



46-68-07-40
(159.7)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Малочасов
наименование олимпиады

ПО МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Родина Азиза Тимуровна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

[Подпись]

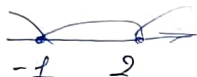
46-68-07-40
(159.7)

Черновик

1

N2

$$x^3 - (x^2 - x - 2) = 12x - 13 \Leftrightarrow x^3 - (x+1)(x-2) = 12x - 13$$



① $x < -1$: $x^3 + x^2 - x - 2 = 12x - 13$; $x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0$.

по Д. БРЗУ: $x = -1 \rightarrow x^3 + x^2 - 13x + 11$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & -13 & 11 \\ \hline & & 2 & -11 & 0 \end{array}$$

$(x^2 + 2x - 11)(x - 1) = 0$

$x = 1$
 $x = -1 \pm 2\sqrt{3}$

② $-1 \leq x < 2$:

$x < -1$, $x^3 - x^2 + x + 2 = 12x - 13$; $x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$.
 $27 - 9 - 33 + 15 = 0$

$x = 3 \rightarrow \begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & -11 & 15 \\ \hline 3 & 1 & 2 & -5 & 0 \end{array} (x-3)(x^2 + 2x - 5) = 0 \dots$

$x > 2$:

N3

$ab = 2(a+b) \Leftrightarrow 2a + 2b - ab = 0 \Leftrightarrow a(2-b) = -2b \Leftrightarrow a = \frac{2b}{b-2}$

1) $b-2 = 2b \Rightarrow$

$2 \div b-2 \rightarrow \begin{array}{l} b-2=1 \quad b=3 \rightarrow a=3 \text{ (1)} \\ b-2=-1 \quad b=1 \rightarrow a=0 \text{ (2)} \\ b-2=2 \quad b=4 \rightarrow a=4 \text{ (3)} \\ b-2=-2 \quad b=0 \text{ (4)} \end{array}$

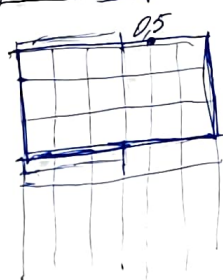
2) $b-2=2$

3) $b-2=1$

4) $b = k(b-2) \quad (k-1)b = 2$

$b \div b-2 \rightarrow b = k(b-2) \quad b = \frac{2k}{k-1} \Rightarrow$

$\frac{0x}{\sin 2}$



$0.5 \cdot 3 \cdot 2 = 3V$

$\angle BAC = 60^\circ$

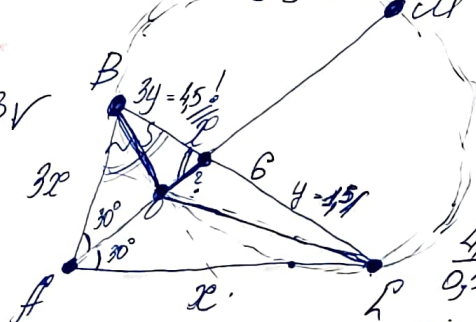
$0x - 2x = \frac{0}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{4}$

$\frac{6}{\sqrt{7}} = \frac{6}{2}$

$\sin \beta = \frac{6\sqrt{3}}{24\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\sin \beta$

$\Rightarrow \begin{array}{l} k=2 \rightarrow b=4 \rightarrow a=4 \text{ (1)} \\ k=3 \rightarrow b=3 \rightarrow a=6 \text{ (2)} \end{array}$



$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{1} \quad \frac{6}{4} = 1.5$

$36 = 9x^2 + x^2 - 6x^2 \cdot \frac{1}{2} = 7x^2$

$x = \frac{6}{\sqrt{7}}$

$\sin \beta \cos \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Числовик

2

№2

$$x^3 - (x^2 - x - 2) = 12x - 13 \Leftrightarrow x^3 - (x+1)(x-2) = 12x - 13$$

$$1) x \leq -1: x^3 - (x^2 - x - 2) = 12x - 13 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x + 2 - 12x + 13 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$$

