0 079407 110001

07-94-07-11
(161.18)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Савина Михаила Дмитриевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

ЧИСТОВИК 90 (девяносто)

ЗАДАЧА 1. Первым делом запишем ОДЗ: все подкоренные выражения больше или равны 0:

$4x^2-12x+9\geqslant 0$ Но т.к. $4x^2-12x+9=(2x-3)^2$,

$9x^2-12x+4\geqslant 0$ $\quad 9x^2-12x+4=(3x-2)^2$, первые 2 нер-ва выполняются

$(x-1)\geqslant 0 \Rightarrow x\geqslant 1$ автоматически. Далее:

$\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{9x^2-12x+4}-\left(\sqrt{x-1}\right)^2=|2x-3|+|3x-2|-(x-1)$.

Но т.к. из ОДЗ следует $x\geqslant 1$, $|3x-2|=3x-2$ (ведь $3x\geqslant 3$, $3x-2\geqslant 1>0$).

$\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{9x^2-12x+4}-\left(\sqrt{x-1}\right)^2=|2x-3|+2x-1=\sqrt{6+\sqrt{20}}-\sqrt{6-\sqrt{20}}$. (1)

Запишем $6+\sqrt{20}$ как $1+5+2\sqrt5=6+\sqrt{20}=(1+\sqrt5)^2$, а $6-\sqrt{20}$ как $1+5-2\sqrt5=6-\sqrt{20}=$
$=(\sqrt5-1)^2$. Т.к. $1+\sqrt5>0$, $\sqrt5-1>0$, $\sqrt{6+\sqrt{20}}-\sqrt{6-\sqrt{20}}=1+\sqrt5-(\sqrt5-1)=2$.

Из (1) $|2x-3|+2x-1=\sqrt{6+\sqrt{20}}-\sqrt{6-\sqrt{20}}=2$,

$|2x-3|=3-2x$;

$|3-2x|=3-2x$ при $3-2x\geqslant 0$, $3\geqslant 2x$, $x\leqslant 1.5$. Учитывая ОДЗ

$(x\geqslant 1)$, получаем

Ответ: $x\in[1;1{,}5]$.

ЗАДАЧА 5. Подставим в функции значение $x=0$:

$f_1(0)=a_1\cdot 12$ $\quad$ т.к. $f_1(x)=f_2(x)=f_3(x)$

$f_2(0)=a_2\cdot 18$ $\Rightarrow$ $a_1\cdot 12=a_3\cdot 24$, $a_1=2a_3$.

$f_3(0)=a_3\cdot 24$ $\quad a_2\cdot 18=a_3\cdot 24$, $a_2=\frac{4}{3}a_3$. (*)

Рассмотрим случай $a_1=a_2=a_3=0$.

$f_1(x)=x(x^2+b_1x+12)$

$f_2(x)=x(x^2+b_2x+18)$

$f_3(x)=x(x^2+b_3x+24)$. При $x=1$

$f_1(1)=f_2(1)=f_3(1)=b_1+12=b_2+18=b_3+24\Rightarrow b_1=b_2+6=b_3+12$. (2)

При $x=-1$

~~$f_1(x)=(-1)(1-b_1+12)$~~
~~$f_2(x)=(-1)($~~
~~$b_1-12=b_2-18$~~

$f_1(-1)=-(1-b_1+12)=f_2(-1)=-(1-b_2+18)=f_3(-1)=-(1-b_3+24)\Rightarrow$

$b_1-12=b_2-18=b_3-24$, $b_1=b_2-6=b_3-12$. Но это противоречит (2)! $\Rightarrow a_1\neq 0$, $a_2\neq 0$, $a_3\neq 0$.

Подставим в f_1, f_2, f_3 значения $x=-a_1$, $x=-a_2$, $x=-a_3$:

$f_1(-a_1)=0\Rightarrow f_2(-a_1)=0$, $f_3(-a_1)=0$. Но $a_1\neq a_2\neq a_3$, т.е. первая скобка $(a_2-a_1)\neq 0$, $(a_3-a_1)\neq 0$. Отсюда $(-a_1)$ – корень ур-й $(x^2+b_2x+18)=0$ и $(x^2+b_3x+24=0)$. Теперь подставим значение $x=-a_2$:

см. оборот.

