4$.

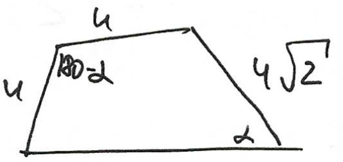
Тогда $\triangle OBA$ и $\triangle OCD$ - равност., $\triangle OBC$ - прямоуг., $\angle AOD = 150^\circ$. Аналогично пункту ① $\Rightarrow$

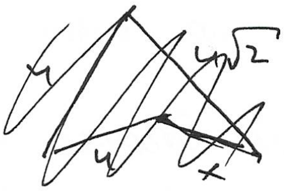
$\Rightarrow S_2 = 12 + 8\sqrt{3}$. $\Rightarrow S_{max} = 12 + 8\sqrt{3}$

Ответ: $12 + 8\sqrt{3}$

Черновик.

выпукл., т.к. вписан.

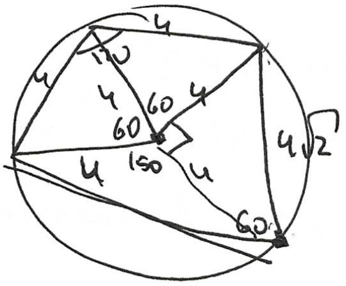




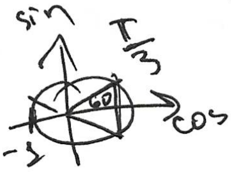
$R=4$

$360-90-120=240-90=150$

①



$S_1 = 4\cdot4\cdot\sin60^\circ + \frac{4\cdot4}{2} + \frac{+4\cdot4\cdot\sin150^\circ}{2} =$

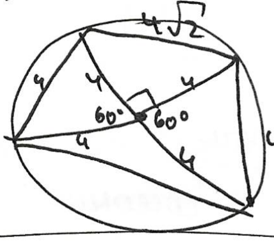


$=16\cdot\frac{\sqrt3}{2}+8+8\cdot\frac12=8\sqrt3+8+4=$

$=8\sqrt3+12$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

②



Та же самая S

$\pi+\frac{\pi}{3}=$

$(a+b-c)^3=(a+b-c)^2(a+b-c)=(a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc)(a+b-c)=$

$=a^3+a^2b-a^2c+b^2a+b^3-b^2c+c^2a+c^2b-c^3+2a^2b+2ab^2-2abc-2a^2c-$
$-2abc+2ac^2-2abc-2b^2c+2bc^2=a^3+b^3-c^3+3a^2b-3a^2c+3ab^2-$
$-3b^2c+3c^2a+3c^2b-6abc$

$\cos(2a)=\cos^2a-\sin^2a=2\cos^2a-1$

$\cos(4\pi x)=2\cos^2(2\pi x)-1$

$1+\cos^2a$

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac12$

$\cos x+$ $\frac85-1$ $\frac{3}{10}<\frac25$

$15<20$

$\cos\frac83\pi=$

$\cos\frac23\pi=\cos120^\circ$

$\frac{16}{3}\pi$

$\frac43\pi$

$a^2b-a^2c+ab^2-b^2c+c^2a+c^2b-2abc=0$

$ab(a+b)+c^2(a+b)=c(a^2+b^2+2ab)$

$(a+b)(ab+c^2)=c(a+b)^2$

$(a+b)(c^2+ab-c(a+b))=0$

$(a+b)(c^2+ab-ca-cb)=0$

$(a+b)((c-a)(c-b))=0$

Чистовик

№4

Пусть $\cos(\pi x)=a$; $\cos(2\pi x)=b$; $\cos(4\pi x)=c$.