По Д. Безу: делители 15: $\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 15$.

$$x = 3: 27 - 9 - 33 + 15 = 0 - \text{верно} \Rightarrow x = 3 - \text{корень уравнения}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & -11 & 15 \\ x=3 & 1 & 2 & -5 & 0 \end{array} \Rightarrow (x-3)(x^2+2x-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x^2+2x-5=0 \end{cases}$$

$$x_1 = 1+5=6 \quad x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \pm \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \text{не подходит, т.к. } x < -1$$

$$2) -1 \leq x < 2: x^3 - (-(x^2 - x - 2)) = 12x - 13 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - x - 2 = 12x - 13 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0$$

По Д. Безу: делители 11: $\pm 1; \pm 11$.

$$x = 1: 1 + 1 - 13 + 11 = 0 - \text{верно} \Rightarrow x = 1 - \text{корень уравнения}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & -13 & 11 \\ x=1 & 1 & 2 & -11 & 0 \end{array} \Rightarrow (x-1)(x^2+2x-11) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2+2x-11=0 \end{cases}$$

$$x_1 = 1+11=12 \quad x_{2,3} = -1 \pm 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1-2\sqrt{3} \\ x=-1+2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \text{не подходит, т.к. } -1 \leq x < 2$$

$$3) x \geq 2: x^3 - (x^2 - x - 2) - 12x + 13 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x + 2 - 12x + 13 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \pm \sqrt{6} \\ x=-1 \pm \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \text{не подходит, т.к. } x \geq 2$$

Ответ: $-1-\sqrt{6}; 1; 3$.

№3

Пусть a, b - стороны прямоугольника ($a, b \in \mathbb{N}$).

Периметр прямоугольника численно равен площади $\Rightarrow a \cdot b = 2(a+b) \Leftrightarrow a(b-2) = 2b \Leftrightarrow a = \frac{2b}{b-2}$

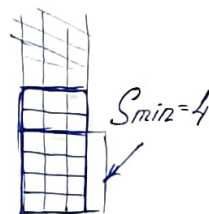
Т.к. $a \in \mathbb{N} \Rightarrow 2 : (b-2)$ или $b : (b-2)$

$$\begin{cases} b-2=2 & | b=4 \Rightarrow a=4 \\ b-2=1 & | b=3 \Rightarrow a=6 \\ b-2=2 & | b=0 \\ b-2=1 & | b=1 \Rightarrow a=-2 \end{cases} \quad b = k(b-2); \quad b = \frac{2k}{k-1} \Rightarrow \begin{cases} k=2 \Rightarrow b=4, a=4 \\ k=3 \Rightarrow b=3, a=6 \end{cases}$$

Получили прямоугольники 4×4 и 3×6 .

Наименьшая площадь столешницы, накрытой одним слоем, достигается в этом случае.

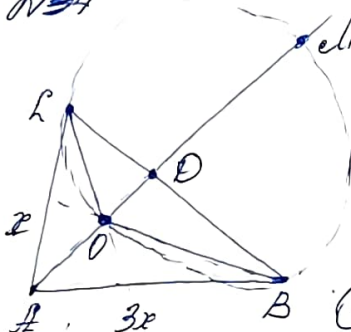
Ответ: 4.



Чистовик

3

№34



Дано:
 $BC=6$
 $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{1}$
 $\angle BAC = 60^\circ$
 $OC = ?$

Решение:

① По свойству медиан: $\frac{AB}{AC} = \frac{BO}{CO} = 3$.

Тогда, $BO=3x$, $CO=x$. $3x+x=6$, $x=1.5$
 $\Rightarrow BO=4.5$, $CO=1.5$.

Пусть $AB=3x$, $AC=x$.

