39-05-38-24
(160.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Русакова Ильи Константиновича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«13» апреля 2025 года

Подпись участника

39-05-38-24 (160.2)

55 (пятьдесят пять) (Черновик)

$$\sqrt{\log_2^2 x + 3\log_2 x - \sqrt{\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4}} \geq \frac{\log_2 x + 1}{\log_2 2x}$$

$$\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4 = (\log_2 x + 4)(\log_2 x - 1).$$

$\cancel{\log_2^2 x + 3\log_2 x}$

1) $\log_2 x + 1 < 0$

$\log_2 x < \log_2 \frac{1}{2}.$

$x < \frac{1}{2}.$

2) $\log_2 x + 1 \geq 0;$

$x \geq \frac{1}{2};$

$\cancel{\log_2^2 x + 3\log_2 x - \sqrt{\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4} \geq \log_2^2 x + 2\log_2 x + 1};$

$a - \sqrt{a-4} \geq 0;$

$a \geq \sqrt{a-4}. \quad |^2$

$$\begin{cases} a \geq 4 \\ a^2 - a + 4 \geq 0. \end{cases}$$ – верно при $a \in R$

$\log_2 x - 1 \geq \sqrt{\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4}.$

$$\begin{cases} \log_2 x - 1 \geq 0 \\ \log_2 x - 1 \geq \sqrt{(\log_2 x - 1)(\log_2 x + 4)} \end{cases}$$

$x \geq 2$

$\sqrt{\log_2 x - 1} \geq \sqrt{\log_2 x + 4}$

$x \geq 2.$

$$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ \log_2^2 x + 3\log_2 x \geq 4. \end{cases}$$

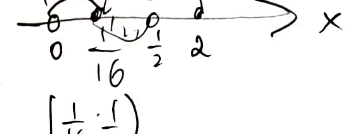
$\sqrt{1 + 3 - \underbrace{\sqrt{1+3-4}}_{=0}} \geq 1+1;$

$2 \geq 2$

$$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ (\log_2 x + 4)(\log_2 x - 1) \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ \log_2 16x \cdot \log_2 \frac{x}{2} \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ (16x - 1)(\frac{x}{2} - 1) \geq 0 \end{cases}$$



$[\frac{1}{16}; \frac{1}{2})$.

Чистовик

№1. $\sqrt{\log_2^2 x + 3\log_2 x - \sqrt{\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4}} \geq \log_2 x + 1.$

1) $\begin{cases} \log_2 x + 1 < 0 \\ x > 0 \\ \log_2^2 x + 3\log_2 x - \sqrt{\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4} \geq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} \log_2 x < \log_2 \frac{1}{2}, \text{ т.к. } 2 > 1; \\ x > 0 \\ \log_2^2 x + 3\log_2 x \geq \sqrt{\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4} \quad |\,^2, \text{ т.к. обе части} \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2}, \\ (\log_2^2 x + 3\log_2 x)^2 - (\log_2^2 x + 3\log_2 x) + 4 \geq 0, \\ \log_2^2 x + 3\log_2 x - 4 \geq 0; \end{cases}$

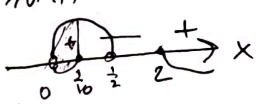
$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ \underbrace{((\log_2^2 x + 3\log_2 x) - \frac{1}{2})^2}_{\geq 0} + 3\frac{3}{4} \geq 0 \text{ верно.} \\ (\log_2 x + 4)(\log_2 x - 1) \geq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ \log_2 16x \cdot \log_2 \frac{x}{2} \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ (2-1)(16x-1)(2-1)(\frac{x}{2}-1) \geq 0, \end{cases}$

$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ (16x-1)(\frac{x}{2}-1) \geq 0. \ (1) \end{cases}$

| (1) $(16x-1)(\frac{x}{2}-1) \geq 0$ | нули: $(16x-1)(\frac{x}{2}-1) = 0$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{16} \\ x = 2. \end{array}\right.$



$x \in (0; \frac{1}{16}]$.