$(a+b-c)^3=a^3+b^3-c^3+3a^2b-3a^2c+3ab^2-3b^2c+3c^2a+$
$+3c^2b-6abc$

Тогда $a^3+b^3-c^3=a^3+b^3-c^3+3(a^2b-a^2c+ab^2-b^2c+c^2a+$
$+c^2b-2abc)$

$\Updownarrow$

$a^2b-a^2c+ab^2-cb^2+c^2a+c^2b-2abc=0$

$ab(a+b)+c^2(a+b)=c(a^2+b^2+2ab)$

$(a+b)(ab+c^2)=c(a+b)^2$

$(a+b)(ab+c^2-ca-cb)=0$

$(a+b)(c-a)(c-b)=0$

1) $a+b=0 \Rightarrow \cos(\pi x)+\cos(2\pi x)=0$

$\cos\pi x+2\cos^2\pi x-1=0$. $a=\cos\pi x$

$2a^2+a-1=0$. ~~$D=1+8=9$~~

~~$\frac{-1\pm3}{4}$~~

$(2a-1)(a+1)=0$

$2\cos(\pi x)=1$

$\cos(\pi x)=\frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l}\pi x=\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\\ \pi x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}+2k, k\in\mathbb{Z}\\ x=-\frac{1}{3}+2k, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

$x\in[0{,}3;1{,}6] \Rightarrow$ $x=\frac{1}{3}$

$2\cos(\pi x)=-1$

$\pi x=\pi+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$x=1+2k, k\in\mathbb{Z}$

$x\in[0{,}3;1{,}6] \Rightarrow x=1$

Чистовик

№4 (прод.)

② $c-a=0 \Rightarrow \cos(4\pi x)-\cos(\pi x)=0$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-4\pi x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi x\right)=0$

$2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-4\pi x-\frac{\pi}{2}+\pi x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-4\pi x+\frac{\pi}{2}-\pi x}{2}=0$

$2\sin\frac{-3\pi x}{2}\cos\frac{\pi-5\pi x}{2}=0$

$\sin\frac{-3\pi x}{2}=0$

$\frac{-3\pi x}{2}=\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$-3x=2k, k\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{-2k}{3}, k\in\mathbb{Z}$

$x\in[0{,}3;1{,}6]\Rightarrow x\in\left\{\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right\}$

$\cos\frac{\pi-5\pi x}{2}=0$

$\sin\frac{5}{2}\pi x=0$

$\frac{5\pi}{2}x=\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$5x=2k, k\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{2k}{5}, k\in\mathbb{Z}$

$x\in[0{,}3;1{,}6]\Rightarrow x\in\left\{\frac{2}{5};\frac{4}{5};\frac{6}{5};\frac{8}{5}\right\}$

③ $c-b=0 \Rightarrow \cos(4\pi x)-\cos(2\pi x)=0$

$2\cos^2(2\pi x)-\cos(2\pi x)-1=0$

$(2\cos(2\pi x)+1)(\cos(2\pi x)-1)=0$

$\cos(2\pi x)=-\frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l}2\pi x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\\ 2\pi x=\frac{4\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}+k, k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{2}{3}+k, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

$x\in[0{,}3;1{,}6]\Rightarrow x\in\left\{\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right\}$

$\cos(2\pi x)=1$

$2\pi x=2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$x=k, k\in\mathbb{Z}$

~~$x\in\{\mathbb{Z}\}$~~

$x\in[0{,}3;1{,}6]\Rightarrow x=1$

Ответ: $x\in\left\{\frac{1}{3};\frac{2}{5};\frac{2}{3};\frac{4}{5};1;\frac{6}{5};\frac{4}{3};\frac{8}{5}\right\}$

