0 109422 650005

10-94-22-65
(159.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Сафонова Сергея Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Сафонов

Е/З

10-94-22-65 (159.6)

65 (шестьдесят пять)

Чистовик стр. 1

Задача №2

$x^3-|x^2-x-2|=12x-13$

Т.к. x^2-x-2 – парабола, с положительным коэффициентом при x^2 и отрицательным коэфф. C, то

$x^2-x-2=0$ $\quad D=1+8=9 \Rightarrow x_1=-1 \quad x_2=2$

при $x\in(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$ $x^2-x-2\geq 0$, а

при $x\in[-1;2]$ $x^2-x-2\leq 0$, то есть

при $x\in[-1;2]$

$x^3+(x^2-x-2)=12x-13$

$x^3+x^2-13x+11=0$

Заметим, что $x=1$ – корень, а значит можем разложить на множители

$(x-1)(x^2+2x-11)=0$

$\left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2+2x-11=0 \quad (2) \end{array}\right.$

2) $x^2+2x-11=0$ $\quad D=4+44=48 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=\frac{-2-4\sqrt{3}}{2}=-1-2\sqrt{3}$

$x_2=-1+2\sqrt{3}$

$x_1\notin[-1;2]$, т.к. $-1=-1$, а $-2\sqrt{3}<0$

$x_2\notin[-1;2]$, т.к. $\sqrt{3}\approx1{,}7\Rightarrow 2\sqrt{3}\approx3{,}4$, а $-1+3{,}4=2{,}4$, но $x=1$ корень

$\Rightarrow$ Ответ: $x=1$

при $x\in(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$

$x^3-(x^2-x-2)=12x-13$

$x^3-x^2-11x+15=0$

Заметим, что $x=3$ – корень, а значит, можем разложить на множители

$(x-3)(x^2+2x-5)=0$

$\left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x^2+2x-5=0 \quad (1) \end{array}\right.$

1) $x^2+2x-5=0$ $\quad D=4+20=24 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=-1-\sqrt{6}$; $x_2=-1+\sqrt{6}$

Но, т.к. $2<\sqrt{6}<3$, то $x_2\notin(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $x_1=-1-\sqrt{6}$; $x_2=3$

Ответ: $x_1=-1-\sqrt{6}$, $x_2=3$, $x_3=1$.

Задача №3

Обозначим стороны одного такого прямоугольника за m и n. Его периметр вычисляется по формуле $P=2(m+n)$, а его площадь $S=m\cdot n$. Тогда, по усл. задачи

$2(m+n)=m\cdot n$

$2m+2n=m\cdot n$

$2m-m\cdot n=-2n$

$m(2-n)=-2n$

$m=\frac{2n}{n-2}$

Т.к. по усл m и n – натуральные числа, $n-2\geq1$, так $\Rightarrow$ $\Rightarrow n\geq3$. Аналогично, проделав те же операции, только заменив m на n, $m\geq3$. Попробуем перебрать значения для m и n.

При $m=3$, $n=6$; при $m=4$, $n=4$; при $m=6$, $n=3$. Если мы представим

Чистовик 2.

Графики зависимости m от n, то мы увидим обратную пропорциональность (если мы опустим то, что $m, n \in N$). Ну а так как график - обратная пропорциональность, ~~а~~ и $n, m \geq 3$, то мы уже знаем все возможные значения для n и m в натуральных числах: $n_1=6; m_1=3$ $n_2=4; m_2=4$, $n_3=3$, $m_3=6$. Ну а так как и два многоугольника из задачи подходят под эти требования, то удобна какая-то комбинация длин сторон из этих трёх. Так что, если засчитать комбинации (3;6) и (6,3) - разными, то ответ: 0

а если нет, то ответ: 10 (легко прикинуть)

Задача №7

Т.к. каждый решил минимум n задач, а Петя больше, чем Вася, то есть минимум n+1 задач, то минимальное ~~(...)~~ кол-во задач, которое мог решить весь класс вместе, ~~(...)~~ равно 20n+1. Теперь, возьмём среднее арифметическое для списка количества людей, которые решили ту или иную задачу. Если оно ≤ 9, то могло получиться так, что каждую задачу решили по ~~8~~ 9 человек и ни одной, что решила хотя бы половина класса. А если > 9, то так уже не получится, так как наибольший элемент ряда ≥ среднего арифметического, то найдётся хотя бы одна задача, которую решили минимум 10 человек. А мы знаем, что среднее арифметическое $= \frac{\text{сумма}}{\text{кол-во}} \Rightarrow \frac{20n+1}{100} > 9$