② По теореме косинусов в $\triangle ABC$: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \angle BAC$.

$$36 = x^2 + 9x^2 - 2 \cdot x \cdot 3x \cdot \cos 60^\circ; 36 = 7x^2; x = \frac{6}{\sqrt{7}} \Rightarrow AB = \frac{18}{\sqrt{7}}, AC = \frac{6}{\sqrt{7}}$$

③ По свойству медиан в $\triangle ABD$: $\frac{AB}{BD} = \frac{AO}{OD} = \frac{3}{1}$. Пусть $AO=4x$, $OD=x$.

$$\text{Длина медианы } AD: AD = \sqrt{AB \cdot AC - BO \cdot CO} = \sqrt{\frac{18}{\sqrt{7}} \cdot \frac{6}{\sqrt{7}} - \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{108}{7} - \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{432 - 189}{28}} = \sqrt{\frac{243}{28}} = \frac{9}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$4x + \sqrt{7}x = \frac{9}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}}; x = \frac{45\sqrt{37}}{(4+\sqrt{7})} \Rightarrow OD = \sqrt{7}x = \frac{45\sqrt{37}}{(4+\sqrt{7})}$$

④ По теореме о пересечении медиан: $OD \cdot OC = OA \cdot OB = \frac{27}{4}$

$$\Rightarrow OC = \frac{27}{4OD} = \frac{27}{4 \cdot \frac{45\sqrt{37}}{(4+\sqrt{7})}} = \frac{\sqrt{3}(4+\sqrt{7})}{2}$$

$$OC = OD + OC = \frac{45\sqrt{37}}{(4+\sqrt{7})} + \frac{\sqrt{3}(4+\sqrt{7})}{2} = \frac{9\sqrt{37} + \sqrt{3}(23+8\sqrt{7})}{2(4+\sqrt{7})} = \frac{32\sqrt{37} + 8\sqrt{21}}{8+2\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{37}(4+\sqrt{7})}{2(4+\sqrt{7})} = 4\sqrt{37}$$

Ответ: $4\sqrt{37}$

№4

кроме тех
Пусть все учащиеся решили n задач, а кто-то решил $n+1$ задач. — это худший случай.

Требуется, чтобы минимум половина учащихся решила одну задачу.

При $n=50$ в худшем случае половина участников решают первые 50 задач, другая половина — другие.

Рассмотрим случай, когда все задачи были решены 9 раз (меньше половины): $9 \cdot 100 = 19 \cdot n + n + 1 \Rightarrow n \approx 44.9$
Т.е. при $n=44$ есть случаи, когда нет задачи, которую решила хотя бы половина $\Rightarrow$ при $n=45$ такая задача найдётся.
Ответ: $n=45$.

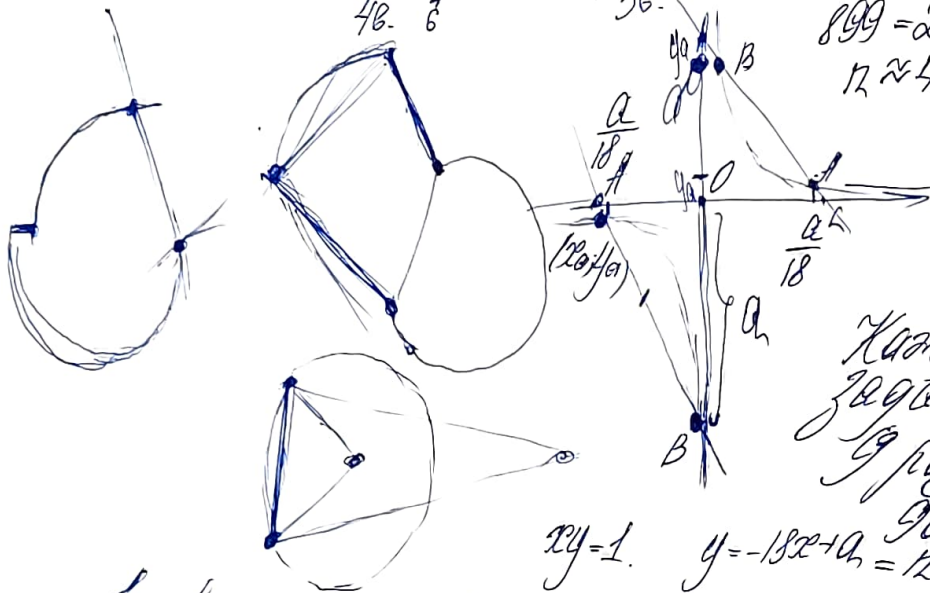
Черновик

1 2 3 4 5 6
2 3 4 5 6
48. 12V
134
36.