ЧИСТОВИК.

При $x=-a_2$

$f_2(-a_2)=(-a_2+a_2)\cdot(a_2^2+(-a_2)b_2+18)=0, \Rightarrow f_1(-a_2)=0=(a_1-a_2)(a_2^2-a_2b_1+12)$, т.к.

$a_1\neq a_2$, $a_2^2-a_2b_1+12=0$, т.е. $(-a_2)$ – корень $(x^2+b_1x+12=0)$. Аналогично

$f_3(-a_3)=0$, $a_2\neq a_3$, и $(-a_2)$ – корень $(x^2+b_3x+24)=0$.

При $x=-a_3$

$f_3(-a_3)=0, \Rightarrow f_1(-a_3)=0$, $f_2(-a_3)=0$. Т.к. $a_1\neq a_3, a_2\neq a_3$, $(-a_3)$ – корень

$x^2+b_1x+12=0$,

$x^2+b_2x+18=0$. Итого

x^2+b_1x+12 имеет корни $-a_2$ и $-a_3$

x^2+b_2x+18 имеет корни $-a_1$ и $-a_3$

x^2+b_3x+24 имеет корни $-a_1$ и $-a_2$. По т. Виета

$12=a_2a_3$,

$18=a_1a_3$,

$24=a_1a_2$. Но мы знаем (из (1)), что $a_1=2a_3$, $a_2=\frac{4}{3}a_3$, и

$18=2a_3^2$, $a_3=\pm3$, $a_1=\pm6$, $a_2=\pm4$. По т. Виета

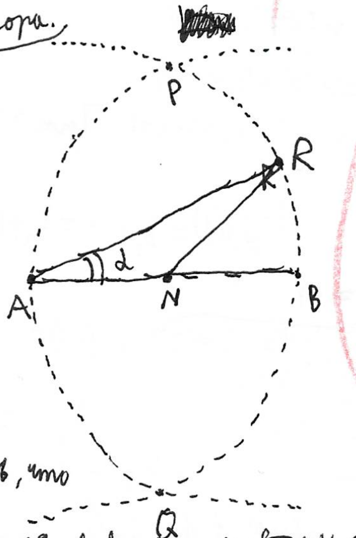
$b_1=a_2+a_3=\pm 7$, $b_2=a_1+a_3=\pm9$, $b_3=a_1+a_2=\pm10$. Но по условию

$a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3>0$, т.е. $a_1=6, a_2=4, a_3=3, b_1=7, b_2=9, b_3=10$, и

$a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3=39$.

Ответ: 39.

ЗАДАЧА 6. Начертим ситуацию: A, B – поливалки, N – нора.



Пусть мышь зашла в зону двойного полива (она обязана туда зайти) в точке R ~~(R≠P, R≠Q)~~ ~~из сообр. симметрии неважно, находится ли R на PB, AP, BQ, AQ)~~. И пусть угол BAR (или ABR, если R не на PBQ, а на PAQ) равен α. Тогда путь мыши состоит из отрезка RN и пути до точки R. Без огр. общности будем считать, что R лежит на PB. Т.к. на RN мышь поливается вдвойне, удвоим длину RN. А наикратчайший способ дойти до R – по прямой BR, тогда путь лежит на нормальн окр-ти.

СМ. СЛЕД. ЛИСТ.