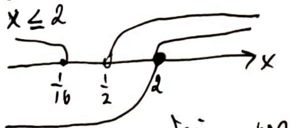
2) $\begin{cases} \log_2 x + 1 > 0 \\ x > 0 \\ \underbrace{\log_2^2 x + 3\log_2 x - \sqrt{\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4}}_{\geq 0} \geq \underbrace{(\log_2 x + 1)^2}_{\geq 0} \end{cases}$ $| = \log_2^2 x + 2\log_2 x + 1.$

$\begin{cases} \log_2 x > \log_2 \frac{1}{2}, \text{ т.к. } 2 > 1; \\ x > 0 \\ \underbrace{\log_2 x - 1}_{\geq 0} \geq \sqrt{\underbrace{(\log_2 x + 4)(\log_2 x - 1)}_{\geq 0}} \end{cases}$

$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ (\log_2 x + 4)(\log_2 x - 1) \geq 0 \\ (\log_2 x - 1)\underbrace{((\log_2 x - 1) - (\log_2 x + 4))}_{-5} \geq 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \in (-\infty; \frac{1}{16}] \cup [2; +\infty) \text{ (по п. 1)} \\ \log_2 \frac{x}{2} \leq \frac{0}{\log_2 2}, \text{ т.к. } 2 > 1; \end{cases}$

$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \in (-\infty; \frac{1}{16}] \cup [2; +\infty), \\ x \leq 2 \end{cases}$

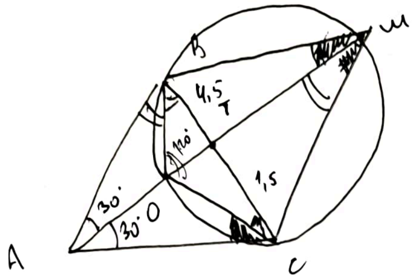


Т.к. у всех несократимых дробей с ~~кроме~~ полуинтервала $(0; \frac{1}{16}]$ (кроме $\frac{1}{16}$) знаменатель больше 16, то ~~при~~ при домножении на 16 целое число будет получено только при $x = \frac{1}{16}$, $f(x) = 1$. При $x = 2$ $f(x) = 32 \in \mathbb{Z}$. Итого сумма равна 33.

Ответ: 33.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик



$BC=6,\ \frac{AB}{AC}=3.\ \angle BAC=60°$

$4^x-a=0$

$x=\log_4 a$

$x+1-a=0$

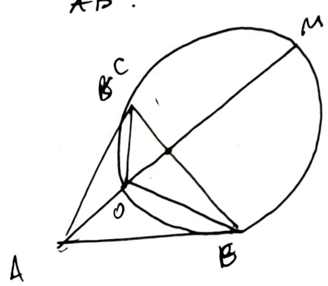
$x=a-1.$

~~AB, AC касательные.~~

~~Ам~~

1) $\triangle ABM \sim \triangle AOC.\quad \frac{AB}{AO}=\frac{BM}{OC}=\frac{AM}{AC}=3k$

2) $\triangle ACM \sim \triangle AOB.\quad \frac{AC}{AO}=\frac{CM}{BO}=\frac{AM}{AB}=k$



$\frac{AM}{AC}=3\frac{AC}{AO},$

$AM\cdot AO=3AC^2.$

$R=\frac{6}{2\sin 120°}=\frac{6}{2\cdot\frac{\sqrt3}{2}}=2\sqrt3.$

$\frac{OT}{1,5}=\frac{4,5}{TM},$

$OT\cdot TM=1,5\cdot 4,5.$

$|x+1-a|+|4^x-a|=4^x-x-1.$

$4^x-x-1=0$

$4^x=x+1.\quad x=0.$

$\sqrt{\sqrt{\cos x}+2\sqrt{-3\sin x}}>2\sqrt{\sqrt{\cos x}-\sqrt{-3\sin x}},$

$\sqrt{\cos x}+2\sqrt{-3\sin x}>4\sqrt{\cos x}-4\sqrt{-3\sin x},$

$6\sqrt{-3\sin x}>3\sqrt{\cos x}.$

$\sqrt{\cos x}<2\sqrt{-3\sin x},$

$\cos x<-12\sin x,$

$\cos x+12\sin x<0.$

$\cos x=0$: не п.