$20n+1 > 900$

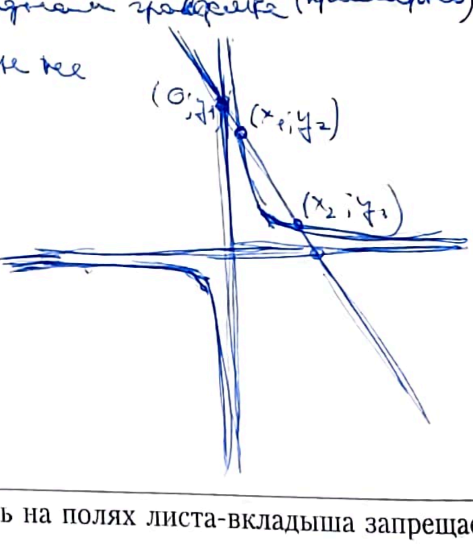
$20n > 899$ т.к. $n \in N$, то $n \geq 45$

Ответ: n=45.

Задача №5

Начертим $y=\frac{1}{x}$ и $y=-18x+a$ на одном графике (примерно)

т.к. отрезки одинаковы, наклоны не меняется, то ~~(...)~~ $2x_1 = x_2$



$-18x+a=\frac{1}{x}$ $|\cdot x$

$-18x^2+ax=1$

(решение уравнения через дискриминант)

$x_1=\frac{-a-\sqrt{a^2-72}}{-36}$ $x_2=\frac{-a+\sqrt{a^2-72}}{-36}$

т.к. $2x_1=x_2$

$2\cdot\frac{-a-\sqrt{a^2-72}}{-36}=\frac{-a+\sqrt{a^2-72}}{-36}$

* решаем уравнение* Чистовик 3

$8a^2=72\cdot 9$

$a^2=9\cdot 9$

$a=\pm 9$

Ответ: $a=-9$; $a=+9$

Задача №1

Ответ: при правильной игре выиграет Аля. Стратегия: Своим первым ходом она может съесть 0,01 от торта, а потом, после ~~каждого~~ каждого хода Вали, доедать так, чтобы за последние 2 хода она и Валя съедали 0,11 от торта (это всегда возможно, так как минимум, который можно съесть = 0,01, а максимум = 0,1; 0,1+0,01=0,11), и спустя 9 таких „циклов" от торта ничего не останется (0,01+9·0,11=1), а, так как именно Валя завершила циклы, то именно Аля съест последний кусок и выиграет.

Задача №6

Если внешний вид кубика не изменился, но каждый жук переполз на другую клетку, то получается, что с всех клеток все уползли свои жуки и приползли новые. Это возможно в нескольких вариантах:
- 3 пары соседних жуков обменялись местами
- 2 тройки обменялись местами между собой
- пара и четвёрка обменялись между собой

(единички, пятёрки, по понятным причинам, отсутствуют)

Ещё, жуки в четвёрке могут по часовой стрелке, и могут против, так что это тоже учтём.

Всего вариантов, жукам перебегать 4^6 (6 жуков делают выбор в 4 варианта)

В первом варианте (2+2+2) выбрать первую пару C_6^2-3 вариантов (3 противоположные пары нельзя выбрать), вторую C_4^2-2, а третья определится автоматически.

В третьем варианте выбрать первую пару C_6^6-3 вариантов, четвёрка определится автоматически, но может бегать в двух направлениях.

Во втором варианте первая тройка может стать одним из 8 вариантов (8 вершин), оставшаяся автоматически определится, но каждая тройка может бегать в двух направлениях, и того, вероятность равна: [illegible] 4

$$\frac{(C_6^2-3)\cdot(C_4^2-2)+(C_6^2-3)\cdot 2+8\cdot 4}{4^6}=\frac{(C_6^2-3)\cdot C_4^2+32}{4^6}$$

Ответ: $\frac{(C_6^2-3)\cdot C_4^2+32}{4^6}$

Черновик

① $2+2+2$: $(C_6^2-3)(C_4^2-2)$ =

② $2+4$: $(C_6^2-3)\cdot 2$ =

$p = 2\pi R$ ③ $3+3$: $8\cdot 2$

$x = 2\pi R_1$

$r_1 = r_2 + r_1$

$r_2 = 0$

10 $\downarrow$ A 9,99 $\downarrow$

10 $\downarrow$ A 9 $\downarrow$ B 8,01 $\downarrow$ A ~~7,01~~ 8,001

$10 \xrightarrow[0,99]{Аня} 9,01 \xrightarrow[0,58]{Валя} 8,43 \xrightarrow[0,42]{Аня} 8,01 \xrightarrow{B} 7,01 \xrightarrow{A} 6,01 \xrightarrow{B} 5,01 \xrightarrow{A} 4,01 \xrightarrow{B} 3,01 \xrightarrow{A} 2,012 \xrightarrow{B} 1,01$

