0 384148 480000

38-41-48-48
(159.4)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9 класс

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Редькина Кирилла Владимировича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход 13:34 – 13:37

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Редк

38-41-48-48 (1591)

Черновик

№2

$x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13$

$x^3 - |(x-2)(x+1)| = 12x - 13$

1) $x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 2)$

$x^3 + x^2 - x - 2 = 12x - 13$

$x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0$

$(x-1)(x^2+2x-11) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 + 2x - 11 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 - 2\sqrt{3} \\ x = -1 + 2\sqrt{3} \end{array}\right.$

$D = 4 + 44 = 48$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{3}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{3}$

2) $x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

$x^3 - x^2 + x + 2 = 12x - 13$

$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$

$(x-3)(x^2+2x-5) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x^2 + 2x - 5 = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 - \sqrt{6} \\ x = -1 + \sqrt{6} \end{array}\right.$

$D = 4 + 20 = 24$

$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -1 \pm \sqrt{6}$

$x = 1$

$x = 3$

$x = -1 - \sqrt{6}$

1: 1-45
2: 2-45
3: 3-46
4: 4-47
5: 5-48
6: 6-49
7: 7-50
8: 8-51
9: 9-52
10: 46-89
11: 47-90
12: 48-91
13: 49-92
14: 50-93
15: 51-94
16: 52-95
17: 46-89
18: 66-9

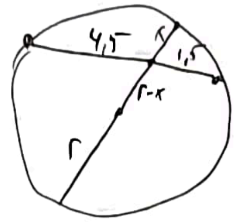
1: 1-44
2: 2-45
3: 3-46
4: 4-47
5: 5-48
6: 49-92
7: 50-93
8: 51-94
9: 52-95
10: 53-96
11: 97-40
12: 98-41
13: 99-42
14: 100-43
15: 44-87
16: 45-88
17: 46-89
18: 47-90
19: 48-91

7.5 (семь целых пять)