$\cos x\neq 0$:

$12\,tg\,x+1<0,$

$tg\,x<-\frac{1}{12}.$

ОДЗ:

$\cos x\geq 0$

$\sin x\leq 0$

$\sqrt{\cos x}\geq\sqrt{-3\sin x},$

$\cos x+3\sin x\geq 0,$

при $\cos x=0$: $3\geq 0$ – верно

при $\cos x\neq 0$:

$3\,tg\,x+1\geq 0,$

$tg\,x\geq -\frac{1}{3}.$

~~$x\in[-arctg\frac{1}{3}$~~

если ~~$|x+1-a|$~~ $x+1-a\leq 0$, $4^x-a\geq 0$, то если знаки наоборот, то

$|x+1-a|+|4^x-a|=4^x-\cancel{a}-x-1=4^x-x-1$ при модуле x => такого не может быть

$\boxed{\text{Чистовик}}$

№3. $\sqrt{\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x}} > 2\sqrt{\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x}}$ $|^2$, т.к. обе части >0

ОДЗ:

$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ -3\sin x \geq 0 \\ \sqrt{\cos x} \geq \sqrt{-3\sin x} \quad |^2, \text{т.к. обе части} \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x \leq 0 \\ \cos x + 3\sin x \geq 0 \end{cases}$ | при $\cos x = 0$: $\underset{(\text{по ОТТ})}{3 \geq 0}$ — подх.

$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x \leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \text{ — не подх., т.к. тогда по ОТТ } \sin x = 1 > 0. \\ tg x \geq -\frac{1}{3}. \end{array} \right. \end{cases}$

$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x} > 4\sqrt{\cos x} - 4\sqrt{-3\sin x}$;

$6\sqrt{-3\sin x} > 3\sqrt{\cos x}$;

$\sqrt{\cos x} < 2\sqrt{-3\sin x}$ $|^2$, т.к. обе части ≥ 0.

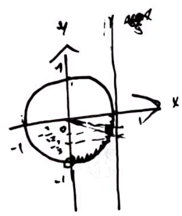
$\cos x + 12\sin x < 0$

1) при $\cos x = 0$: $\underset{(\text{по ОТТ})}{12 < 0}$ — неверно

2) при $\cos x \neq 0$: разделим на $\cos x > 0$ (по ОДЗ)

$12 tg x + 1 < 0$;

$tg x < -\frac{1}{12}$.



Итого:

$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x \leq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \cancel{\cos x = 0} \\ -\frac{1}{3} \leq tg x < -\frac{1}{12} \end{cases}$

Ответ: $x \in \left(arctg\left(-\frac{1}{12}\right) + 2\pi n;\ arctg\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n\right]$ $(n \in \mathbb{Z})$

39-05-38-24 (160.2)

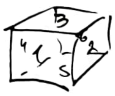
Черновик

С какой вероятностью на какую-то 1 грань заползёт жук?

Не заползёт, если все выберут другие:

$\underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}$ (осталось 3 вар. из 4).

$\frac{81}{256}$ => заползёт с вероятностью $1-(\frac{3}{4})^4$.



1 2 3 4 5 6

$x=0$:

$|1-a|+|1-a|=0$ 0.

верно при $a=1$.

S=18

1 8 9

1 8 8 9

S=17

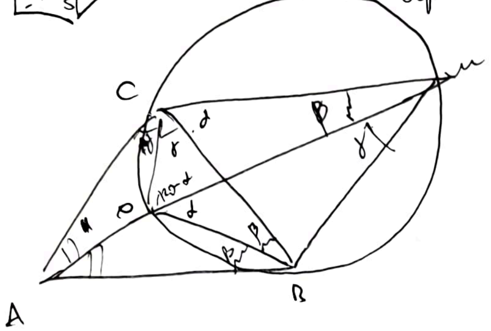
K

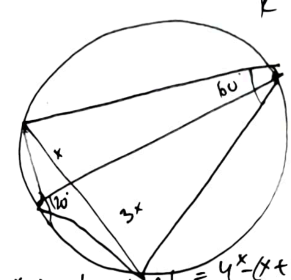
$4^x>0$

$x+1\geq 0$.

$4^x-(x+1)\leq$

≥0





$|4^x-a|+|x+1-a|=4^x-(x+1)\leq 4^x$.

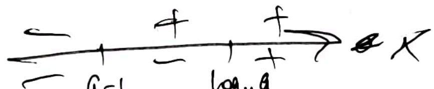
a b c 9

a + c = b + 9

$180-\alpha=2\gamma+\alpha$;

$180=2\gamma+2\alpha$, $\gamma+\alpha=90$.

$y=ax^2+bx+c$. $y'=2ax+b$



9

+1

0

S = 9 + 2a

S = 10 + 2a = 2(a+5)

(a-какая-то цифра).

$a-x-1+a-4^x=4^a-x-1$;

$a=4^x-x-1$.

№7. Если нет перехода через десяток, то в 1/4 случаев сумма цифр нечётна => переход всегда есть, т.е. последняя цифра - 9.