Черновик

Т.к. $\forall x \Rightarrow f_1 = f_2 = f_3$

$f_1(0) = f_2(0) = f_3(0)$

$\quad \shortparallel \qquad \shortparallel \qquad \shortparallel$

$a_1 \cdot 12 \quad a_2 \cdot 15 \quad 20a_3$

$f_1(1) = (a_1+1)(1+b_1+12)$

$\shortparallel$

$f_2(1) = (a_2+1)(1+b_2+15) =$

$= (\frac{12}{15}a_1+1)(1+b$

$f_1(x) \to$ при x^2 $b_1 + a_1$ | при x $12 + a_1 b_1$ | своб: $12a_1$

$f_2(x) \to b_2 + a_2$ | $15 + a_2 b_2$ | $15a_2$

$f_3(x) \to b_3 + a_3$ | $20 + a_3 b_3$ | $20a_3$

$a_1 = \frac{20}{12}a_3$

$a_2 = \frac{20}{15}a_3$

$\cancel{a_2 = \frac{12}{15}a_1}$

$a_1 + b_1 = a_3 + b_3$

$\frac{20}{12}a_3 + b_1 = a_3 + b_3$

$\frac{8}{12}a_3 = b_3 - b_1$

$a_2 + b_2 = a_3 + b_3$

$\frac{20}{15}a_3 + b_2 = a_3 + b_3$

$; \ \frac{5}{15}a_3 = b_3 - b_2$

$b_2 + a_2 = b_1 + a_1 \Rightarrow b_2 - b_1 = a_1 - a_2 = \frac{20}{12}a_3 - \frac{20}{15}a_3$

$\shortparallel$

$\frac{5}{3}a_3 - \frac{4}{3}a_3$

$\shortparallel$

$\frac{1}{3}a_3$

$b_3 = \frac{8}{12}a_3 + b_1$

$12 + a_1 b_1 = 20 + a_3 b_3$

$12 + \frac{20}{12}a_3 b_1 = 20 + a_3 b_3$

$\begin{array}{r} 19 \\ +17 \\ \hline 36 \end{array}$

$\Rightarrow a_3(\frac{20}{12}b_1 - b_3) = 8$

$a_3(\frac{20}{12}b_1 - \frac{8}{12}a_3 - b_1) = 8$

$a_3(\frac{8}{12}b_1 - \frac{8}{12}a_3) = 8$

$a_3(\frac{b_1 - a_3}{12}) = 1$

$a_3(b_1 - a_3) = 12$

$a_3 b_1 - a_3^2 = 12$

$35+12$

$\shortparallel$

47

$32+15=47$

$27+20=47$

$\cancel{12 + a_1 b_1 \to}$

$15 + a_2 b_2 = 20 + a_3 b_3$

$15 + \frac{20}{15}a_3 b_2 = 20 + a_3 b_3$

$a_3(\frac{20}{15}b_2 - b_3) = 5$

$a_3(\frac{20}{15}b_2 - \frac{5}{15}a_3 - b_2) = 5$

$a_3(\frac{5}{15}b_2 - \frac{5}{15}a_3) = 5$

$a_3(b_2 - a_3) = 15$

$a_3 b_2 - a_3^2 = 15$

$a_3 b_2 - a_3 b_1 = 3$

$a_3(b_2 - b_1) = 3 \Rightarrow a_3 \cdot \frac{1}{3}a_3 = a_3$

Чистовик

№5

f_1, f_2 и f_3 - привед. многочл 3 степени, а т.к. их знач. совпадают в ≥ 4 точках $\Rightarrow f_1 = f_2 = f_3$

Коэф. при x^2: $f_1 \to a_1 + b_1$

$f_2 \to a_2 + b_2 \Rightarrow a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3$

$f_3 \to a_3 + b_3$

Коэф. при x: f_1: $12 + a_1 b_1$

f_2: $15 + a_2 b_2 \Rightarrow 12 + a_1 b_1 = 15 + a_2 b_2 = 20 + a_3 b_3$

f_3: $20 + a_3 b_3$

~~Коэф при~~ Свобордн. коэф: f_1: $12a_1$

f_2: $15a_2 \Rightarrow 12a_1 = 15a_2 = 20a_3$

f_3: $20a_3$

$a_1 = \frac{20}{12} a_3 = \frac{5}{3} a_3$; $a_2 = \frac{20}{15} a_3 = \frac{4}{3} a_3$