Лист 1

Черновик

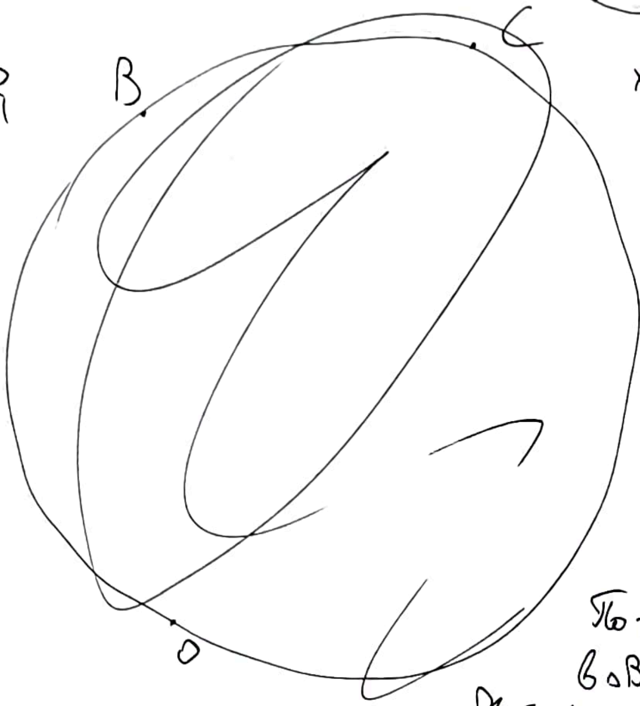
~4



$BC=6$

$\frac{AB}{AC}=\frac{3}{7}$

$\angle BAC=60^\circ$



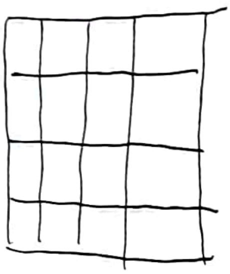
$x(2r-x)=\frac{27}{4}$

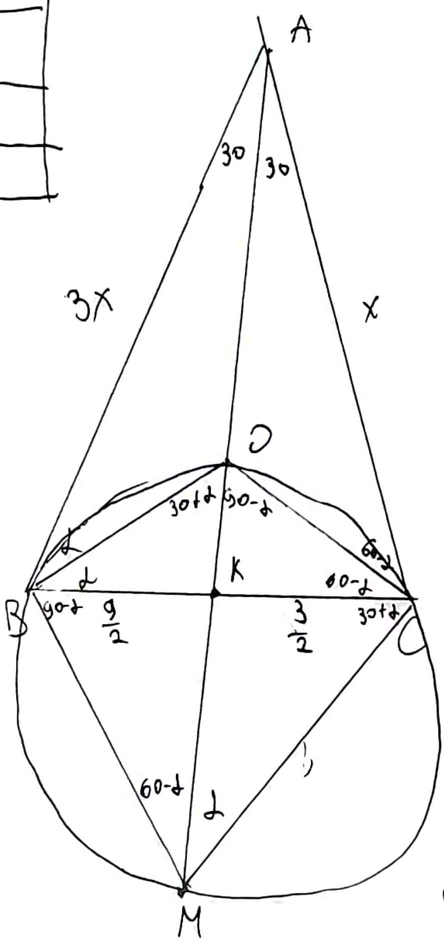
OM-?

По т. син.
в $\triangle BOC$:

$\frac{6\sqrt{3}}{\sin 120}=2R_{BOC}$

$R_{BOC}=\frac{6}{\sqrt{3}}$





$ab\geqslant 13$

$a\leqslant 3$

$b\leqslant 4$

$276\,|\,4$

$4\cdot 4^4$

~~1-8~~ ~~1-9~~; ~~23-56~~

~~10-18~~; ~~57-100~~

~~1-8; 23-56~~

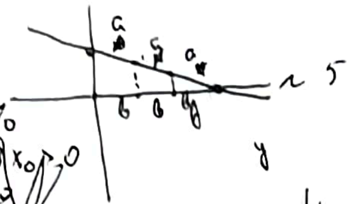
~~9-16; 57-100~~

~~1-22~~

Лист 2

38-41-48-48 (159.4)

