



66-19-28-76
(159.2)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Свищева Александра Дмитриевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«13» апреля 2025 года

Подпись участника
Свищ

Черновики

$$x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13$$

$$x^2 - x - 2 = 0; \rho = 1 + 8 = 9; \begin{cases} x_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$



$$① x^2 - x - 2 \geq 0; x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$$

$$x^3 - x^2 + x + 2 = 12x - 13$$

$$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$$

$$3^3 - 3^2 - 11 \cdot 3 + 15 = 27 - 9 - 33 + 15 = 15 - 33 = -18 \neq 0$$

$$x^3 - x^2 - 11x + 15 \mid x-3$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 11x \\ - 2x^2 - 6x \\ \hline -5x + 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -5x + 15 \\ -5x + 15 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ x^2 + 2x - 5 = 0; D_1 = 1 + 5 = 6; x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{1} = -1 \pm \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\text{Корни: } -1 - \sqrt{6}; 3$$

$$② x^2 - x - 2 < 0; x \in (-1; 2)$$

$$x^3 + x^2 - x - 2 = 12x - 13$$

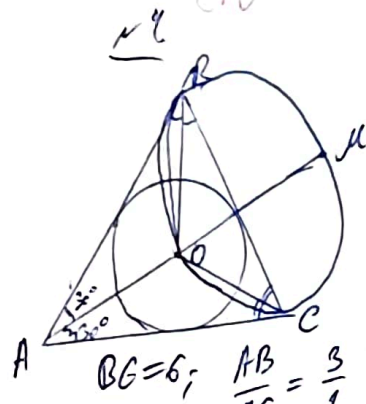
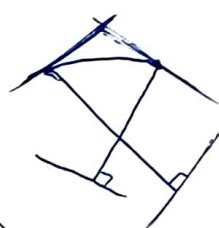
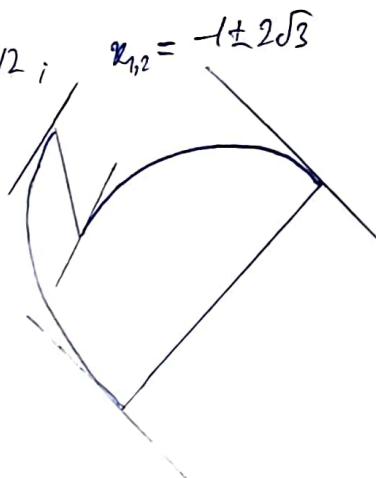
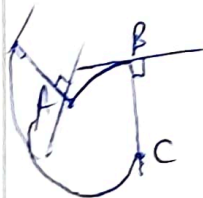
$$x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0$$

$$x=1; \begin{array}{r} x^3 + x^2 - 13x + 11 \mid x-1 \\ \hline x^3 - x^2 \\ \hline 2x^2 - 13x + 11 \\ - 2x^2 + 2x \\ \hline -11x + 11 \\ -11x + 11 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ x^2 + 9x - 11 = 0; D_1 = 1 + 11 = 12; x_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$$

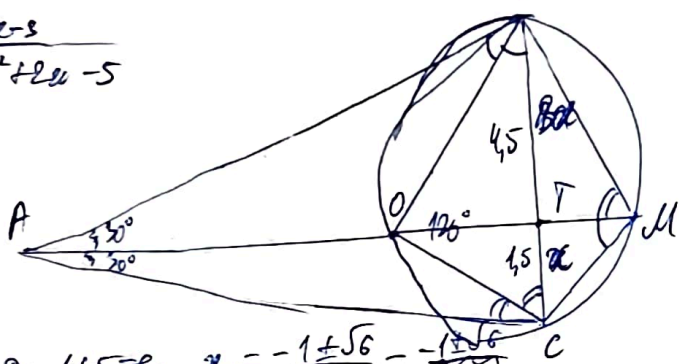
$$\text{Корни: } 1; 5$$

$$\text{Ответ: } -1 - \sqrt{6}; 1; 3.$$



$$BG=6; \frac{AB}{AC} = \frac{3}{1} \text{ или } 3$$

$$\angle BAC = 60^\circ$$

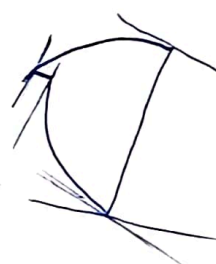


$$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{1} > \frac{BT}{TC} = \frac{3}{1}$$

