



0 942828 850002

94-28-28-85

(160.4)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Рогачева Романа Дмитриевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2024 года

Подпись участника

РРос

Пусть $\log_2 x = a$. Тогда

$$\sqrt{a^2 + 3a} - \sqrt{a^2 + 3a - 4} \geq a + 1$$

$$\sqrt{a^2 + 3a - 4} \geq a^2 + 3a - 4 \geq 0 \Rightarrow a \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty).$$

$$\sqrt{a^2 + 3a} - \sqrt{a^2 + 3a - 4} \geq a^2 + 3a \geq \sqrt{a^2 + 3a - 4}$$

Пусть $\sqrt{a^2 + 3a - 4} = k$, тогда $k^2 + 4 \geq k \Rightarrow k^2 + 4 - k \geq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow k^2 - k + 0,25 + 3,75 > 0$, значит если $a^2 + 3a - 4 \geq 0$, то
 $(k - \frac{1}{2})^2$

$$a^2 + 3a \geq \sqrt{a^2 + 3a - 4}.$$

Если $a \in (-\infty; -4]$, то $a + 1 < 0$, $\sqrt{a^2 + 3a} - \sqrt{a^2 + 3a - 4} \geq 0 \Rightarrow$

все a подходит. $\Rightarrow \log_2 x \in (-\infty; -4] \Rightarrow x \in (0; \frac{1}{16}]$.

Если $a \in [1; +\infty)$, то $a + 1 \geq 0 \Rightarrow$ можно возвести в квадрат

$$a^2 + 3a - \sqrt{a^2 + 3a - 4} \geq a^2 + 2a + 1$$

$$a - 1 \geq \sqrt{a^2 + 3a - 4}$$

$a - 1 \geq 0$, т.к. $a \in [1; +\infty) \Rightarrow$ можно возвести в квадрат

$$a^2 - 2a + 1 \geq a^2 + 3a - 4$$

$$5 \geq 5a$$

$a \leq 1 \Rightarrow$ подходит только 1.

$$\& \log_2 x = -1$$

$$x = 2.$$

$$x \in (-\infty; \frac{1}{16}] \cup \{2\}$$

Все $x_0 \in (-\infty; \frac{1}{16}]$ и $0 < 16x_0 < 1 \Rightarrow$ нецелые. Значит
 целые при $x_0 \in \{\frac{1}{16}; 2\}$

$$f(\frac{1}{16}) = 16 \cdot \frac{1}{16} = 1$$

$$f(2) = 2 \cdot 16 = 32$$

$$32 + 1 = 33$$

Ответ: 33

$$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x} > 2\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x}$$

$$\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x} > 0$$

$$\sqrt{\cos x} > \sqrt{-3\sin x}$$

$$\cos x > -3\sin x$$

x - 4 четверть

$$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x} > 4\sqrt{\cos x} - 4\sqrt{-3\sin x}$$

$$6\sqrt{-3\sin x} > 3\sqrt{\cos x}$$

$$-108\sin x > 9\cos x$$

$$-12\sin x > \cos x > -3\sin x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$12\sqrt{1 - \cos^2 x} > \cos x > 3\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$144 - 144\cos^2 x > \cos^2 x > 9 - 9\cos^2 x$$

$$10\cos^2 x > 9$$

$$144 > 145\cos^2 x$$

$$\cos x > \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos x < \sqrt{\frac{144}{145}}$$

$$|x+1-a| + |4^x-a| = 4^x - x - 1$$

$$a \in (0; 2)$$

$$4^x - a \text{ и } a - x - 1 =$$

$$4^x - a + x + 1 - a$$

$$x + 1 - a$$

$$x + 1 > a > 4^x$$

$$x + 1 > 4^x$$

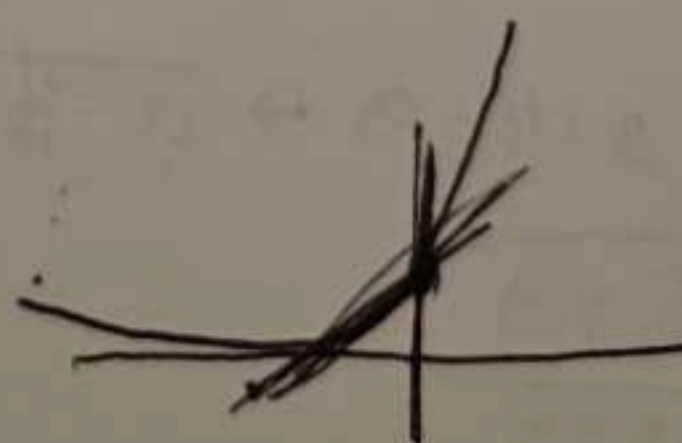


$$x = -\frac{1}{2}$$

$$4^{-\frac{1}{2}}$$

$$x + 1 = \frac{1}{2}$$

$$x + 1 - a + a - 4^x = 4^x - x - 1$$



$\log_2 x = a$ 75 (сидеделетте)