черновик

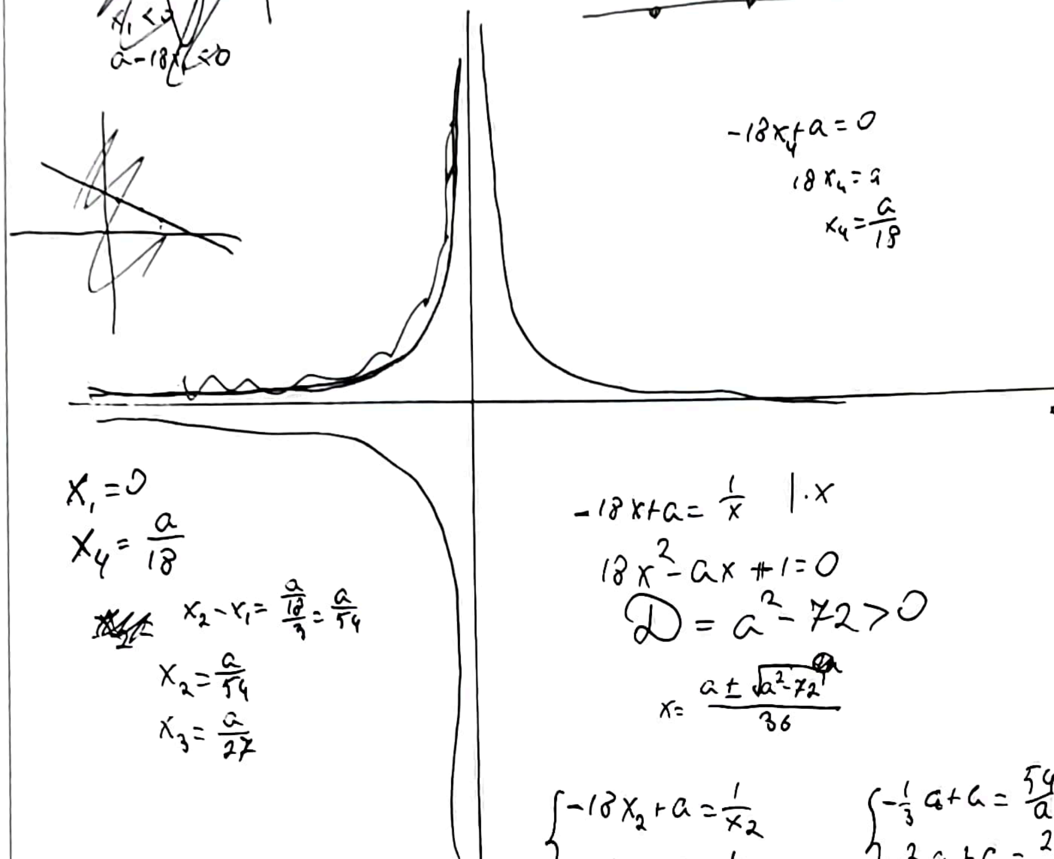


$x_0 > 0$

$a - 18x_0 > 0$

$x_1 < 0$

$a - 18x_1 < 0$



$-18x_4 + a = 0$

$18x_4 = a$

$x_4 = \frac{a}{18}$

$x_1 = 0$

$x_4 = \frac{a}{18}$

$x_2 - x_1 = \frac{\frac{a}{18}}{3} = \frac{a}{54}$

$x_2 = \frac{a}{54}$

$x_3 = \frac{a}{27}$

$-18x + a = \frac{1}{x} \quad | \cdot x$

$18x^2 - ax + 1 = 0$

$D = a^2 - 72 > 0$

$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 72}}{36}$

$\begin{cases} -18x_2 + a = \frac{1}{x_2} \\ -18x_3 + a = \frac{1}{x_3} \end{cases}$

$\begin{cases} -\frac{1}{3}a + a = \frac{54}{a} \\ -\frac{2}{3}a + a = \frac{27}{a} \end{cases}$

$\frac{x}{2} R_1 = \frac{y}{2} R_2$

$x r_1 = y r_2$

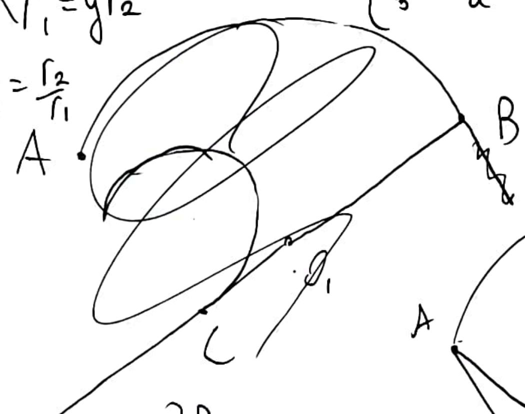
$\frac{x}{y} = \frac{r_2}{r_1}$

$\begin{cases} \frac{2}{3}a = \frac{54}{a} \\ \frac{1}{3}a = \frac{27}{a} \end{cases}$

$a = \frac{81}{a} \quad | \cdot a$

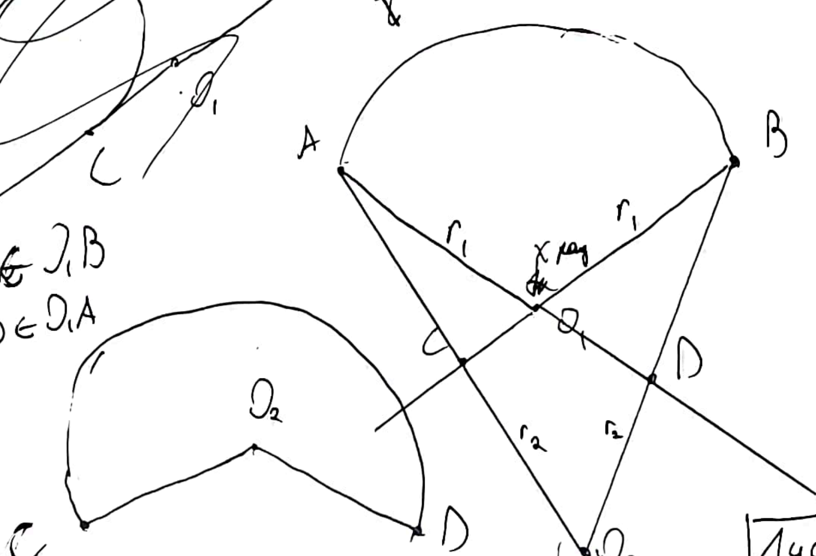
$a^2 = 9$

$a = \pm 3$



$C \in O_1B$

$D \in O_1A$



Лист 3

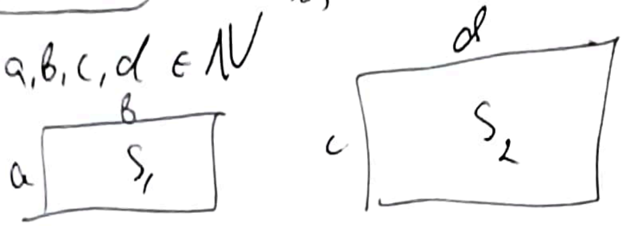
Черновик.