2,01 B $\xrightarrow{A}$ 1,01 $\rightarrow$ B -

0,11

0,1

$0 \xrightarrow{A} 0,99 \xrightarrow{B\ 0,37} 1,36$

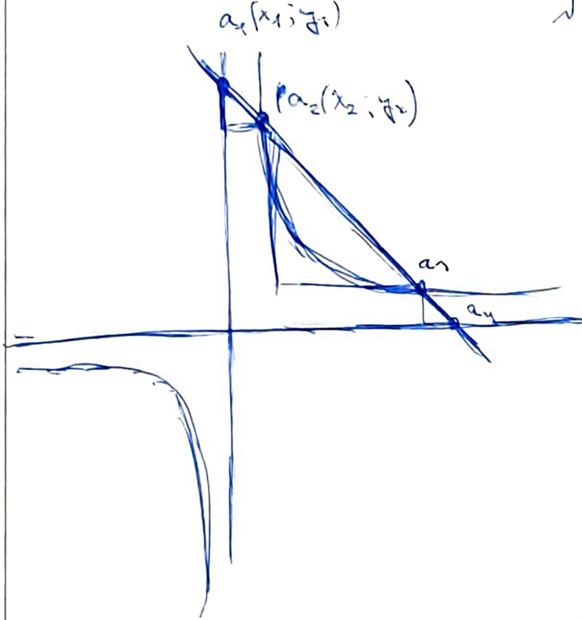
0,99

$2\cdot(C_6^2-3)\cdot(C_4^2-2)+$

Черновик

$\sqrt{5}$

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ - осн



369 =

= 370 x

$-\cancel{18x}+\cancel{1} \quad \frac{1}{x}$

$-18x+\cancel{0}$

$-18x+a = \frac{1}{x}$

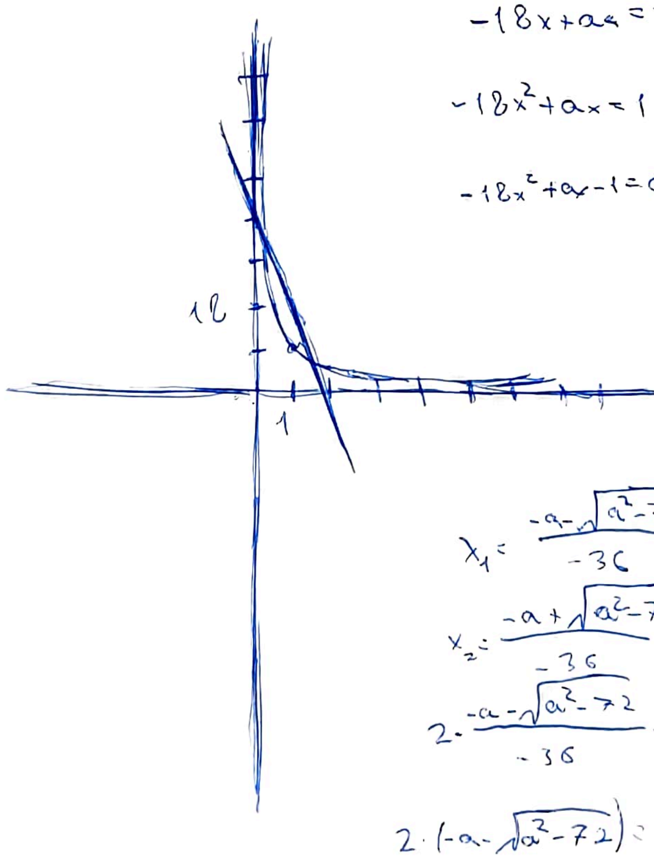
$-18x^2+ax=1$

$-18x^2+ax-1=0$

$D=a^2-4\cdot18=$

$=a^2-72$

$x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-72}}{-36}$



$x_1=\frac{-a-\sqrt{a^2-72}}{-36}$

$x_2=\frac{-a+\sqrt{a^2-72}}{-36}$

$2\cdot\frac{-a-\sqrt{a^2-72}}{-36}=\frac{-a+\sqrt{a^2-72}}{-36}$

$2\cdot(-a-\sqrt{a^2-72})=-a+\sqrt{a^2-72}$