①

$\sqrt{a^2 + 3a} - \sqrt{a^2 + 3a - 4} \geq a + 1$

$a^2 + 3a - 4 = (a+4)(a-1)$

$a \in [-4, 1]$

При $a > 1$

$a^2 + 3a \geq \sqrt{a^2 + 3a - 4}$

$x^2 + 4$

$x^2 + 4 > x$

$x^2 + 4 - x > 0$

$a <$

$\log_2 \frac{1}{16} = -4$

$1 + 32 = 33$

$a^2 + 3a - \sqrt{a^2 + 3a - 4} \geq a^2 + 2a + 1$

$a - 1 \geq \sqrt{a^2 + 3a - 4}$

$a^2 - 2a + 1 \geq a^2 + 3a - 4$

$-5a \geq -5$

$5a \leq 5$

$a \leq 1$

$a = -4$

$a = 1$

$\log_2 \frac{1}{16} = -4$ $\log_2 2 = 1$

⑦ Если $abc \rightarrow abc$, то есть

abc

$a \cdot b = c \rightarrow a \cdot b + c$

$a = b + c$

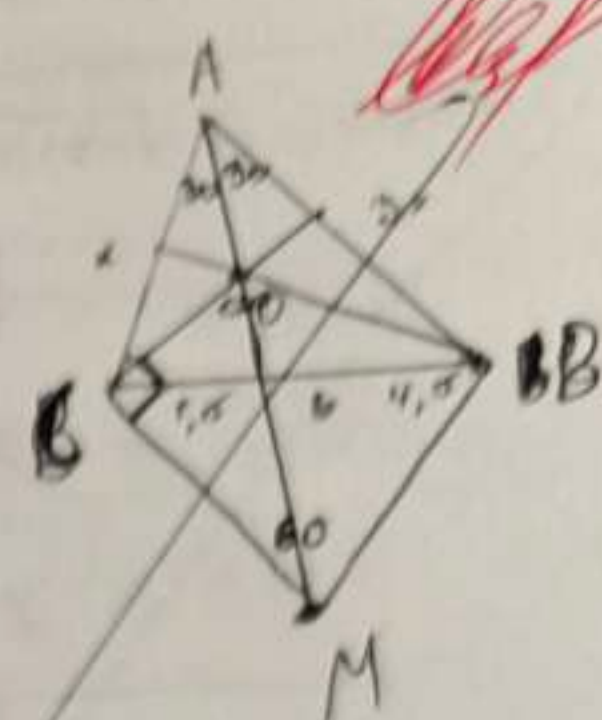
549

7449

2349

1539

~~2349~~



$\frac{6}{\sin 120^\circ}$

$= \frac{6}{\sin 60^\circ}$

$= \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= \frac{12}{\sqrt{3}}$

$= 4\sqrt{3}$

$\frac{x}{\sin B} = \frac{3x}{\sin C}$

$\sin C = 3 \sin B$

$\sin C = 3 \sin 120^\circ$

$4\sqrt{3} = \frac{OM}{\sin 90^\circ}$

$(4\sqrt{3})$

$OM = 4\sqrt{3}$



Если $\overline{abc}$ счастливое, то $\overline{abc+1}$ не суперсчастливое
счастливое так как $a+b+c \leq 2$ (раз можно
разделить на 2 равн. кучки), а $a+b+c+1 \leq 3 \Rightarrow$ нельзя
разделить $\Rightarrow$ суперсчастливое оканчивается на 9, $\Rightarrow$
Если предположим $\overline{abc}$, то $a = b+9$ если $a=9$ в 0, но
9 тоже счастливое $\Rightarrow \overline{a+b+9}$ $a+b=9 \Rightarrow$ нечет число
 $\overline{abc+9} \Rightarrow a = b+1 \Rightarrow$ число 549 суперсчастливое

Если четырехзначное. На 2 девятки не оканчивается
так как сумма цифр помещается не в 17.
(+1-9-9) и будет нечет $\Rightarrow$ оканчивается на 1 девятку
или 3. Если 3, то 1999 не суперсч. $\Rightarrow$ на одну
9. Если $\overline{2abc}$, то $2+a \leq 9$, так как $a \leq 4 \Rightarrow 2+a+b=9 \Rightarrow$
 $a+b=7$, тогда $\overline{2a(b+1)0}$ счастливое $\Rightarrow a = 2+b+1$, а
 $= 5$, $b=2$ не подходит или $b+1 = 2+a$, $a=3$, $b=4$.
Число 2349.