$$900 = 20n + 14$$

$$889 = 20n$$

$$n \approx 44,9$$



Характер
задачи
гроз

$$l_1 = l_2$$

AB.

$$xy = 1.$$

$$y = -18x + a = 12 \cdot 19 + (n+1)$$

$$a - 18x \quad y = 0: x = \frac{a}{18}.$$

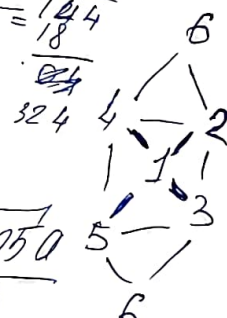
12

$$AB = \left(\frac{a}{18}\right)^2 + a^2 = \frac{18^2 a^2 + a^2}{18^2} = \frac{144}{18^2} = \frac{144}{324}$$

$$y_a = a - (y_a + y_b) = a - y_b = \frac{325a^2}{18^2}$$

$$x_b = \frac{a}{18} - (x_a + x_b) = a - x_a$$

$$AB = \sqrt{\frac{325}{18} \cdot \frac{a}{18}}$$



$$a - 2y_a$$

$$\frac{a}{6} = x_b -$$

$$x_a =$$

$$LO = a^2 + \left(\frac{a}{18}\right)^2 = \frac{325a^2}{18^2}$$

$$LO = \sqrt{\frac{325}{18} \cdot \frac{a}{18}}$$

$$(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 = \frac{\sqrt{325}a}{54}$$

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)^2 + (y_a - y_b)^2 = \dots$$

1ый соверш.
2ой тожд

$$\left(\frac{y_a - y_b}{y_a y_b}\right)^2 + (y_a - y_b)^2 = \frac{\sqrt{325}a}{54}$$

$$\left(\frac{a}{6}\right)^2 + \left(\frac{a}{8}\right)^2 = \frac{325a^2}{54^2}$$

$$48 \quad a^2 \neq$$

2ой на
пустую
2ой на
любую

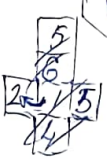
$$\frac{a^2}{48^2} + \frac{a^2}{8^2} = 325$$

$$B: x_b = \frac{a}{54} \quad \frac{a}{54} \cdot \frac{1a}{3} = 1$$

$$y_b = \frac{a}{24} \quad 24 \cdot a^2 = 81$$

$$a = 9.$$

1ый 2ой

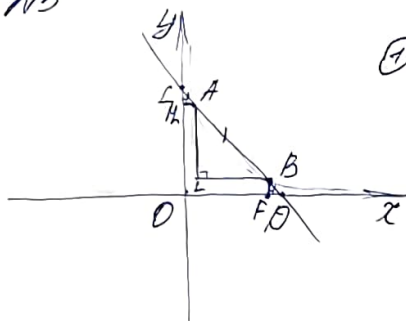


2
1-3

Мистовик

5

N5



① $A, B, D \in y = -18x + 18$

$OK = a, OD = \frac{a}{18}$

② То что $AK = AB = BD$

Пусть $AK \perp Oy, BF \perp Ox \Rightarrow \triangle AKH = \triangle BFD$
(по гипотенузе и острому углу).