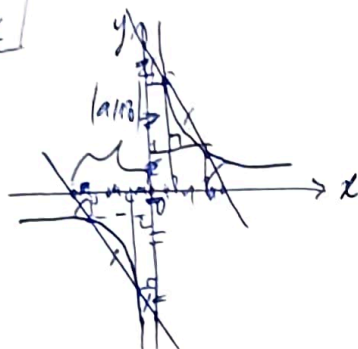
$$\frac{6}{4} = 1.5 = \frac{3}{2}; \frac{6}{4} \cdot 3 = \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$R = \frac{6}{\sin 120^\circ} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

$$r = \frac{\frac{9}{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{9}{2}$$



Черковик



$$y = -13x^2 + a$$

г. перес. с Oy: $(0; a)$

г. перес. с Ox: $(\frac{a}{13}; 0)$

$$0 = -13x^2 + a$$

$$a = 13x$$

$$x = \frac{a}{13}$$

W III

$$y = \frac{1}{2}; y = -13x^2 + a$$

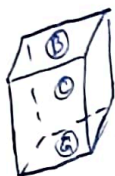
$$\frac{1}{2} = -13x^2 + a \quad | \cdot x + 0; \quad -13x^2 + ax - \frac{1}{2} = 0$$

$$13x^2 - ax + \frac{1}{2} = 0$$

$$D = a^2 - 72$$

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 72}}{26}; \quad y_1 = \frac{36}{a + \sqrt{a^2 - 72}}$$

$$x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 72}}{26}; \quad y_2 = \frac{36}{a - \sqrt{a^2 - 72}}$$



134 III

$$\textcircled{1} \quad \frac{|a|}{13-3} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 72}}{36} - \frac{a - \sqrt{a^2 - 72}}{36} = \frac{2\sqrt{a^2 - 72}}{36} = \frac{\sqrt{a^2 - 72}}{18}$$

$$|a| = 3\sqrt{a^2 - 72}$$

$$a^2 = 9a^2 - 9 \cdot 72$$

$$9 \cdot 72 = 8a^2 \quad | :8$$

$$a^2 = 81$$

$$a = \pm 9$$

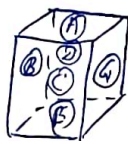
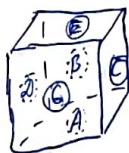
$$\textcircled{2} \quad \frac{a - \sqrt{a^2 - 72}}{36} - \frac{a^2}{18} = \frac{|a|}{36} \quad | \cdot 36$$

$$a - \sqrt{a^2 - 72} - 2a = |a|$$

$$\sqrt{a^2 - 72} + |a| = 0$$

$$a^2 - 72 = 0$$

$$a^2 = 72$$



~~Для G - 4 вар. (P=1)~~

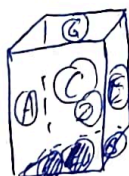
~~Для C - 1 вар. не рассуждать~~

Вариант Рассм. 2 соседних кубка G и C.

1) Если G на место C, то для C 4 в. $P=1$

Если G на противоп. у. для C, то $P=1$, $\frac{1}{6}$

Если на одну из соседних для C, то $P=0,5$, 2 в.



?