Если $\overline{1ab9}$, то $a+b=8$, $\overline{1a(b+1)0}$. Если $1+a+b > 9$, то
сумма цифр хотя бы 20 и 9 в сумме с кем то, но
 $1+a$ и $1+b \leq 10 \Rightarrow$ сумма цифр 20, $a+b=10 \Rightarrow$
 $\overline{1a(b+1)0}$ счастливое и $1+a = b+1$ или $a = b+1+1$,
1559 и 1649.

Если $a \neq 1$ и $a+b = 9$, то $a+b=8$, то $\overline{1a(b+1)0}$; то
 $1+a = b+1$ или $a = b+2$, то числа 1539 и 1449.
Ответ: 549, 1449, 1539, 1559, 1649, 2349

1) Пусть $a < 0$, тогда

$x+1 \geq 0$, при $x \in [-1; 1]$ и $4^x \geq 0$ при $x \in [-1; 1]$.

Тогда при $a < 0$ $|x+1-a| + |4^x-a| = 4^x + x + 1 - 2a >$
 $> 4^x + x + 1 \geq 4^x - x - 1$, при $x \in [-1; 1]$, т.к.

$4^x + x + 1 - 4^x + x + 1 = 2x + 2 \geq 0$ при $x \in [-1; 1] \Rightarrow$ при

$a \in (-\infty; 0)$, $|x+1-a| + |4^x-a| > 4^x - x - 1 - 2a$ не подходит.

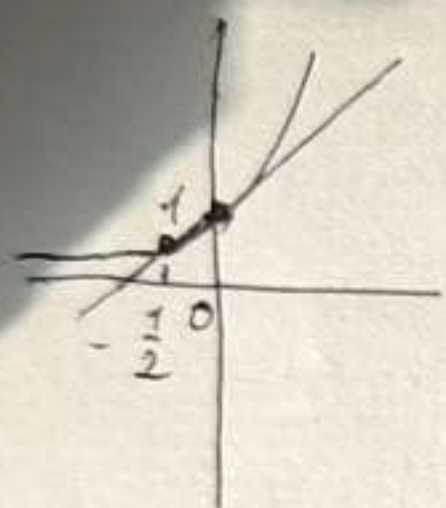
2) При $a \in (4; +\infty)$, $|x+1-a| + |4^x-a| = 2a - 4^x - x - 1$, т.к.

$x+1 < 4$, при $x \in [-1; 1]$ и $4^x \leq 4$, при $x \in [-1; 1]$.

Тогда $2a - 4^x - x - 1 = 4^x - x - 1 \Rightarrow 2a = 2 \cdot 4^x$, т.к. $4^x \leq 4$,

а $a > 4 \Rightarrow$ невозможно $\Rightarrow$ при $a \in (4; +\infty)$ корней тоже нет.

3) Рассмотрим на графике $f(x) = x+1$ и $g(x) = 4^x$



$f(x)$ прямая и пересекает $g(x)$ в

2 точках, $x = -\frac{1}{2}$ и $x = 0$.

$-\frac{1}{2} + 1 = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ и $0 + 1 = 4^0 = 1$.

Тогда при $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$ $g(x) > f(x)$.

Тогда пусть $a \in (\frac{1}{2}; 1)$, тогда будет хотя бы 2 координаты x , когда

$g(x) \geq y = a$, а $f(x) \leq y = a \Rightarrow$ обе координаты

будут корнями на отрезке от $[-1; 1]$. Если $a \in (1; 4)$, то они раскрываются противоположно $\Rightarrow$

$\Rightarrow |x+1-a| + |4^x-a| = -4^x + x + 1 = +4^x - x - 1$ только при 0, а

он только при $x = 0$ и $-\frac{1}{2}$. Тогда остаются 4 точки

$a = 0$, $a = \frac{1}{2}$, $a = 1$, $a = 4$. Все они подходят.