$-2a-2\sqrt{a^2-72}=-a+\sqrt{a^2-72}$

$-a-3\sqrt{a^2-72}=0$

$-3\sqrt{a^2-72}=a \qquad 9(a^2-72)=a^2$

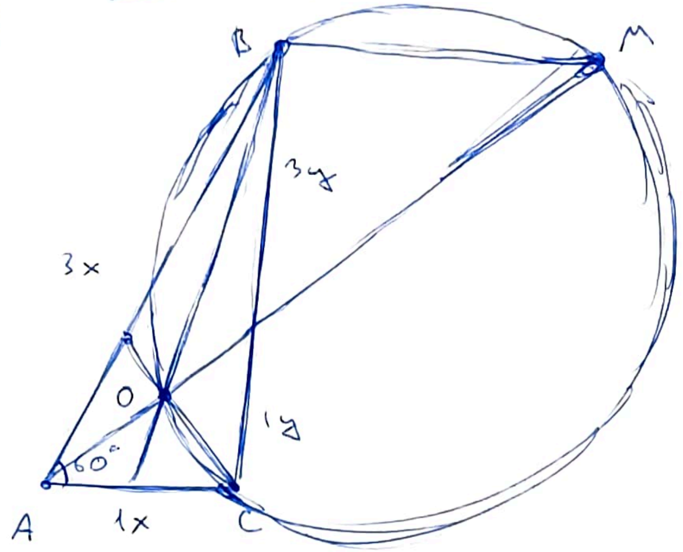
$8a^2-72\cdot9=0$

$8a^2=72\cdot9 \qquad a=\pm9$

$a^2=9\cdot9$

Черновик

№4

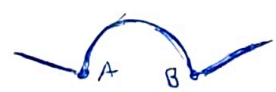


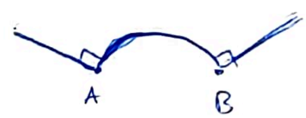
$2n_1 + 2m_1 = n_1 \cdot m_1$

$n_1 = \frac{2m_1}{m_1 - 2}$ $\Rightarrow m_1 \geq 3$; $n_1 \geq 3$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cos AB \cdot AC =$

$= 9x^2 + x^2 - 3x \cdot 1x = 7x^2$





всего вариантов

4^6

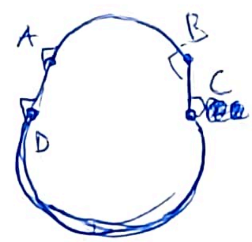
$20 \cdot 100 = 2000$ $\overbrace{7 \text{ класса}}^{x} \geq 20n+1$

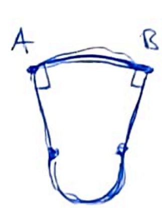
$\frac{20n+1}{100} > 9$

$20n + 1 > 900$

$20n > 899$

$n = 45$ зд.