Черновик

a и b
 c и d

$$2a + 2b = ab + a + b$$

$$2 + \frac{2b}{a} = b + 1 + \frac{b}{a}$$

$$4 : (b-2)$$

$$b \neq 1$$

$$1; 2; 4; -1$$

$$b=3 \quad b=4 \quad b=6 \quad b=1$$

Если $b=1$, то $a \notin \mathbb{N}$

Если $b=3$, то $a=6$

Если $b=4$, то $a=4$

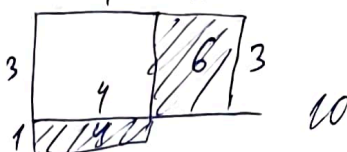
Если $b=6$, то $a=3$

$$a(2-b) = -2b$$

$$a(b-2) = 2b$$

$$a = \frac{2b}{b-2} = \frac{2b-4+4}{b-2} = 2 + \frac{4}{b-2}$$

Если разность, то 3×6 и 4×4

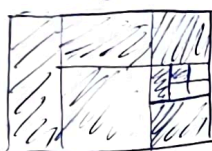


Не менее 10 решений; ≥ 10

100 задач, каждый $\geq n$

Всего минимум решили 20n задач

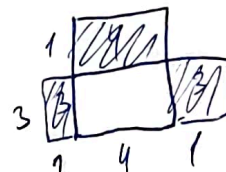
20



15 Куски ≥ 3 .

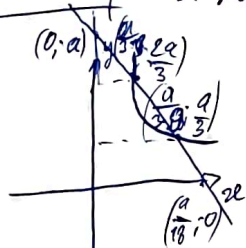
Быть можно ~~не менее~~ 30.

$\angle =$



Необходимо: 2 куска общей площадью < 6 .

Противник не может сделать надрез, выйдет, а последний даст победу



$$\left(\frac{a}{18-3}, \frac{2a}{3} \right)$$

$$\left(\frac{a}{24}, \frac{2a}{3} \right)$$

$$\frac{2a}{3} = -\frac{2a}{3} + a$$

$$\frac{4a}{3} = a;$$

$$\frac{2a}{3} = -\frac{a}{3} + a$$

$$\frac{2a}{3} = -\frac{a}{3} + a \quad \text{— верно}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{24} = \frac{3}{a} \\ \frac{a}{18-3} = \frac{3}{a} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2a}{3} = \frac{3-18}{a} \\ \frac{a}{3} = \frac{24}{a} \end{cases} \quad \begin{cases} 2a^2 = 61-2 \\ a^2 = 61 \end{cases} \quad a = \pm 9$$

Числовик N2 $x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13$

Страница 1

$$\textcircled{1} \begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0; \\ x^3 - x^2 + x + 2 = 12x - 13 \end{cases} ; \begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty) \\ x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

(1) Находим корни, используя т. Безу при разложении на множители.

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 + \sqrt{6} \\ x_3 = -1 - \sqrt{6} \end{cases}$$

Решения системы являются $x_1 = 3$ и $x_3 = -1 - \sqrt{6}$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x^2 - x - 2 < 0 \\ x^3 + x^2 - x - 2 = 12x - 13 \end{cases} ; \begin{cases} x \in (-1, 2) \\ x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 + 2\sqrt{3} \\ x_3 = -1 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Решение системы: $x_1 = 1$

Решение уравнения: $\begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \\ x = -1 - \sqrt{6} \end{cases}$

Ответ: $-1 - \sqrt{6}; 1; 3$.

N3 Пусть длины сторон прям-ка равны a и b . $a, b \in \mathbb{N}$

$$S_{\square} = P_{\square}; \quad 2(a+b) = ab$$

$$a(2-b) = -2b$$

Если $b=2$, то $0 = -2 \cdot 2$ - неверно $\Rightarrow 2-b \neq 0$

$$a = \frac{2b}{b-2} = \frac{2b-4+4}{b-2} = 2 + \frac{4}{b-2}$$

Так как $a \in \mathbb{N}$, то $4 : (b-2) \Rightarrow$ значения b : 1; 3; 4; 6.

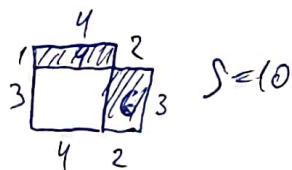
При $b=1$ $a < 0 \Rightarrow b \neq 1$.

При $b=3$ $a=6$

При $b=4$ $a=4$

При $b=6$ $a=3$

$\Rightarrow$ так как по условию вырезали 2 разных
прямо-ка, то возможные варианты
прямоугольников: 4×4 и 3×6 .



Площадь, покрытая одним слоем будет
наименьшей, если наибольшая часть площади
одного прямоугольника будет покрыта другим.

Тогда наименьшая искомая площадь равна 10. Ответ: 10 кв. ед.