~~сум~~ неч. число переходов

3: 999 → 1000 ×

1999 → 2000 ×

1 переход через десяток

Если число 3-х значное, то подойдут лишь те, у которых после перехода ост. 2 одинак. цифры => до этого их сумма равн. 9 =.

=> $\boxed{549}$, 550 Если число четырёхзн., то после перехода будет одинак. число и 0.

Трёхзначные счастливые числа (нач на 1 или 2):

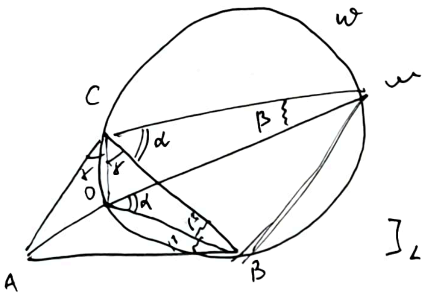
1) a + b = c:

a	b	c
1	0	1
	1	2
	2	3
	8	9
2	0	2
	1	3
	...	
	7	9

$9+8=17$ чисел.

ЧИСТОВИК

№2.



<u>Дано</u>: $\triangle ABC$, O – точка пересеч. бис., ω – окр., опис. около $\triangle BOC$, $AO \cap \omega = \{O; M\}$, $BC = 6$, $\frac{AB}{AC} = 3$, $\angle BAC = 60^\circ$.

<u>Найти</u>: OM – ?

<u>Решение</u>:

Пусть $\angle ABO = \angle OBC = \beta$, $\angle ACO = \angle OCB = \gamma$.

По Т о сумме $\angle$ в $\triangle$ $2(\beta+\gamma) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \beta+\gamma = 60^\circ$

$\left.\begin{matrix}\angle CMO = \angle OBC = \beta \\ \angle BMO = \angle BCO = \gamma\end{matrix}\right\}$ – впис., опирающие на 1 дугу $\Rightarrow \angle BOC =$

$= 180^\circ - \angle BMC = 180^\circ - (\beta+\gamma) = 120^\circ$ (по св-ву впис. 4-х-уг-ка).

В $\triangle BOC$: по Т синусов

$R = \frac{BC}{2\sin\angle BOC} = \frac{6}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$ (R – радиус ω).

Пусть $\angle BCM = \alpha$, тогда $\angle BOM = \angle BCM = \alpha$ – впис., опирающие на $\smile BM$.

$\triangle CAM \sim \triangle OAB$ по 2-ум углам ($\angle OAB = \angle CAM$, $\angle CMA = \angle OBA = \beta$):

~~по опр-ю подобия~~ Отсюда $\angle ACM = \angle AOB$,

$2\gamma + \alpha = 180^\circ - \alpha$ (смежн. с $\angle \alpha$).

$\gamma + \alpha = 90^\circ = \angle OCM \Rightarrow$ OM – диаметр окр-ти ω,

$OM = 2R = 4\sqrt{3}$. Ответ: $OM = 4\sqrt{3}$.

№7. $\boxed{\text{Чистовик}}$

Если число не оканчивается на 9, то оно точно не явл. суперсчастливым, потому что либо его сумма цифр, либо сумма цифр. след. числа нечётна.
При чём, при k переходах через десяток сумма меняется на $1 - 9 \cdot k$, значит переходов совершено нечётное число — 1 или 3 для отрезка $[400; 2400]$
Если перехода 3:
$999 \to 1000$ ✗
$1999 \to 2000$ ✗. Значит переход ровно 1.
Для 3 трёхзначных чисел: сумма первых двух цифр равна 9, а после прибавления ко второй 1 они становятся равны. Отсюда единственное суперсчастливое 3-х-зн. число на отрезке $[400; 2400]$ — $\boxed{549}$
($549: 5+4=9$, $550: 0+5=5$).

Для четырёхзначных чисел:
пусть счастливое 4-х-зн. число выглядит так: $\overline{abc9}$.
Т.к. $a \le 2$, то либо $a+b+c=9$, либо $a+c=b+9$, либо $a+b=c+9$, $b+c=a+9$.
1) $a+b+c=9 \Rightarrow$ после перехода сумма цифр числа равна 10, откуда сумма цифр в группе равна 5, при чём отк. осталось не более 3 цифр, не равных 0, то одна из них (не первая) равна 5, а остальные в сумме равны 5. Варианты:

$$\begin{matrix} 1450 \\ 2350 \\ 1540 \\ 2530 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1449 \\ 2349 \\ 1539 \\ 2529 \end{matrix}$$ (сумма первых 3 цифр равна 9).