$4 \vdots a-2$

$a \in \{\cancel{1}; 3; \cancel{4}; 6\}$

≥ 3

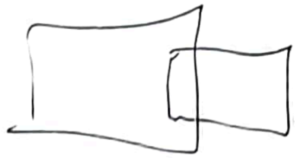
$a, b, c, d \in \mathbb{N}$



$b(a-2) = 2a$

$a(\cancel{b-2} = \cancel{2b}$

$b = \frac{2a}{a-2} = 2 + \frac{4}{a-2}$



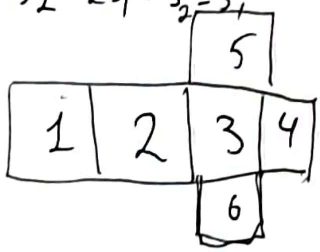
$\begin{cases} ab = 2(a+b) \\ cd = 2(c+d) \end{cases}$ НУО $S_2 \geq S_1$

$d = \frac{2c}{c-2}$

$S = S_1 + S_2 - 2S_{общ.} \geq S_1 + S_2 - 2S_1 = S_2 - S_1$

min S - ?

max $S_{общ.}$



~~НУО $S_2 \geq S_1$~~

$S_{общ} \leq S_1$

~~$S = 2\left(a + \frac{2a}{a-2}\right) + 2\left(c + \frac{2c}{c-2}\right) - 2S_{общ} \geq S_1 - S_2$~~

$a + \frac{2a}{a-2} = c + \frac{2c}{c-2}$

$\frac{a^2}{a-2} = \frac{c^2}{c-2}$

нит.: 4

верх: 3

$\frac{a^2c - ac^2 - 2a^2 + 2c^2}{(a-2)(c-2)} = 0$

100

18

15

20

$\geq n$

$(a-c)(ac - 2(a+c))$

$a + \frac{2a}{a-2} = c + \frac{2c}{c-2} + 1$

$a^2c - ac^2 - 2a^2 + 2c^2 = (a-2)(c-2)$

$a^2c - ac^2 - 2a^2 + 2c^2 = (a-2)(c-2)$

$a^2(c-2) - c^2(a-2) = (a-2)(c-2)$

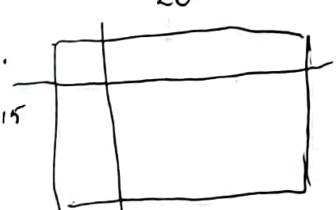
всего - $\cancel{4}^6$ $\cancel{4}$

$4^5 \cdot 4 +$

~~$(a^2 - a + 2)(c-2) = c^2(a)$~~

зад.

20



B+4

$20n + x^2 \geq 49 \cdot 100 + x$

$2n \geq 49$

$n \geq 25$

~~$20n + 1 \geq 49 \cdot 100 + 1$~~

$20n \geq 49 \cdot 100$

$n \geq \cancel{245}$

1×1

3×6

4×4

Лист 4

38-41-48-48
(159.4)

№2 Чистовик

Проанализируем функцию x^2-x-2. Это ~~...~~ квадратичная и имеет корни -1 и 2, ~~...~~ след-то на промеж $(-1;2)$ она ~~...~~ принимает отр. знач., а на промеж. $(-\infty;-1]\cup$ $\cup[2;+\infty)$ – полож. знач.

