



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7-8 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Галкина Димитрия Станиславовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Черновик (стр. 2)

7.
П Л Л П Л Л

Л Л Л Л П П П П П П 1=1
Л... П Л П П П П } 2=1.2
Л... П П Л П П П

Л... П Л Л П П П П
П Л П Л П П П
П Л П П Л П П
~~П Л Л~~
П П Л П П П П
П П Л П П П П
П П Л П П П П } 6=1.2.3

... } 24=1.2.3.4

... } 120=5!

$$120 + 24 + 6 + 2 + 1 = 153$$

Чистовик (стр. 3)

N1.

Заметим, что $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$ и если остаётся $\frac{11}{100}$ пирога, второй игрок выигрывает, потому что сколько бы не съел первый игрок, второй сможет достать пирог: если первый берёт минимально $\frac{1}{100}$, второй берёт максимум $\frac{10}{100}(\frac{1}{10})$; если первый берёт максимум $\frac{10}{100}$, второй наберёт минимальное $\frac{1}{100}$. Таким образом, игрок, оставивший после себя $\frac{11 \cdot x}{100}$ пирога, имеет выигрышную позицию – каковы бы ни были ходы, оставляя также $\frac{11 \cdot x}{100}$ пирога. Ближайшее кратное 11 к 100 – это 99, и Аня может спокойно съесть $\frac{1}{100}$, чтобы оставить $\frac{11 \cdot 9}{100}$, потом $\frac{11 \cdot 8}{100}$, $\frac{11 \cdot 7}{100}$ и т.д. до $\frac{11 \cdot 0}{100}$, то есть достать пирог.

Ответ: Аня.

N3.

Рассмотрим последние цифры первых степеней 8:

$$8^1 = 8; 8^2 = \dots 4; 8^3 = \dots 2; 8^4 = \dots 6; 8^5 = \dots 8; 8^6 = \dots 4.$$

Как видно, цикл заканчивается на 8^4 и 8^5 оканчивается уже на ту же цифру, что и 8^1 , 8^6 – на ту же, что и 8^2 и т.д. То есть ~~степень~~ 8^n оканчивается на ту же цифру, что и 8^b степени остатка от деления на 4 (только 8^4 вместо 8^0).

2025 при делении на 4 даёт остаток 1, значит и 2025 в любой натуральной степени будет давать остаток 1, также как и 2025^{2025} . Значит, $8^{2025^{2025}}$ будет оканчиваться на ту же цифру, что и 8^1 , то есть на 8.

Ответ: 8.

N2.

Заметим, что сумма цифр остаточного числа должна делиться на 2, чтобы её можно было поделить на 2 равные группы. Соответственно, если искомого цифротативного числа и следующее за ним будут иметь в разряде десятков одинаковую цифру, ~~тогда~~ одно из них на самом деле не будет остаточным, (продолжение на стр. 4)

Чистовик (стр. 4)

12 (продолжение).

иначе сумма в них должна быть чётной, а в данном случае она нечётная. Значит, искомое суперстасливое число оканчивается на 9, а лежащее соответственно на 0 и в нём минимум 3 цифры (потому что числа 00 не существуют). Будем искать это число среди трёхзначных, тогда оно должно принимать вид $\overline{XX0}$, а искомое суперстасливое число — $\overline{XX0} - 1$. Расмотрим все такие числа: 109, 219, 329, 439 — не подходят, а 549 — подходит.

$5+4=9$; $5+0=5$.

Ans: 549.

N5.

Нетрудно показать, что на одной грани кубика могло оказаться жуков не больше, чем 14, иные жуки с одной из граней должны были не двинуться, а с противоположной с ней — проползти через 2 грани. (14 потому что сумма на 2 противоположные грани равна 7, а сумма на всех гранях — 21). Также 14 возможно, если, например, жуки с граней 6, 1, 5 и 2 переползли на грань с 4 или 3.

Omber: 14.

N6.

Чтобы точно была задата, которую решили не меньше 10 человек, нужно, чтобы в сумме все утки вместе решили не меньше $(9.99 + 10) = 901$ задат. Так как по условию Пете решил задат больше чем Вась, всего задат было решено не меньше $(20n + 1)$. Если приравнять, $901 = 20 \cdot 45 + 1$, значит n минимальное равно 45.

Amber: 45.

~~N4.~~

Чистовик (стр. 5)
14.

Сделаем рисунок для наглядности:
(буквой k обозначена коза)



Расстояние между навивалками по условию равно 2 м, также расстояние от каждой навивалки до пересечения их окружностей А тоже 2 метра. Если провести высоту из А в К, её длина будет меньше 2 метров (по свойству прямоугольных треугольников - гипотенуза больше катетов), то есть если коза пойдёт прямо по рисунку вверх или вниз (к точке, противоположной А), она съест меньше 4 метров травы. Если же она пойдёт к навивалкам вправо или влево, она съест $(1.2 + 2) = 4$ метра травы и пройдёт 3 метра. Также количество травы будет уменьшаться по мере отклонения траектории вбок от траектории прямо, то есть максимальное количество травы коза съест, если пойдёт в сторону одной из навивалок.

Ответ: в сторону любой помывалки, 3 метра.

N7.

Если первый палец правой руки находится на 6 месте, то есть 1 варианты расположения (АЛЛЛЛПППП). Если первый палец правой руки на 5 месте, то 2 варианта (ЛЛЛЛПППХППП и ЛЛЛЛПППЛППП). Если он на 4 месте, то будет $3! = 6$ вариантов (также $1! = 1$ и $2! = 2$), если на 3 месте, то $4! = 24$; на 2 - $5! = 120$; на 1 - $6! = 720$. Всего вариантов $720 + 120 + 24 + 6 + 2 + 1 = 873$.

Amber: 873.

