0 458081 080006

45-80-81-08
(161.19)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Скабаллanович Полина Алексеевна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
45-80-81-08	75	+	+	+	+	+	–	0	0
45-80-81-08		+	+	+	+	+	–	0	0

6. Рассуждения неверные, ответ неверный

45-80-81-08
(161.19)

$2 \cdot 3 \cdot 12$. Черновик

№1 $\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{9x^2+12x+4}-\left(\sqrt{1(x+1)}\right)^2=$

$=\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}=\sqrt{(\sqrt{6}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{6}-1)^2}=$

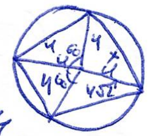
$\sqrt{6\cdot 4}$

$7+2\sqrt{6}$

$2\cdot\sqrt{6}\cdot 1$

$=\sqrt{6}+1-\sqrt{6}+1=2$

По формуле Брахмагупты.



$6+2\sqrt{6}+1$.

$S=\sqrt{(p-4)(p-4)(p-4\sqrt{2})(p-x)}$

$\begin{cases}\sqrt{(2x+3)^2}+\sqrt{(3x+2)^2}-(-(x+1))=2\\ -x+1\geq 0\end{cases}$

$S=p\cdot r$

$2x+3<0$

~~$2x+3+3x+2+x+1=2$~~

$x<-\frac{3}{2}$

x

$\sin 150^\circ=\sin(90^\circ+60^\circ)=$

$=\sin 90^\circ\cdot\cos 60^\circ+\sin 60$

$3x+2<0$

$x<-\frac{2}{3}$

$|2x+3|+|3x+2|+x+1=2$

$1 \quad 1 \quad 0$

$\cos 150^\circ=\cos(90^\circ+60^\circ)=$

$=\cos 90^\circ\cos 60^\circ-\sin 90^\circ\sin 60^\circ=$

$=-\sin 60^\circ=$

№2 $5^{3-\frac{1}{x}}\geq a+\sin 3^x$ — нет неотр. реш. $x>0$

$125\cdot 5^{-\frac{1}{x}}\geq a+\sin 3^x$

Ищем реш. только на $x\leq 0$

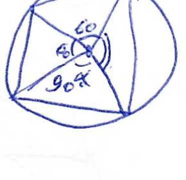
$125\cdot\frac{1}{\cancel{5^x}}$ $\quad\frac{125}{5^x}\geq a+\sin 3^x$

$\frac{125}{5^x}\geq a+1\geq a+\sin 3^x\geq a-1$ при $x=0$.

$360^\circ-120^\circ-90^\circ=$

$125\geq a+\sin 1$

$=240-90=$



$200-50$

$=150^\circ$

$(4\sqrt{2})^2=4^2+4^2-2\cdot 4\cdot 4\cdot\cos\alpha$.

$\cos\alpha=\frac{16+16-32}{2\cdot 4\cdot 4}=0$ $\quad\alpha=90^\circ$

$\frac{125}{5^x} < a + \sin 3^x$ черновик. $x > 0$

$125 \geq \frac{125}{5^x} \geq a + \sin 3^x \geq a + \sin(1)$

$125 < a + \sin(1)$

$\cos^3(\pi x) + \cos^3(2\pi x) - \cos^3(4\pi x) = (\cos(\pi x) + \cos(2\pi x)) - \cos 4\pi x)^3$

$\frac{125}{5^x} < 125 < a + \sin 3^x \leq a + 1$ $a = 124$

$5^{3-x} \geq a + \sin 3^x > 0$ $x \leq 0$

$a^3 + b^3 - c^3 = (a + b - c)^3$

$3^x > 0$

$\cancel{a^3} + b^3 - c^3 = \cancel{a^3} + 3a^2(b-c) + 3a(b-c)^2 + (b-c)^3$ $\frac{\pi}{2} > 1 > 3^x > 0$

$\cancel{b^3} - \cancel{c^3} = 3a^2(b-c) + 3a(b-c)^2 + \cancel{b^3} - 3b^2c + 3bc^2 - \cancel{c^3}$