ЧИСТОВИК

Обозначим радиус действия поливалки за r. Тогда RN (по т. косинусов для $\triangle ARN$) равен

$$RN=\sqrt{AR^2+AN^2-2AR\cdot AN\cdot\cos\alpha}=\sqrt{r^2+\frac{r^2}{4}-r^2\cos\alpha}=r\sqrt{5/4-\cos\alpha}.$$

Ну а путь до R равен $S_1=r-BR$. ~~Тогда~~ А $BR=\sqrt{r^2+r^2-2r^2\cos\alpha}$ (по т. косинусов для $\triangle ARB$), т.е. путь до R равен

$$S_1=r-r\sqrt{2-2\cos\alpha}.$$ Прибавим к этому $2RN$:

$$S=S_1+2RN=r\left(1-\sqrt{2-2\cos\alpha}+2\sqrt{5/4-\cos\alpha}\right)=r\left(1-\sqrt{2-2\cos\alpha}+\sqrt{5-4\cos\alpha}\right).$$

Теперь, чтобы найти экстремумы функции, ~~возьмём~~ продифференцируем S по $\cos\alpha$:

$\cos\alpha=x$,

$$S'=\left(r\left(1-\sqrt{2-2\cos\alpha}+\sqrt{5-4\cos\alpha}\right)\right)'=r'-\left(\sqrt{2-2\cos\alpha}\right)'\cdot r+\left(\sqrt{5-4\cos\alpha}\right)'\cdot r=$$

$$=r\left((5-4x)^{0.5}-(2-2x)^{0.5}\right)'=r\left(\frac{1\cdot(-4)}{2\sqrt{5-4x}}-\frac{1\cdot(-2)}{2\sqrt{2-2x}}\right)=r\left(\frac{-2}{\sqrt{5-4x}}+\frac{1}{\sqrt{2-2x}}\right)=0.$$

Тогда $\frac{1}{\sqrt{2-2x}}=\frac{2}{\sqrt{5-4x}}$, $x\neq1$, $\cos\alpha\neq1$, $\alpha\neq0$, $x\neq 5/4$, $\cos\alpha\neq 5/4$.

$$\sqrt{5-4x}=2\sqrt{2-2x}$$

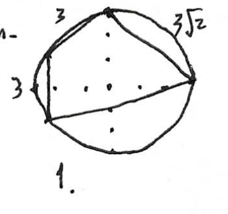
$5-4x=8-8x$, $4x=3$, $x=\frac34$. (Если $\cos\alpha=1$, $\alpha=0$, то $S=2r$, а если $x=\frac34=\cos\alpha$, то $\alpha=\arccos\frac34$, и тогда $S=r\left(1-\sqrt{2-2\cdot\frac34}+\sqrt{5-4\cdot\frac34}\right)=$
$=r\left(1-\sqrt{0,5}+\sqrt2\right)<2r$, => это ~~экстрем~~ минимум. А длина пути мыши равна $S_1+RN=r-r\sqrt{2-2\cos\alpha}+r\sqrt{5/4-\cos\alpha}=r\left(1-\sqrt{0,5}+\sqrt{0,5}\right)=r=\frac{1}{2+\sqrt2}$.

Ответ: $\frac{1}{2+\sqrt2}$.

ЗАДАЧА 3. Возможны 2 ситуации:

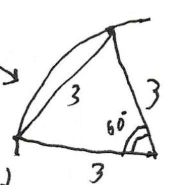
1) наши 3 стороны идут в порядке $3, 3, 3\sqrt2$ (или $3\sqrt2, 3, 3$)

2) они идут в порядке $3, 3\sqrt2, 3$.

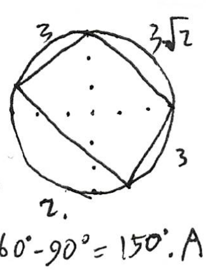


1.

В обоих случаях на стороны длиной 3 опираются центральные углы по 60° (т.к. радиус равен стороне, получаем равносторонний 3-ник),



а на $3\sqrt2$ опирается центр. угол 90° (по т. косинусов $(3\sqrt2)^2=3^2+3^2-2\cdot3^2\cos\alpha$ $=18=18-18\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=0$, $\alpha=90°$). Поэтому на 4 сторону опирается угол $\beta=360°-2\cdot60°-90°=150°$. А площадь 4-ника равна сумме 4 3-ников, ~~ина~~ вершины - центр и вершины 4-ника



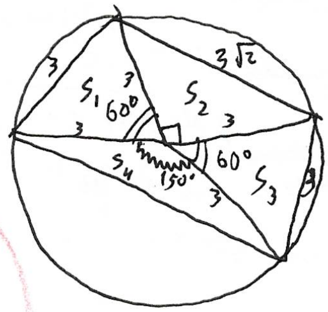
2.