Ответ: $0; \frac{1}{2}; 1; 4$.

$$\sqrt{\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-39\sin x}} > 2\sqrt{\sqrt{\cos x} - \sqrt{-39\sin x}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{\cos x} \Rightarrow \cos x \geq 0 \\ \sqrt{-39\sin x} \Rightarrow \sin x \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x - 4 \text{ четверть}$$

$$\sqrt{\sqrt{\cos x} - \sqrt{-39\sin x}} \Rightarrow \sqrt{\cos x} - \sqrt{-39\sin x} \geq 0 \Rightarrow \cos x \geq -39\sin x$$

$$\text{При } \cos x \geq -39\sin x$$

$$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-39\sin x} \geq 4\sqrt{\cos x} - 4\sqrt{-39\sin x}$$

$$6\sqrt{-39\sin x} > 3\sqrt{\cos x}$$

$$2\sqrt{-39\sin x} > \sqrt{\cos x}$$

$$-12\sin x > \cos x \geq -39\sin x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \text{т.к. } 4 \text{ четверть}$$

$$\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$12\sqrt{1 - \cos^2 x} > \cos x \geq -3\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$144 - 12\cos^2 x > \cos^2 x \geq 9 - 9\cos^2 x$$

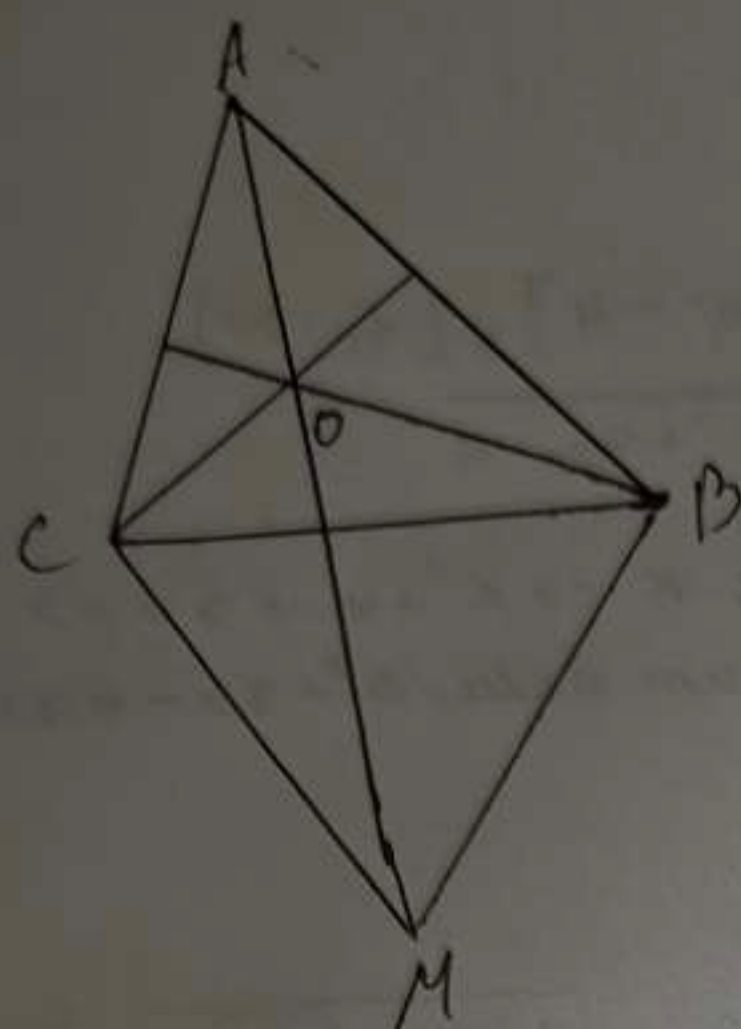
$$\begin{cases} 10\cos^2 x \geq 9 \\ 144 > 145\cos^2 x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \geq \sqrt{\frac{9}{10}} \\ \cos x < \sqrt{\frac{144}{145}} \end{cases}$$

$$x \in [\arccos \sqrt{\frac{9}{10}}, \arccos \sqrt{\frac{144}{145}}) \text{ и к промежутку можно прибавить } 2\pi k, \text{ при } k \in \mathbb{Z}.$$

№2

Лист 2



Решение:

$$1) \angle BAC = 60^\circ \Rightarrow \angle ABC + \angle BCA = 120^\circ \Rightarrow$$

$$\frac{\angle ABC + \angle BCA}{2} = 60^\circ \Rightarrow \angle COB = 180^\circ - \frac{\angle ABC + \angle BCA}{2} = 120^\circ.$$

$$2) \frac{BC}{\sin \angle BOC} = 2R \text{ описанной } \triangle BOC$$

$$\frac{BC}{\sin 120^\circ} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \text{ диаметр.}$$

3) $\angle COB$ - вписанный, $\angle MOB = \angle OAB + \angle OBA$ (внешний) $= 30^\circ + \angle OBA$. Из вписанности $\angle MOB = \angle MSB = 30^\circ + \angle OBA$.

$$4) \angle OCM = \angle OCB + 30^\circ + \angle OBA = 30^\circ + \frac{\angle ABC + \angle BCA}{2} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$$

Значит OM диаметр окружности четырехугольника $COBM \Rightarrow OM = 4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.