$3a^2(b-c) + 3a(b-c)^2 - 3b^2c + 3bc^2 = 0$

$\sin 3^x \uparrow\uparrow$ $x \leq 0$

$125 = \frac{125}{5^x} \geq a + \sin(1)$

$3a(b-c)(a+b-c) - 3bc(b-c) = 0$

$3(b-c)(3a(a+b-c) - bc) = 0$

$D \geq 0$

$b - c = 0$ $3a^2 + 3a(b-c) - bc = 0$

$3a(a+b-c) - bc = 0$ $a^2 + 3a(b-c) - 3bc = 0$

$2\cos(2\pi x)\cdot\cos(4\pi x) = \underbrace{\cos 2\pi x + \cos 6\pi x}$

$D = 9(b-c)^2 - 12bc \geq 0$ $3b^2 - 6bc + 3c^2 - 4bc = 3b^2 - 10bc + 3c^2 \geq 0$ $(a - 3b)(a - c) = 0$

$3\cos(\pi x)(\cos \pi x + \cos 2\pi x - \cos 4\pi x) -$

$3\cos^2 \pi x + 3\cdot\cos \pi x \cdot \cos 2\pi x - 3\cos \pi x \cdot \cos 4\pi x - \cos 2\pi x \cdot \cos 4\pi x$

$b^2 - 10bc + 9c^2 = 0$

$3\cos \pi x(\cos \pi x + \cos 2\pi x - (2\cos^2 2\pi x - 1)) =$ $(b - 9c)(b - c) = 0$

$= 3\cos \pi x(\cos \pi x + \cos 2\pi x - 2\cos^2 2\pi x + 1)$ $(b - 3c)(b - \frac{c}{3}) \geq 0$

$x^3 + b_1x^2 + 12x + a_1x^2 + a_1b_1x + 12a_1 = x^3 + (b_2 + a_2)x^2 + (15 + a_2b_2)x + 15a_2$

$(b_1 + a_1)x^2 + (12 + a_1b_1)x + 12a_1$

$(x + a_1)(x^2 + b_1x + 12) = (x + a_2)(x^2 + b_2x + 15)$

$x^2(b_1 + a_1 - b_2 - a_2) + x(a_1b_1 - a_2b_2 - 3) + 12a_1 - 15a_2 = 0$ — ин. реш.

$3,6 \mid 12$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{20}$ $1,6 \cdot 3 = 4,8$ $\sqrt{b_1^2 - 48} < 0$ $b_1 < \sqrt{48}$ $b_2 < \sqrt{60}$

$15 \mid 2$ $7,5$ 19 $4 - 2\sqrt{2}$ $\sqrt{2}\sqrt{3}$ $\sqrt{6}$ 256 $1,6 \cdot 5 = 8,0$

чистовик

№1 $\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{9x^2+12x+4}-\left(\sqrt{-(x+1)}\right)^2=$

$=\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}$ (1)

$$\begin{cases}\sqrt{(2x+3)^2}+\sqrt{(3x+2)^2}-(-(x+1))=\sqrt{(\sqrt{6}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{6}-1)^2}\\ -(x\cancel{+1}+1)\geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}|2x+3|+|3x+2|+x+1=|\sqrt{6}+1|-|\sqrt{6}-1|\\ x\leq -1\end{cases}$$

$$\begin{cases}|2x+3|+|3x+2|=-x-1+\sqrt{6}+1-\sqrt{6}+1\\ x\leq -1\end{cases}$$

$$\begin{cases}|2x+3|+|3x+2|=1-x\\ x\leq -1\end{cases}$$

1) $x\leq -\frac{3}{2}$: $-2x-3-3x-2=1-x$
$(-1{,}5<-1)$
$4x=-6$ $\quad x=-\frac{3}{2}=-1{,}5$ - удовл. ур-ю (1)

2) $-\frac{3}{2}<x\leq -1\ \left(<-\frac{2}{3}\right)$: $2x+3-3x-2=1-x$

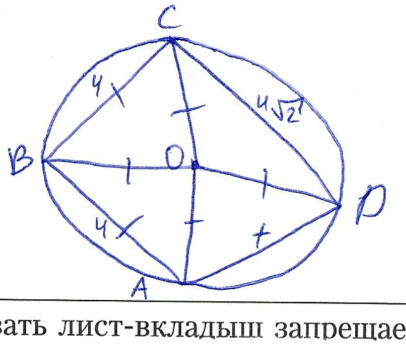
$1=1$ - верно,

значит, любое знач $x\in\left(-\frac{3}{2};-1\right]$ - удовл. ур-ю (1)