~~$S_3=$~~

СМ. ОБОРОТ.

чистовик

$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4.$



$S_1 = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{9}{2}(p-3)^3} = \sqrt{\frac{9}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \sqrt{\frac{243}{16}} =$

$= \frac{9}{4}\sqrt{3}.$

$S_3 = S_1 = \frac{9}{4}\sqrt{3}$

$S_2 = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}.$

$S_4 = \frac{3 \cdot 3 \cdot \sin 150°}{2} = \frac{9}{2} \cdot \sin 30° = \frac{9}{4}.$

$S = \frac{9}{4}\sqrt{3} \cdot 2 + \frac{9}{2} + \frac{9}{4} = \frac{27}{4} + \frac{9 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{27 + 18\sqrt{3}}{4}.$

Ответ: $\frac{27+18\sqrt{3}}{4}.$

ЗАДАЧА 4. Обозначим $\sin(\pi x)$ за a, $\sin(2\pi x)$ за b, $\sin(4\pi x)$ за c.

Тогда

$a^3 - b^3 + c^3 = (a-b+c)^3 = a^3 - b^3 + c^3 - 6abc + 3a^2c + 3c^2a + 3b^2c + 3b^2a - 3ba^2 - 3bc^2$

$-2abc + a^2c + c^2a + b^2c + b^2a - ba^2 - bc^2 = 0$

$a(b-c)^2 + a^2(c-b) + b^2c - bc^2 = ab^2 + ac^2 - 2abc + a^2c + a^2(-b) + b^2c - bc^2 = 0$

$\cancel{ab - ac + a^2}$

$(b-c)(ab - ac - a^2 + bc) = 0$

$b - c = 0$ или $-a^2 - ac + ab + bc = 0$

$\sin(2\pi x) = \sin(4\pi x)$

$2\pi x + 2\pi k = 4\pi x$ или $\pi - 2\pi x + 2\pi k = 4\pi x$ $(k \in \mathbb{Z})$

$x + k = 2x$

$k = x,$

при $x \in [0{,}3; 1{,}6]$

$k = x = 1$

$1 + 2k = 6x$

$k = 0: x = 1/6 < 0{,}3$

$x = \frac{1}{2}.$

$x = \frac{5}{6}$

$x = \frac{7}{6}$

$x = 1{,}5$

$x = \frac{11}{6} > 1.6.$

$a^2 + ac - ab - bc = 0$

$(a-b)(a+c) = 0$

$a = b$ или $a = -c$

$\sin(\pi x) = \sin(2\pi x)$

$\pi x = 2\pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

или

$\pi - \pi x = 2\pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x + 2k = 0,$

$k = -1: x = 2 > 1.6$

$k = 0: x = 0 < 0.3.$

$1 - x = 2x + 2k$

$-3x = 2k - 1$

$x = \frac{1-2k}{3}$

$k = 0: x = \frac{1}{3}$ $k = -1: x = 1$

$k = 1: x = -\frac{1}{3} < 0{,}3$ $k = -2: x = \frac{5}{3} > 1.6$

$\sin(\pi x) = -\sin(4\pi x) =$

$= \sin(-4\pi x).$

$\pi x + 2\pi k = -4\pi x, k \in \mathbb{Z}$

или

$\pi - \pi x + 2\pi k =$

$= -4\pi x, k \in \mathbb{Z}.$

$5x + 2k = 0,$

$x = \frac{-2k}{5}$, т.е.

$k = 0: x = 0 < 0.3$

$k = -1: x = 0.4.$

$k = -2: x = 0.8$

$k = -3: x = 1.2$

$k = -4: x = 1.6$

см. след. лист.