① $a_1 + b_1 = a_3 + b_3$; $a_2 + b_2 = a_3 + b_3$

$\Downarrow$

$b_3 = b_1 + \frac{2}{3} a_3$ $\qquad$ $b_3 = b_2 + \frac{1}{3} a_3$

② $12 + a_1 b_1 = 20 + a_3 b_3$

$12 + \frac{5}{3} a_3 b_1 = 20 + a_3 b_3$

$a_3 (\frac{5}{3} b_1 - b_3) = 8$

$a_3 (\frac{5}{3} b_1 - b_1 - \frac{2}{3} a_3) = 8$

$a_3 (\frac{2}{3} b_1 - \frac{2}{3} a_3) = 8$

$a_3 (b_1 - a_3) = 12$

$15 + a_2 b_2 = 20 + a_3 b_3$

$15 + \frac{4}{3} a_3 b_2 = 20 + a_3 b_3$

$a_3 (\frac{4}{3} b_2 - b_3) = 5$

$a_3 (\frac{4}{3} b_2 - b_2 - \frac{1}{3} a_3) = 5$

$a_3 (\frac{1}{3} b_2 - \frac{1}{3} a_3) = 5$

$a_3 (b_2 - a_3) = 15$

$(-)$

$\Downarrow$

$a_3 (b_2 - b_1) = 15 - 12 = 3$

Чистовик

№5 (прод.)

$b_2 - b_1 = a_1 - a_2 = \frac{5}{3}a_3 - \frac{4}{3}a_3 = \frac{1}{3}a_3 \Rightarrow a_3 \cdot \frac{1}{3}a_3 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $a_3 > 0 \Rightarrow a_3^2 = 9 \Rightarrow a_3 = 3$.

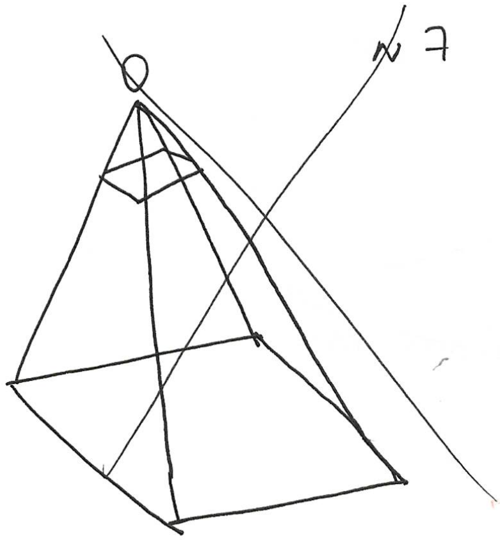
Тогда $a_1 = 5$; $a_2 = 4$; $b_1 = \frac{12 + a_3^2}{a_3} = 7$;

$b_2 = \frac{15 + a_3^2}{a_3} = 8$; $b_3 = 9$

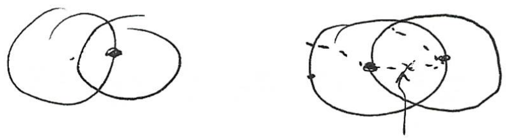
$a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 = 5 + 4 + 3 + 7 + 8 + 9 = 36$