т.е. $KB = OD - FD = \frac{a}{18}$

$\triangle AKB = \triangle AKH - \triangle BFD \Rightarrow AK = LB = FD = \frac{a}{18 \cdot 3} = \frac{a}{54}$

$OK = OL = HL = \frac{a}{3}$

③ т.е. $B: KB = OD - FD = \frac{a}{18} - \frac{2a}{54} = \frac{2a}{54}$

$KB = OL = \frac{a}{3}$

т.е. $B \in y = \frac{1}{x} \Rightarrow KB \cdot KB = 1; \frac{2a}{54} \cdot \frac{a}{3} = 1; a = 9$

Аналогично, если $a < 0 \Rightarrow a = -9$

Ответ: ± 9

N6

Чтобы кубик не изменил первоначального вида, на каждой грани должно быть по 1 жуку.
Пусть грани пронумерованы, как на игральной кукле.
Номера жуков — номера граней на кубе.
Куда прыгнул | Куда прыгнул | Варианты прыжка | Варианты
1ый | 6ый | 2020 | 5020

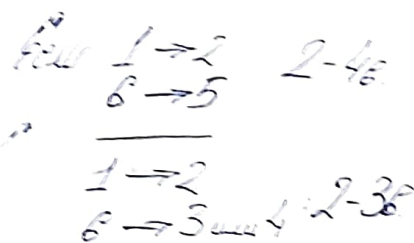
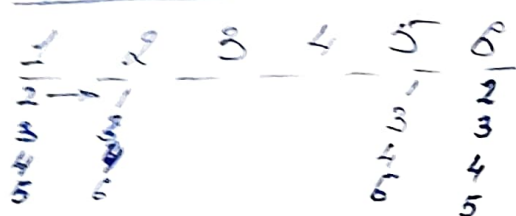
$1 \rightarrow 2$	$6 \rightarrow 3$	- 3вар. (1,4,6)	2	} 12+12=24
	$6 \rightarrow 4$	- 2вар. (1,3,6)	2	
	$6 \rightarrow 5$	- 4вар. (1,3,4,6)	3	
$1 \rightarrow 3$	$6 \rightarrow 2$	- 3вар. (1,4,6)	2	} 14
	$6 \rightarrow 4$	- 2вар. (1,6)	1	
	$6 \rightarrow 5$	- 3вар. (1,4,6)	2	
$1 \rightarrow 4$	$6 \rightarrow 2$	- 3вар. (1,3,6)	2	} 14
	$6 \rightarrow 3$	- 2вар. (1,6)	1	
	$6 \rightarrow 5$	- 3вар. (1,3,6)	2	
$1 \rightarrow 5$	$6 \rightarrow 2$	- 4вар. (1,3,4,6)	3	} 24
	$6 \rightarrow 3$	- 3вар. (1,4,6)	2	
	$6 \rightarrow 4$	- 3вар. (1,3,6)	2	

На каждый вариант второго приходится на 1 вар. меньше вариантов прыжка 5020

Жуки 3 и 4 придется прыгать на свободные грани $\Rightarrow$ все варианты еще числятся на 2.
Вероятность равна: $p = \frac{38 \cdot 4}{4^6} = \frac{17 \cdot 2^3}{2^{12}} = \frac{17}{2^9}$ Ответ: $\frac{17}{2^9}$

Черновик

6



46

36

$$1 \rightarrow 2: 6 \rightarrow 3: 36 \times 26$$

$$6 \rightarrow 4: 36 \times 26$$

$$6 \rightarrow 5: 46 \times 3$$

$$1 \rightarrow 3: 6 \rightarrow 2: 36 \times 2$$

$$6 \rightarrow 4: 26 \times 16$$

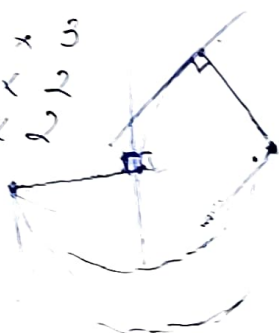
$$6 \rightarrow 5: 36 \times 2$$

$$1 \rightarrow 4: 86$$

$$1 \rightarrow 5: 6 \rightarrow 2: 46 \times 3$$

$$6 \rightarrow 3: 36 \times 2$$

$$6 \rightarrow 4: 36 \times 2$$



$$l = \frac{\pi r^2}{2}$$