ЧИСТОВИК

$\pi - \pi x + 2\pi k = -4\pi x, k \in \mathbb{Z}$.

$1 - x + 2k = -4x$

$1 + 2k = -3x$

$x = \frac{1+2k}{-3}$. $k=1: x=-1<0.3$

$k=0: x=-\frac{1}{3}<0.3$

$k=-1: x=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$

$k=-2: x=\frac{-3}{-3}=1$

$k=-3: x=\frac{-5}{-3}=1\frac{2}{3}>1,6$.

Итого, подходят:

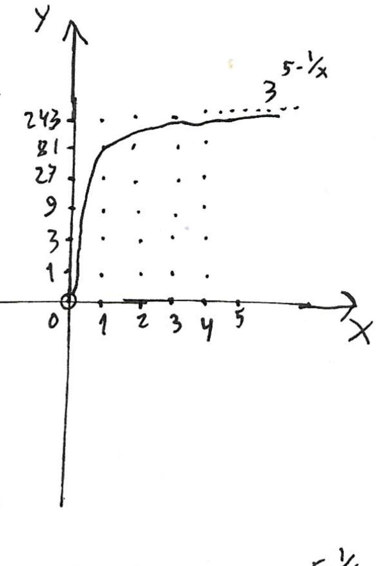
$x=1$;
$x=1/2$;
$x=5/6$;
$x=7/6$,
$x=3/2$,
$x=1/3$;
$x=2/5$;
$x=4/5$,
$x=6/5$;
$x=\frac{8}{5}$.

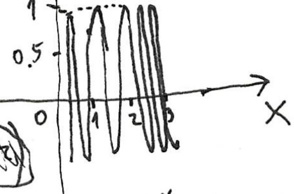
Ответ: $1/3; 2/5; 1/2; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; 1; \frac{6}{5}; \frac{7}{6}; \frac{3}{2}; \frac{8}{5}$. (10 решений).

Задача 2. При $x \to \infty$ $\frac{1}{x} \to 0$, $5-\frac{1}{x} \to 5$, $3^{5-\frac{1}{x}} \to 243$. А $\cancel{\sin 4^x}$

$\sin 4^x = -1$ при $4^x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$,

$x = \log_4\left(2\pi k - \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$. Иначе говоря, чем больше x, тем меньше разница между x_1 и x_2, где $\sin 4^{x_1} = \sin 4^{x_2}$ и нет таких x_3, что $x_3 \in (x_1; x_2)$ и $\sin 4^{x_1} = \sin 4^{x_3}$. А значит, если $a<244$, то до бесконечности





будут продолжаться случаи $\sin 4^x = -1$, $a + \sin 4^x < 243$, и т.к. $3^{5-\frac{1}{x}}$ монотонно растёт, когда-нибудь $3^{5-\frac{1}{x}}$ станет больше $a + \sin 4^x$ (оно может сколь угодно близко подойти к 243)

СМ. ОБОРОТ.

ЧИСТОВИК.

Отсюда при $a<244$ найдётся x такой, что $a+\sin 4^x < \cancel{34}\ 3^{5-1/x}$.

Но при $a=244$ $\quad a+\sin 4^x \geqslant 243 > 3^{5-\frac{1}{x}}$.

Ответ: 244.

ЧЕРНОВИК

$\sqrt{4x^2-12x+9} + \sqrt{9x^2-12x+4} - (\sqrt{x-1})^2 = \sqrt{6+\sqrt{20}} - \sqrt{6-\sqrt{20}}$

$3x-2$

$(2x-3)^2 = 4x^2-12x+9$ $\quad x \geqslant 1$

$(2x-3)^2 > 0$

$2\sqrt{5}$ $\quad (1+\sqrt{5})^2 = 1+5+2\sqrt{5} = 6+\sqrt{20}$

$\sqrt{5}-1$

$x \geqslant 1$

$|2x-3| + |3x-2| - x + 1 = (1+\sqrt{5}) - (\sqrt{5}-1) = 2$

$9 \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

$\alpha = t$

(рад)