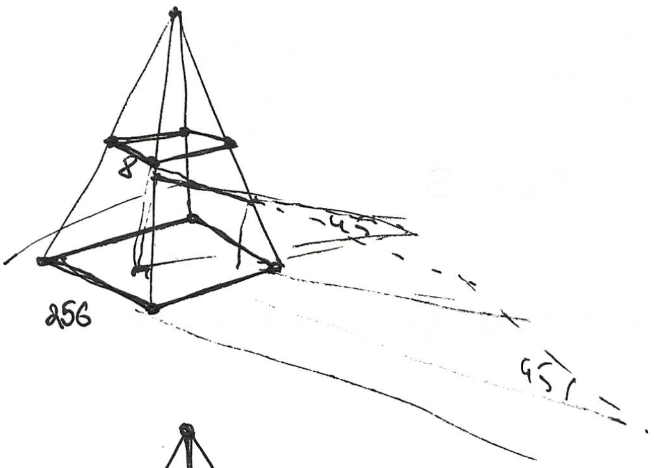
Ответ: 36

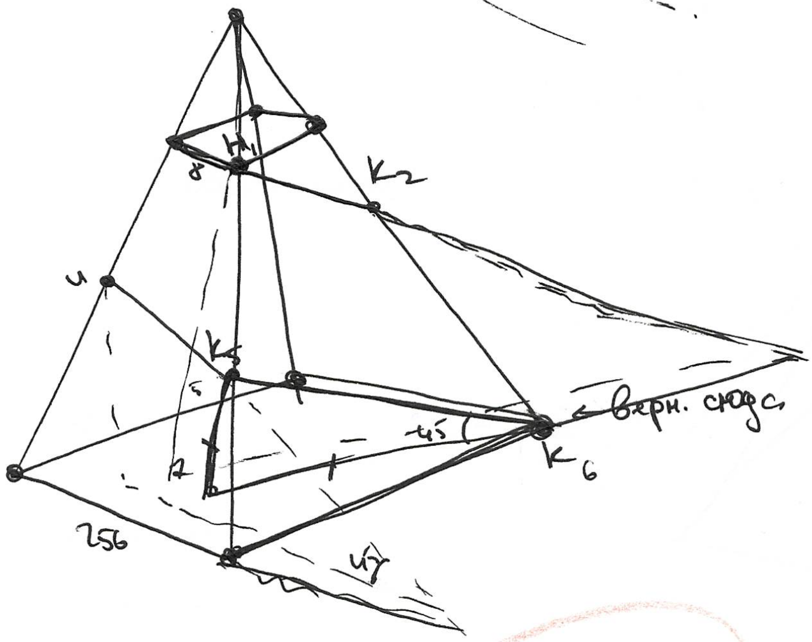
№7



Черновик

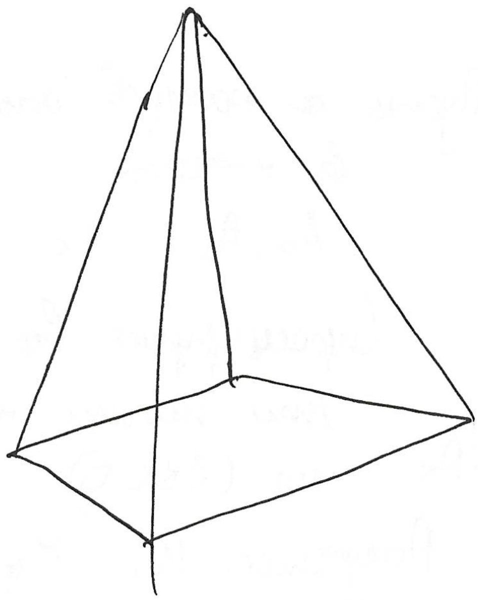


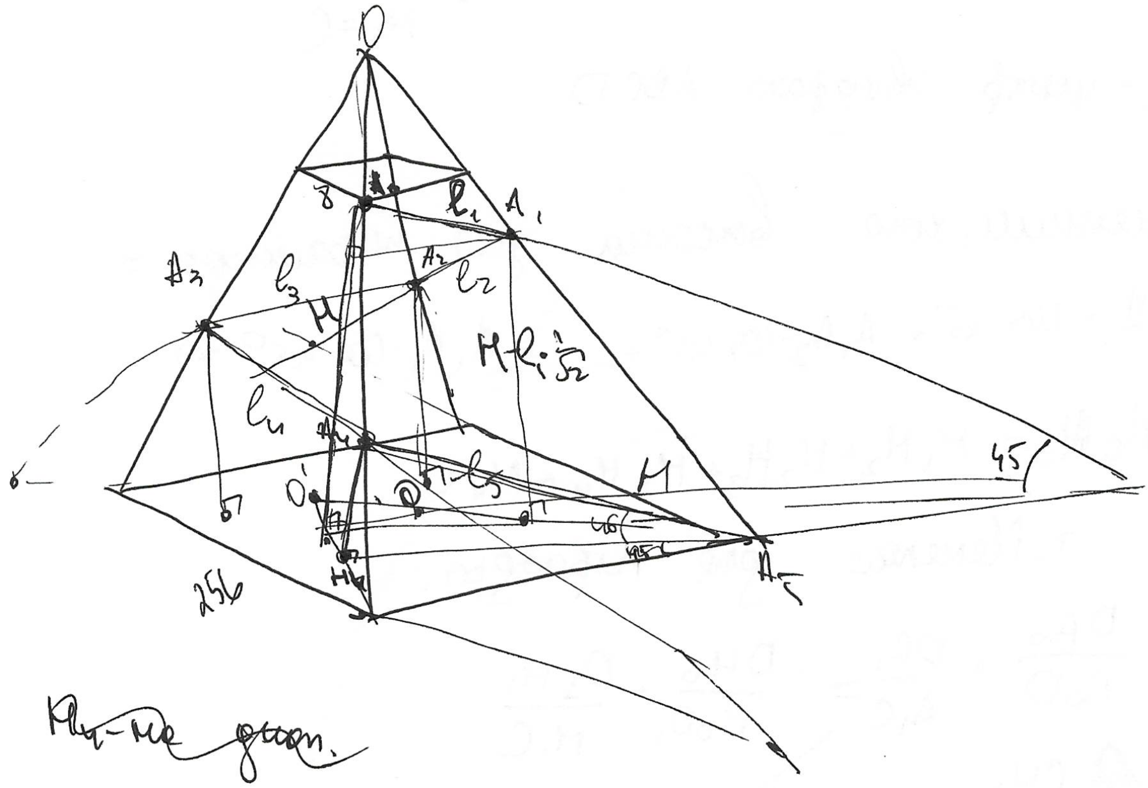




33-06-23-19
(161.22)

Черновик



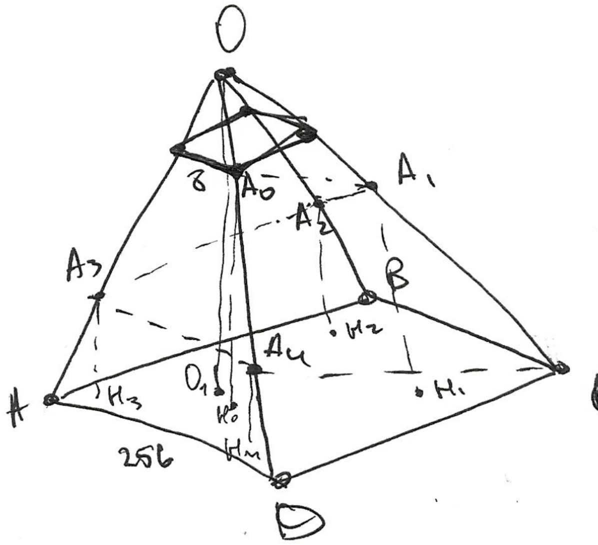


Кол-во диаг.

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}(l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5)$$

Чистовик

№7



Пусть он поседов был в точках $A_0, A_1 \dots A_5$

Спроецируем все эти точки и O на (ABCD)

Получим: $H_0, \dots H_4, O_1$

$H_5 = C$

O_1 - центр квадрата ABCD

Заметим, что высота усеч. пирамиды =