Рассмотрим 2 случая раскрытия модуля:

1) $x^2-x-2<0 \Leftrightarrow x\in(-1;2)$

$x^3-(-(x^2-x-2))=12x-13$

$x^3+(x^2-x-2)=12x-13$

$x^3+x^2-13x+11=0$

Заметим, что $x=1$ – корень, тогда по т. Безу раскладываем на скобки:

$(x-1)(x^2+2x-11)=0$

$\left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2+2x-11=0 \end{array}\right.$

Корнями 2-го ур-ния являются числа $-1-2\sqrt{3}$ и $-1+2\sqrt{3}$. (по формуле через дискрим) Тогда получаем

$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1-2\sqrt{3} \\ x=-1+2\sqrt{3} \end{array}\right.$

$1\in(-1;2)$

$-1-2\sqrt{3}<-1$

~~$-1+2\sqrt{3}<-1+2\cdot1{,}5=-1+3$~~

$-1+2\sqrt{3}>-1+2\cdot1{,}5=-1+3=2$

След-то, под огр. подходит только $x=1$

2) $x^2-x-2\geq0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$

$x^3-(x^2-x-2)=12x-13$

$x^3-x^2+x+2=12x-13$

$x^3-x^2-11x+15=0$

Заметим, что $x=3$ – корень ур-ния $\Rightarrow$ по т. Безу разложим на скобки:

Лист 5

Чистовик

$(x-3)(x^2+2x-5)=0$

$\left[\begin{array}{l} \cancel{x=3}\ x-3=0 \\ x^2+2x-5=0 \end{array}\right.$

Корнями 2-го ур-ния являются числа $-1-\sqrt{6}$ и $-1+\sqrt{6}$ (по формуле дискрим.). Итого:

$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1-\sqrt{6} \\ x=-1+\sqrt{6} \end{array}\right.$

$3 \in [2;+\infty)$

$-1-\sqrt{6} \in (-\infty;-1]$

$-1<-1+\sqrt{6}<-1+3=2 \Rightarrow -1+\sqrt{6}$ не подходит под огр. раскрытия модуля

В данном случае корни 3 и $-1-\sqrt{6}$

Итого корни: 1; 3; $-1-\sqrt{6}$

Ответ: $x=1$; $x=3$; $x=-1-\sqrt{6}$.

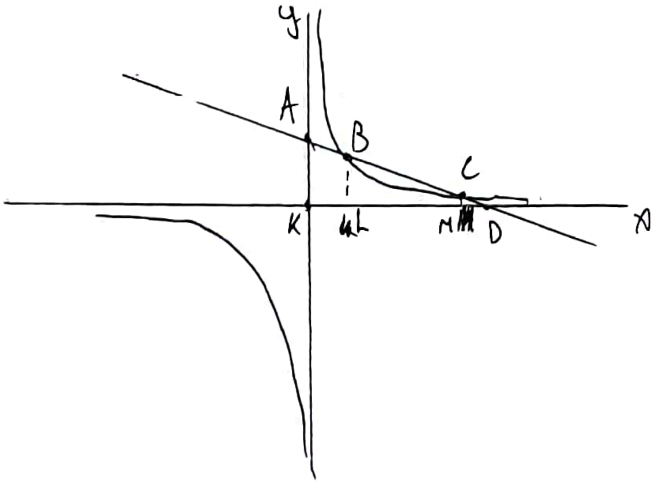
№4

Т.к. функ. $y=-18x+a$ имеет отриц. кооф. угла наклона, она не может ~~переход~~ одновременно проходить через четверть $x\geq 0; y\geq 0$ и четверть $x<0; y<0$.

Рассмотрим 2 случая:

1) Функц. проходит через четверть $x\geq 0; y\geq 0$. (т.е. $a\geq 0$)

Сделаем приблизительный рисунок:



Лист 6

чистовик

A, B, C, D - точки пересечения прямой с осью ординат, гиперболой и осью абсцисс соотв.
~~K,L,M~~- проекции A, B, C на OX.
K, L, M
~~По условию AB=BC=CD~~ ~~и при этом~~ AK ∥ ∥ BL ∥ CM (т.к. являются проекциями) => ΔKAD ~ ~ ΔLBD ~ ΔMCD => т.к. AB=BC=CD, KL=LM=MD.