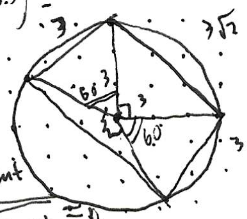
$\alpha \cdot r +$

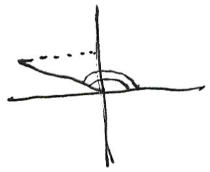
$|2x-3| + |3x-2| - x = 1$ $\quad f(t) = t + \sqrt{5-4\cos t}$

$+ \sqrt{5r^2 - 4r^2\cos\alpha} =$ $\quad |2x-3| + 2x - 2 = 1$

$f'(t) = 1 + ((5-4\cos t)^{0.5})' =$

$= \cancel{1 + 0{,}5(5-4\cos t)}$





$= r(\alpha + \sqrt{5-4\cos\alpha})$ $\quad |2x-3| = 3-2x$

α от 0 до $\frac{2\pi}{3}$ $\quad 3-2x > 0$

$1 + \frac{+4\sin t}{2\sqrt{5-4\cos t}} = 0$

$120 + 90 = 210^\circ$

$2x < 3$

$x < 1{,}5$

$2\sqrt{5-4\cos t} + 4\sin t = 0$ $\quad 150^\circ$

$2\sin t = -\sqrt{5-4\cos t}$

$4\sin^2 t = 5 - 4\cos t$ $\quad \frac{3 \cdot 3 - \cancel{\sin 150^\circ}}{4}$ $\quad (2c-1)^2 = 0$

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$

ЧЕРНОВИК

$a_1 = 2a_3$

$f_1(0) = a_1 \cdot 12 = f_2(0) = a_2 \cdot 18 = a_3 \cdot 24 \Rightarrow$

$a_2 = \frac{4}{3}a_3$ $\quad 4c^2 - 4c + 1 = 0$ $\quad \frac{9}{4} + \frac{9}{2}$

$4 - 4c^2 = 1 - 4c$

$x^2 + b_1 x + 12$ имеет корни $-a_2, -a_3$ $\quad \frac{27}{4} + \frac{18\sqrt{3}}{4}$

$f_1(x) = (x + 2a_3)$

$f_2(x) = (x + \frac{4}{3}a_3)$

$(x + 2a_3)$

$(0{,}5 + \frac{\sqrt{2}}{2})^2$ $\quad \frac{1}{4} +$

$(x + a_2)(x + a_3)$

$a_1 = 6$
$a_2 = 4$
$a_3 = 3$

$(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})^2$

$2 + \sqrt{2}$ $\quad \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ $\quad a_2 a_3 = 12 = \frac{4}{3}a_3^2$ $\quad \frac{27 + 18\sqrt{3}}{4}$

$x = 1$: $\quad 7 \cdot (1 + b_1 + 12)$ $\quad (1+\sqrt{2})^2 =$ $\quad a_1 a_3 = 18 = 2a_3^2$

$5(1 + b_2 + 18)$ $\quad 3 + 2\sqrt{2}$ $\quad a_1 a_2 = 24 = \frac{8}{3}a_3^2$

11 $\quad \cancel{91} + 7b_1 = \cancel{95} + b_2 \cdot 5$

$4(25 + b_3)$ $\quad 5b_2 = 7b_1 - 4$

$a_2 + a_3 = b_1$

$b_2 = \frac{7b_1 - 4}{5}$

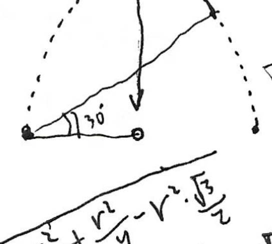
$\frac{6{,}28}{12} + 1{,}34$

STOMPED:

1 3 4 5 6

$\cancel{91} + 7b_1 = \cancel{100} + 4b_3$

$b_3 = \frac{7b_1 - 9}{4}$



$1{,}54$

$3{,}46$

$\sqrt{1{,}54}$

$1{,}25$

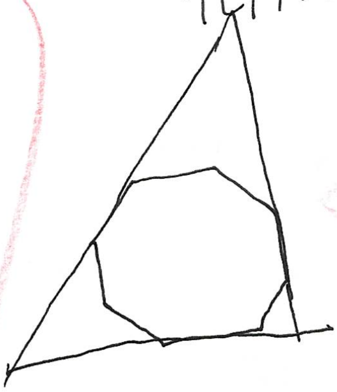
$(\frac{1}{6} \cdot 2\pi r) + r = (\frac{\pi}{3} + 1) r$

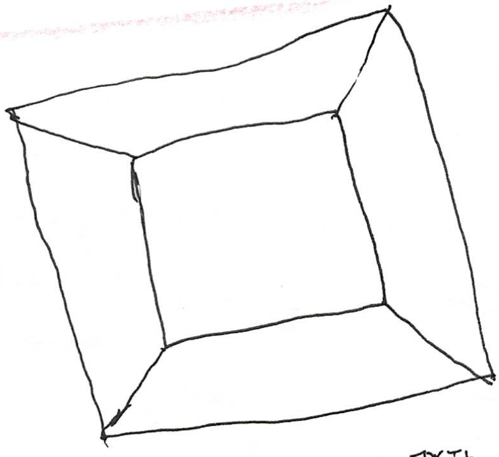
$\frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}} \cdot r$ $\quad \frac{1}{12} \cdot 2\pi r$

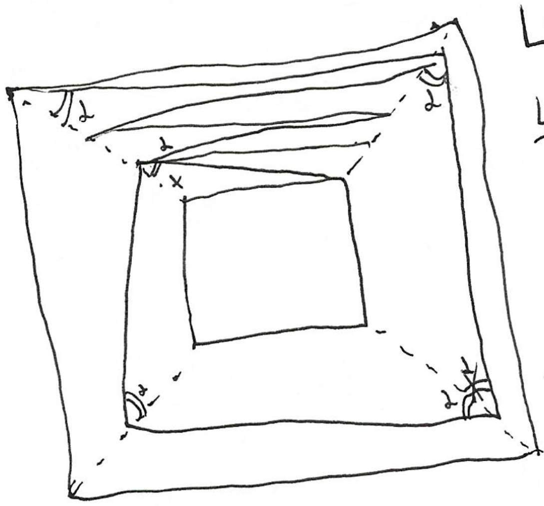
$2\left(\sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4} - r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = r\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$

$\sqrt{5r^2 - 2\sqrt{3}r^2}$

ЧЕРНОВИК







L = весь путь

$\frac{L}{\sqrt{2}} = h$

$(a-b+c)^3 =$

$= a^3 + b^3 + c^3 +$

$+ 3a^2c + 3c^2a +$

$- 3bc^2 - 3ba^2 +$

$+ 3b^2a + 3b^2c -$

$- 6abc$

$a^2c + c^2a + b^2a + b^2c - bc^2 - ba^2 - 2abc = 0$

$\sin^2(\pi x)\sin(4\pi x) + \sin^2(4\pi x)\sin$

$+a(b-c)$

$+a^2(c-b)$

$bc(b-c)$

$(a+bc-a^2)(b-c)=0$

$\sin(2\pi x) = \sin(4\pi x)$

$k + x = 2x$ $k = x$ $x = 1$

$2\pi k + 2\pi x = 4\pi x$

$(\pi - 2\pi x) + 2\pi k = 4\pi x$

$6\pi x = 2\pi k + \pi$

$6x = 2k + 1$

$k=0$ $x = \frac{1}{6}$

$k=1$ $x = \frac{1}{2}$

$k=2$ $x = \frac{5}{6}$

$\cancel{1/6}$ $3/6$ $5/6$ $7/6$ $9/6$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$3^{5-\frac{1}{x}}$