2 (~~3~~) $a+b=c+9$ или $a+c=b+9$ или $a+9=b+c$.
В таком случае $a+b+c = 9+2x$, где x — какая-то из цифр a, b, c. После перехода сумма равна $10+2x$, при чём оставшиеся 3 первые цифры числа образуют счастливое трёхзначное число (после перехода), сумма цифр которого не меньше 10. Если сумма равна 10, то $a+b+c=9$, значит число подх. под 1 случай и не может подх. под этот, поэтому рассматриваю сумму ≥ 12. (сумма чётна). Сумма цифр изначального числа вид $10+2k$.
Буду проверять имеют ли сумма цифр изначального

Число	Изначальное	Сумма $a+b+c$	Подх.?
156	1559	11	~~✗~~ V
165	1649	11	~~✗~~ V
167	1669	13	✗
176	1759	13	✗
178	1779	15	✗
187	1869	15	✗
189	1889	17	✗
198	1979	17	✗
246	2459	11	✗
264	2639	11	✗
2~~7~~57	2569	13	V
275	2749	13	V
268	2679	15	✗
286	2859	15	✗
279	2789	17	V
297	2989		✗

Не подх. — не попадают на отрезок $[400; 2400]$.

Итого 3 числа:
~~155~~ 549, 1559, 1649.

Ответ: 3.

(Черновик)

$$|x+1-a|+|\underbrace{4^x-a}_{\le 4^x}| = 4^x-x-1,\quad x\in[-1;1].$$

при $a<0$ $\varnothing$.

Если $a\in(0;1)$:
при $x\geq 0$: все модули с +.

при $a=0$:

$4^x+x+1=4^x-x-1$;

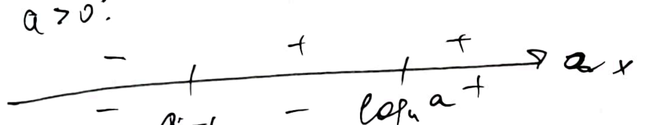
$x+1=0$.

$x=-1$.

$4^x+x+1-2a=4^x-x-1$;
$a=x+1$
$x=a-1$.

$\begin{cases}4^x\ge a\\ x+1\le a_{\in(0;1)}\end{cases}$

при $a>0$:



$x<0$.

$x=a-1$.

$4^{a-1}\ge a$

$4^a\ge 4a$

1) $x+1-\cancel{a}-4^x+\cancel{a}=4^x-x-1$; $(+\,-)$

$4^x=x+1$;

есть корень − 0.

2) $\cancel{a}-x-1+4^x-\cancel{a}=4^x-x-1$;

$0=0$ верно, $x\in R$ => на таком промежутке всегда есть корни.

$(-\,-)$: $a-x-1+a-4^x=4^x-x-1$;

$2a=2\cdot 4^x$

$a=4^x$, ~~при~~ есть корень.

$x=\log_4 a$.

$(+\,+)$: $4^x+x+1-2a=4^x-x-1$;

$a=x+1$ → есть корень.

$x=a-1$

$|2-a|+|4-a|=2$.

$a-1<\log_4 a$;

$a<\log_4 4a$

$\log_4 4^a<\log_4 4a$

$4^a-4a<0$.

$a\le 1$.

$|-a|+|\frac{1}{4}-a|=\frac{1}{4}$;

$|a|+|\frac{1}{4}-a|=\frac{1}{4}$.

$\begin{cases}2-a<0\\ 4-a>0\end{cases}$

$2<a<4$.

Не подх., если

$|1-a|+|1-a|=0$.

$|\frac{3}{2}-a|+|2-a|=\frac{1}{2}$.

$a\ge 0$

$\frac{1}{4}\le a$

$\left[\begin{array}{l}a>\frac{1}{4}\\ a<0.\end{array}\right.$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

(черновик)

N 4. $|x+1-a| + |\underbrace{4^x}_{>0} - a| = \underbrace{4^x - x - 1}_{\leq 4^x,\text{ при } x \in [-1;\,1]}.$

1) если $a<0$, то левая часть больше 4^x – противоречие.

2) если $a=0$, то $4^x + x + 1 = 4^x - x - 1$;

$x = -1$.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!