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 - значения абсцисс точек K, L, M и D соотв. Очев. $x_1=0$.
Т.к. D леж. на исход. прямой, $-18x_4+a=0$ =>
=> $x_4=\frac{a}{18}$. $KL=LM=MD=\frac{KD}{3}=\frac{\frac{a}{18}}{3}=\frac{a}{54}$ =>
=> $x_2=x_1+\frac{a}{54}=0+\frac{a}{54}=\frac{a}{54}$; $x_3=x_2+\frac{a}{54}=\frac{a}{54}+\frac{a}{54}=\frac{a}{27}$.
При этом в точках x_2 и x_3 прямая пересек. параболу, т.е.:

$$\begin{cases}-18x_2+a=\frac{1}{x_2}\\-18x_3+a=\frac{1}{x_3}\end{cases} \qquad \begin{cases}-18\cdot\frac{a}{54}+a=\frac{54}{a}\\-18\cdot\frac{a}{27}+a=\frac{27}{a}\end{cases} \Rightarrow$$

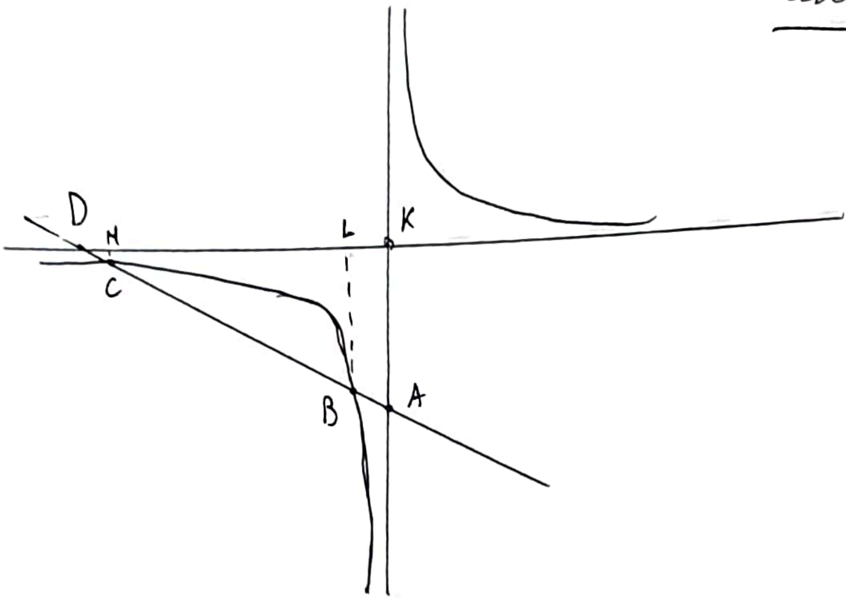
$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{2}{3}a=\frac{54}{a}\\\frac{1}{3}a=\frac{27}{a}\end{cases} \Rightarrow a=\frac{81}{a} \Rightarrow a^2=81 \Rightarrow$$

=> $a=\pm 9$. $a\neq -9$, т.к. при отр. знач. a прямая будет пересекать четверть $x<0; y<0$, а не $x\geq 0; y\geq 0$. Итого, в этом случае $a=9$

2) Прямая проход. через четверть $x<0; y<0$ (т.е. $a<0$). Сделаем аналогичный ~~рис~~ 1) рисунок и построения:

Лист 7

Чистовик



~~2~~ обозн. точек (см. рис) ~~?~~ аналог. 1).

~~Так~~ Аналог. 1) $DM=ML=LK$. Обозн. x_1, x_2, x_3, x_4 — абсциссы т. D, M, L, K. Очев. $x_4=0$.

D ~~точк~~ $\in -18x+a \Rightarrow -18x_1+a=0 \Rightarrow x_1=\frac{a}{18}$.

$DM=ML=LK=\frac{DK}{3}=\frac{x_4-x_1}{3}=\frac{0-\frac{a}{18}}{3}=\frac{-a}{54} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2=x_1-\frac{a}{54}=\frac{a}{18}-\frac{a}{54}=\frac{a}{27}$; $x_3=x_2-\frac{a}{54}=\frac{a}{27}-\frac{a}{54}=$

$=\frac{a}{54}$. x_2, x_3 — пересеч. гиперболы с прямой $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -18x_2+a=\frac{1}{x_2} \\ -18x_3+a=\frac{1}{x_3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -18\cdot\frac{a}{27}+a=\frac{27}{a} \\ -18\cdot\frac{a}{54}+a=\frac{54}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}a=\frac{27}{a} \\ \frac{2}{3}a=\frac{54}{a} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a^2=81 \Rightarrow a=\pm 9$, но т.к. $a<0$, подходит только $a=-9$