$A_0A_1 \cdot \cos 45^\circ + A_1A_2 \cdot \cos 45^\circ + \dots + A_4A_5 \cdot \cos 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow A_0H_0 = H_1H_2 + H_2H_3 + H_3H_4 + H_4C$

По т. Менелая для тетраэдра:

$$\frac{DA_0}{A_0O} \cdot \frac{OA_1}{A_1C} = \frac{DH_0}{H_0O_1} \cdot \frac{O_1H_1}{H_1C}$$

$$\frac{CH_1}{H_1O_1} \cdot \frac{O_1H_2}{H_2B} = \frac{CA_1}{A_1D} \cdot \frac{OA_2}{A_2B}$$

$$\frac{BA_2}{A_2O} \cdot \frac{OA_3}{A_3A} = \frac{BH_2}{H_2O_1} \cdot \frac{O_1H_3}{H_3A}$$

$$\frac{AA_3}{A_3O} \cdot \frac{OA_4}{A_4D} = \frac{AH_3}{H_3O_1} \cdot \frac{O_1H_4}{H_4D}$$

Перемножаем: по стрелкам левая часть

$$\frac{DA_0}{A_0D} \cdot \frac{OA_4}{A_4D} = \frac{DH_0}{H_0O_1} \cdot \frac{O_1H_4}{H_4D}$$