Числовик [4]

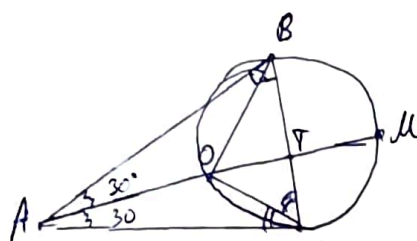
Страница 2

Дано: O -центр;

$$BC=6; \frac{AB}{AC} = \frac{3}{1}; \angle BAC = 60^\circ.$$

Найти: OM

Решение:



По св-ву центра $\angle BOC = 120^\circ$.
Пусть $AC = x$, AB тогда $3x$. Пусть $AM \cap BC = T$.

$$2S_{ATC} = AC \cdot AT \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} x AT$$

$$2S_{ABT} = AB \cdot AT \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot AT$$

$$2S_{ABC} = 2S_{ATC} + 2S_{ABT} = \frac{1}{2} x AT \cdot 4 = 2x AT$$

$$2S_{ABC} = AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ = 3x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AT = \frac{3\sqrt{3}x}{4}$$

По т. Пифагора, т. косинусов: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 60^\circ$

$$36 = 9x^2 + x^2 - 3x^2 = 7x^2$$

$$x^2 = \frac{36}{4}; x = \frac{\sqrt{36}}{2} x = \frac{6}{\sqrt{4}}$$

По св-ву бис-сы Δ : $\frac{AB}{AC} = \frac{BT}{TC}$; $\frac{BT}{TC} = \frac{3}{1} \Rightarrow BT = 4.5$
 $ATC = 4.5$

$$\frac{AO}{OT} = \frac{AC}{CT}; \frac{AO}{OT} = \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{4} \cdot 3} = \frac{4}{\sqrt{4}} \Rightarrow \frac{OT}{AT} = \frac{\sqrt{4}}{4 + \sqrt{4}}$$

$$\frac{OT}{\frac{3\sqrt{3} \cdot 6}{4 \cdot \sqrt{4}}} = \frac{\sqrt{4}}{4 + \sqrt{4}}; OT = \frac{9\sqrt{3}}{8 + 2\sqrt{4}}$$

По т. о произведении отрезков хорд: $OT \cdot TM = BT \cdot TC$

$$\frac{9\sqrt{3}}{8 + 2\sqrt{4}} \cdot TM = \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{2} \mid \cdot \frac{4}{2\sqrt{4}}$$

$$\frac{1}{TM} = \frac{36\sqrt{3}}{216 + 54\sqrt{4}}; TM = \frac{216 + 54\sqrt{4}}{36\sqrt{3}} = \frac{36 + 9\sqrt{4}}{6\sqrt{3}} = \frac{12 + 3\sqrt{4}}{2\sqrt{3}}$$

$$OM = OT + TM; OM = \frac{9\sqrt{3}}{8 + 2\sqrt{4}} + \frac{12 + 3\sqrt{4}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Числовой

15.

$$AB = BC = CD$$

$$AB_1 = B_1C_1 = C_1D_1$$

Рассмотрим случай, когда $a > 0$ и прямая пересекает верхнюю ветвь гиперболы

$$y = -\beta x + a, \text{ тогда } A(0; a), D(\frac{a}{\beta}; 0)$$

$$\text{Тогда } B(\frac{a}{18 \cdot 3}; \frac{2a}{3}), C(\frac{a}{27}; \frac{a}{3}).$$

Так как точки принадлежат гиперболе:

$$y = \frac{1}{x}$$

$$\begin{cases} \frac{2a}{3} = \frac{54}{a} \\ \frac{a}{3} = \frac{27}{a} \end{cases};$$

$$\begin{cases} a = \pm 9; \end{cases} \quad a = -9 \text{ не удовлетворяет условию } a > 0$$

Рассм. случай, когда $a < 0$, прямая пересекает нижнюю ветвь.

$$y = -\beta x + a, \text{ тогда } A_1(\frac{a}{18}; 0), D_1(0; a)$$

$$\text{Тогда } B_1(\frac{a}{27}; \frac{a}{3}), C_1(\frac{a}{54}; \frac{2a}{3})$$

Так как принадлежат гиперболе $y = \frac{1}{x}$:

$$\begin{cases} \frac{a}{3} = \frac{27}{a} \\ \frac{2a}{3} = \frac{54}{a} \end{cases} \Rightarrow a = \pm 9, \quad a = 9 \text{ не удовлетворяет условию } a < 0.$$

Ответ: ~~а~~ при $a = \pm 9$.