Итого, искомые знач.: $a=9$ и $a=-9$

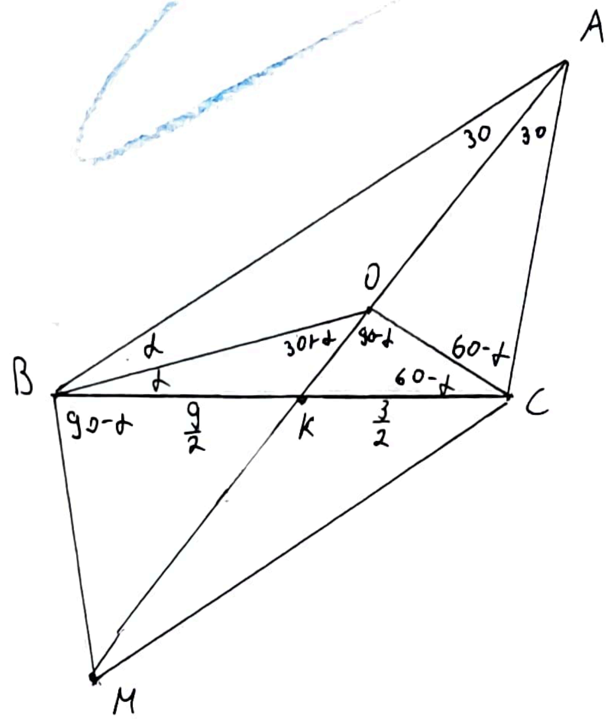
Ответ: $a=9$; $a=-9$.

Лист 8

Лист 9

№4

~~Черно~~ Чистовик



1) K - пересеч. AO и BC
2) M - пересеч. AO и ~~окр.~~ (OBC) => MBOC - впис.
3) $\angle A = 60^\circ$ => т.к. AO - бис. $\angle BAO = \angle CAO = 30^\circ$
4) Обозн. $\angle B = 2\alpha$. Тогда $\angle C = 120 - 2\alpha$ и $\angle ABO = \angle CBO = \alpha$ и $\angle BCO = \angle ACO = 60 - \alpha$
5) $\angle KOC$ - внеш. для $\triangle AOC$ => $\angle KOC = \angle OAC + \angle OCA = 30 + (60 - \alpha) = 90 - \alpha$
6) $\angle BOK$ - внеш. для $\triangle AOB$ => $\angle BOK = \angle OAB + \angle OBA = 30 + \alpha$
7) MBOC - впис => $\angle MBC = \angle MOC$ (впис. углы равны) ~~α~~ $= 90 - \alpha$
8) $\angle MBO = (90 - \alpha) + \alpha = 90^\circ$ => MO - диаметр. (MBOC)

Лист 10

Чистовик

9) По св-ву бисс. $\frac{BK}{KC} = \frac{BA}{AC} = 3 \Rightarrow$ т.к. $BC = 6$,

$BK = \frac{9}{2}$, $CK = \frac{3}{2}$

10) По т. син в $\triangle BOC$:

$\frac{BC}{\sin\angle BOC} = 2R_{BOC} = OH$ (диаметр)

$OH = \frac{BC}{\sin\angle BOC} = \frac{6}{\sin(30+\alpha+90-\alpha)} = \frac{6}{\sin 120^\circ} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} =$

$= \frac{4\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$

Ответ: $4\sqrt{3}$

№3

Назовём прямоуг., обладающий исходными качествами, идеальным. Проследим за его св-вами. Возьмем идеальный прямоуг. со сторонами a и b. Тогда:

$S = P$, т.е. $ab = 2(a+b) \Rightarrow b(a-2) = 2a \Rightarrow b = \frac{2a}{a-2} =$

$= 2 + \frac{4}{a-2}$. $b \in \mathbb{N} \Rightarrow 4 \vdots a-2$

$a-2>0$ (иначе $b<0$), т.е. $a>2 \Rightarrow$

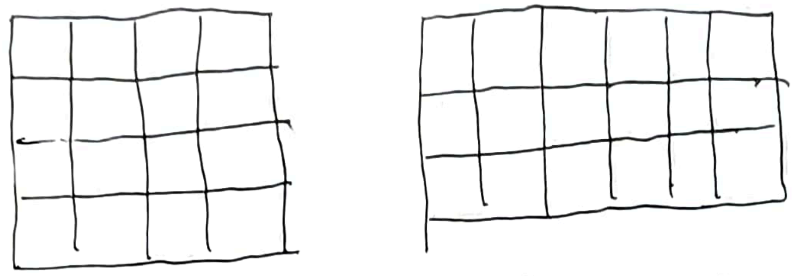
$\Rightarrow a \geq 3$. Перебором делителей 4, получаем, что $a \in \{3; 4; 6\}$. Тогда возможные идеальные прямоуг.: 3×6 (то же, что и 6×3) и 4×4. Значит изначальные прямоуг.: 4×4 и 3×6.