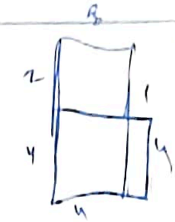




кандидатов

1 ; 5 , 6

Черновик



$6+4=10$

$10/0$

$\sqrt{3}$

$10(0)$

$n_1, m_1, n_2, m_2 \in N$

$2n_1+2m_1 = m_1 n_1$

$2n_1 - n_1\cdot m_1 + 2m_1 = 0$

$n_1(2-m_1)+2m_1 = 0$

$n_1(2-m_1) = -2m_1$ $\quad 2m_1 = 5m_1 - 10$

$-3m_1 = -13$

$n_1 = \frac{2m_1}{m_1-2}$ $\quad m_1 \geq 3$

$n_1 = 3$	4	6
$m_1 = 6$	4	3

$m_1 = (0{,}5m_1-1)\cdot\frac{2m_1}{m_1-2}$

$m_1 = \frac{m_1^2-2m_1}{m_1-2}$

$m_1 - \frac{m_1^2-2m}{m_1-2} = 0$

$m_1(m_1-2) - m_1^2 - 2m = 0$

$2m_1 = 4m_1 - 8$

$-2m = -8$

$m = 4$

$2m_1 \vdots m_1 - 2$

$2m_1 = d\cdot(m_1-2)$

$d = \frac{2m_1}{m_1-2}$

$d = n_1$

$2m_1 = n_1\cdot(m_1-2)$

$2m_1 = 8m_1 - 16$

-6

$m_1 = (0{,}5m_1-1)\cdot n_1$

$n_1 = \frac{2m_1}{m_1-2}$

$2m_1 = 6m_1 - 12$

$-4m_1 = -12$

$m_1 = 3$

$2m_1 \vdots n_1 \Rightarrow m_1 \vdots n_1$

$2m_1 \vdots m_1 - 2$

$2m = 40m - 80$

$-38m = -80$

$m = -\frac{80}{38}$

$m_1 = d\cdot n_1$

$n_1 = \frac{2m_1}{m_1-2}$

$d = \frac{m_1}{n_1}$

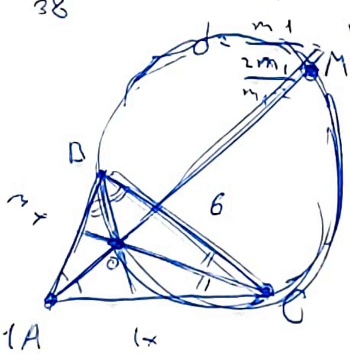
$d = \frac{m_1}{\frac{2m_1}{m_1-2}}$

$\frac{m_1(m_1-2)}{2m_1} = \frac{m_1^2-2m_1}{2m_1} = 0{,}5m_1-1$

$2m_1 = 3m_1 - 6$

$-m_1 = -6$

$m_1 = 6$



$$\begin{cases} 2n_1+2m_1 = m_1\cdot n_1 \\ 2n_2+2m_2 = m_2\cdot n_2 \\ m_2\cdot n_2 = m_1\cdot n_1 + (A \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_1 = \frac{2m_1}{m_1-2} \\ n_2 = \frac{2m_2}{m_2-2} \\ m_2\cdot\frac{2m_2}{m_2-2} = m_1 \end{cases}$$

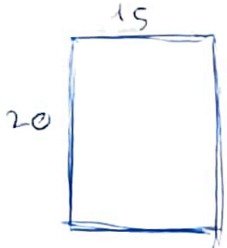
$2m^2 \mid m_2 - 2$

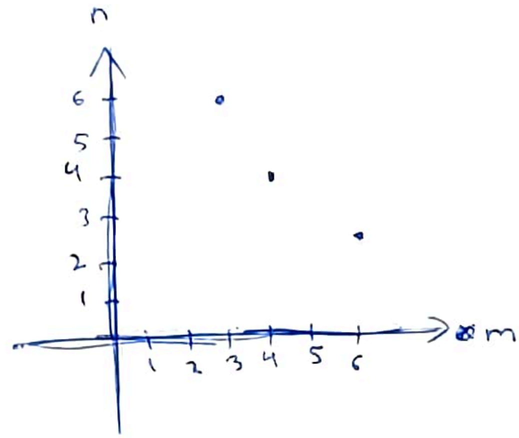
$-\ 2m^2 - 4m \mid 2m$

0

$+4m$

Черновик





$\sqrt{2}$

$x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13$

~~когда~~ $x^2 - x - 2$

$D = 1 + 8 = 9$ $\quad x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$

$x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$

когда $x^2 - x - 2 \geq 0$ $\quad x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

$x^3 - (x^2 - x - 2) = 12x - 13$

$x^3 - x^2 + x + 2 = 12x - 13$

$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$ корень: 3

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 11x + 15 & x - 3 \\ \underline{x^3 - 3x^2} & x^2 + 2x - 5 \\ 2x^2 - 11x + 15 & \\ \underline{2x^2 - 6x} & \\ -5x + 15 & \\ \underline{-5x + 15} & \\ 0 & \end{array}$$

$(x-3)(x^2 + 2x - 5) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ x^2 + 2x - 5 = 0 \quad 1) \end{array}\right.$$

1) $x^2 + 2x - 5 = 0$ $\quad D = 4 + 20 = 24$

$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{24}}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{6}}{2} = -1 - \sqrt{6}$

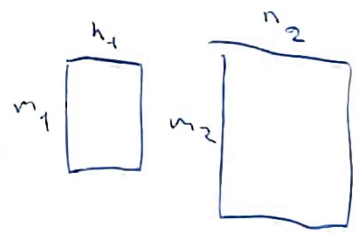
$x_2 = -1 + \sqrt{6}$

$2 < \sqrt{6} < 3$

$1 < -1 + \sqrt{6} < 2$

по ограничениям $x_1 = -1 - \sqrt{6}$

$n_1, m_1, n_2, m_2 \in N$



когда $x^2 - x - 2 \leq 0$ $\quad x \in [-1; 2]$.

$x^3 - (-1 \cdot (x^2 - x - 2)) = 12x - 13$

$x^3 - (-x^2 + x - 2) = 12x - 13$

$x^3 + x^2 - x - 2 = 12x - 13$

$x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 - 13x + 11 & x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} & x^2 + 2x - 11 \\ 2x^2 - 13x + 11 & \\ \underline{2x^2 - 2x} & \\ -11x + 11 & \\ -11x + 11 & \end{array}$$