Черновик

$$\frac{2OT}{\sqrt{3}} = \frac{1}{4+\sqrt{4}} \quad \frac{AO}{OT} = \frac{x}{4.5} = \frac{2x}{3} = \frac{4}{7}$$

$$OT = \frac{9\sqrt{3}}{2(4+\sqrt{4})} \quad \mu = \frac{(4+\sqrt{4}) \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{12+2\sqrt{4}}{2\sqrt{2}}$$

$$\mu = \frac{4}{2\sqrt{2}} OT = 3x \quad 2S_{ABT} = 3x \cdot AT \cdot \sin 30^\circ$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}(4+\sqrt{4})} \quad 2S_{ATC} = x \cdot AT \cdot \sin 30^\circ$$

$$2S_{ABC} = 3x^2 \cdot \sin 60^\circ$$

$$3x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} x \cdot AT \cdot 4 \quad 1-2$$

$$3x^2 \cdot \sqrt{3} = 4x \cdot AT$$

$$3x \sqrt{3} = 4AT$$

$$AT = \frac{3}{4} \sqrt{3} x$$

$$AO = 2xk \quad 3x^2 \cdot \sqrt{3} = 4x \cdot AT$$

$$OT = 3k \quad AT = \frac{3\sqrt{3}x}{4}$$

$$(3+2x)k = \frac{3}{4} \sqrt{3} x$$

$$k = \frac{\frac{3}{4} \sqrt{3} x}{3+2x}$$

$$OT = \frac{9}{16} x^2 = x^2 + \frac{9}{4} -$$

$$-2 \quad 18^2 = 9^2 \cdot 2^2 = 3^4 \cdot 2^2$$

$$36 = 4x^2 - 6x^2 \cdot \frac{1}{2} = 4x^2 - 3x^2 = x^2; x=6$$

$$AT = \frac{9\sqrt{3}}{2}; OT = \frac{9\sqrt{3}}{10}; AO = \frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = \frac{18\sqrt{3}}{5}$$

$$OC = \sqrt{\frac{3^5 \cdot 2^2}{5^2} + 36}$$

$$\frac{6}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 6$$

$$OC = \sqrt{\frac{972}{25} + 36 - 2 \cdot \frac{18\sqrt{3}}{5} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$\frac{OT}{\frac{3\sqrt{3} \cdot 3}{2 \cdot \sqrt{4}}} = \frac{\sqrt{4}}{4+\sqrt{4}}; \frac{OT \cdot 2\sqrt{4}}{9\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4}}{4+\sqrt{4}}$$

$$\frac{2OT}{9\sqrt{3}} = \frac{1}{4+\sqrt{4}} \quad 1 \cdot 9\sqrt{3} : 2; OT = \frac{9\sqrt{3}}{8+2\sqrt{4}}$$

$$\frac{9\sqrt{3}}{8+2\sqrt{4}} + \frac{12+3\sqrt{4}}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2} \left(\frac{3\sqrt{3}}{4+\sqrt{4}} + \frac{4+\sqrt{4}}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{9+16+7+8\sqrt{4}}{4\sqrt{3}+\sqrt{21}} \right) = \frac{32+8\sqrt{4}}{4\sqrt{3}+\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{(16+4\sqrt{4}) \cdot 3}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{5} \cdot \sqrt{4})}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(4+\sqrt{4}) \cdot 4}{4+\sqrt{4}} = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{9\sqrt{3}}{2(4+\sqrt{4})} + \frac{3(4+\sqrt{4})}{2\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}\sqrt{3}}{2 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 4}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{27+48+21+12\sqrt{4}\sqrt{3}}{2\sqrt{3}(4+\sqrt{4})} = \frac{24(4+\sqrt{4})}{2\sqrt{3}(4+\sqrt{4})} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \quad \frac{27+3 \cdot 4^2}{2 \cdot 4\sqrt{3}} =$$