Для прямоуг. с площадьми S_1 и S_2 искомая часть будет равна по площади:

$S = S_1 + S_2 - 2S_{общ}$ (где $S_{общ}$ - часть в 2 слоя, вычитаем из общей площади дважды, т.к. в S_1+S_2

чистовик

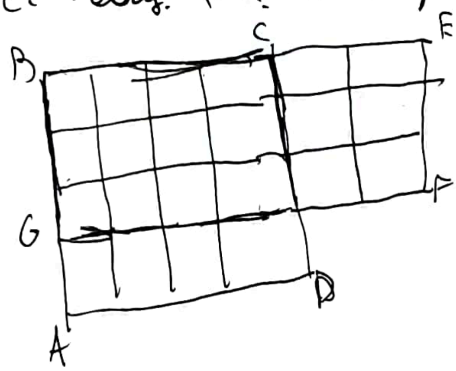
дважды её добавили) Нарисуем имеющиеся прямоуг.:



~~Очев~~ $S_1 = 4\cdot 4 = 16$, $S_2 = 3\cdot 6 = 18$. $S = 34 - 2S_{общ}$. Для ~~так~~ минимиз. S нужно максимиз. $S_{общ}$. ~~Очевидно, что для данных прямоуг.~~ ~~...~~ ~~Пусть при наложении~~

Очев. – общ. часть – прямоуг. (или пустота)
Пусть его стороны – a и b. Тогда т.к. он принад лежит 1-му прямоуг, $a \leq 4$ и $b \leq 4$. Аналог. из-за 2 прямоуг. $a \leq 3$, $b \leq 6$. Итого $a \leq 3$, $b \leq 4 \Rightarrow ab \leq 12$, т.е. $S_{общ} \leq 12$. Пример когда $S_{общ} = 12$ ниже

(ABCD – 1 прямоуг., BEFG – 2 прямоуг.)



$\Rightarrow S \geq 34 - 2\cdot 12 = 34 - 24 = 10$ (пример выше)

Ответ: 10.

Лист 11

Лист 12 Чистовик

№7

Ответ: 45.

Пусть Петя решил П задач, Вася – В задач. Т.к. П>В и П, В ∈ $\mathbb{Z}$, П ≥ В+1 => т.к. по условию каждый решил хотя бы n задач, П ≥ В+1 ≥ n+1. Тогда всего было решено ~~не~~ хотя бы 19·n+(n+1) = 20n+1 задача.

Покажем, что при ~~[illegible]~~ n=45 такая задача найдётся. Предположим обратное: каждую задачу решило не более 9 человек. ~~Тогда~~ Пусть X – общ. кол-во решенных задач. Тогда из написанного выше след.:

$$9 \cdot 100 \geq X \geq 20 \cdot 45+1$$

$$900 \geq X \geq 901$$

$$900 \geq 901$$

Противоречие

Покажем, что при меньшем n такая задача необяз. найдется следующим образом: покажем, как дети могли решать задачи при n=44, чтобы ~~[illegible]~~ требуемая задача не нашлась. Тогда для меньших n этот пример тоже будет верным.

Пронумеруем учеников от 1 до 20, 20й – Петя. 1-е число – номер ученика, диапазон(ы) – решенные задачи

1: 1-44
2: 2-45
3: 3-46
4: 4-47
5: 5-48
6: 49-92
7: 50-93
8: 51-94
9: 52-95
10: 53-96
11: 97-100 + 1-40
12: 98-100 + 1-41
13: 99-100 + 1-42
14: ~~100~~ 100-100 + 1-43
15: 44-87
16: 45-88
17: 46-89
18: 47-90
19: ~~[illegible]~~
20:

Нетрудно проверить, что пример удовлетворяет всем условиям.