Другие случаи не подходят т.к. $x\leq -1$

Ответ: $[-1{,}5;-1]$

№3



Дано: ABCD - впис в окр(O;R), где $R=4$; $AB=BC=4$; $CD=4\sqrt{2}$

Найти: $\max(S_{(ABCD)})$

чистовик

Решение: 1) Пусть, $AD = x$; и $AO = OB = OC = OD = R = 4$ (как радиусы)

2) $AB = AO = BO = 4 \Rightarrow \Delta AOB$ - равност $\Rightarrow \angle AOB = 60°$ $\Rightarrow S_{\Delta AOB} = \cancel{\frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin\angle AOB} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$

3) $BC = BO = CO = 4 \Rightarrow \Delta COB$ - равност $\Rightarrow \angle COB = 60°$

$S(\Delta COB) = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$

4) По теор. косинусов в ΔCOD:

$$CD^2 = CO^2 + OD^2 - 2 \cdot CO \cdot OD \cdot \cos\angle COD$$

$$\cos\angle COD = \frac{16+16-32}{2 \cdot 4 \cdot 4} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \angle COD = 90° \ (1) \\ \angle COD = 270° \ (2) \end{array}\right.$$

(2) - не может быть т.к. $\angle COD + \angle AOB + \angle BOC + \angle DOA = 360°$

~~Рассмотрим (1) случай.~~

Значит, $\angle COD = 90° \Rightarrow \angle DOA = 360° - \angle COD - \angle AOB - \angle BOC = 150°$

~~5) По теор. косинусов в ΔAOD: $\cos 150° = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$~~

~~$AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2AO \cdot OD \cdot \cos\angle AOD$~~

~~$AD = \sqrt{16+16-2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{32+16\sqrt{3}} = 4\sqrt{2+\sqrt{3}}$~~

5) $S(\Delta COD) = \frac{1}{2} \cdot CO \cdot OD = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$ (т.к. $\angle COD = 90°$)

6) $S(\Delta AOD) = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OD \cdot \sin\angle DOA \overset{(*)}{=} \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 4$

(*) $\sin 150° = \cos 60° = \frac{1}{2}$

7) Значит, $S(ABCD) = S(\Delta AOB) + S(\Delta AOD) + S(\Delta BOC) + S(\Delta COD) = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 8 + 4 = 12 + 8\sqrt{3}$ - это и есть максимально возможна пл-щадь ABCD.

Ответ: $12 + 8\sqrt{3}$

45-80-81-08 (161.19)

Чистовик

№ 4 $\cos^3(\pi x)+\cos^3(2\pi x)-\cos^3(4\pi x)=(\cos(\pi x)+\cos(2\pi x)-\cos(4\pi x))^3$

Пусть ~~$a=\pi x, b=2\pi x, c=4\pi x$~~, тогда:

$a=\cos(\pi x)$
$b=\cos(2\pi x)$
$c=\cos(4\pi x)$

$$a^3+b^3-c^3=(a+b-c)^3$$

$$a^3+b^3-c^3=a^3+3a^2(b-c)+3a(b-c)^2+(b-c)^3$$

$$b^3-c^3=\cancel{a^3}+3a^2(b-c)+3a(b-c)^2+b^3-3b^2c+3bc^2-c^3$$

$$3a(b-c)(a+(b-c))-3bc(b-c)=0$$

$$3(b-c)(a(a+b-c)-bc)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} b-c=0 \\ a^2+a(b-c)-bc=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} b=c \\ (a+b)(a-c)=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} b=c \\ \left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=c \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Вернемся к изнач. обознач:

$$\left[\begin{array}{l} \cos(2\pi x)=\cos(4\pi x) \\ \cos(\pi x)=-\cos(2\pi x) \\ \cos(\pi x)=\cos(4\pi x) \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \cos(4\pi x)-\cos(2\pi x)=0 \\ \cos(2\pi x)+\cos(\pi x)=0 \\ \cos(4\pi x)-\cos(\pi x)=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -2\sin(\pi x)\sin(3\pi x)=0 \\ 2\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0 \\ -2\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sin(\pi x)=0 \\ \sin(3\pi x)=0 \\ \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)=0 \\ \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0 \\ \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)=0 \\ \sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \pi x=\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ 3\pi x=\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ \frac{3\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi m, m\in\mathbb{Z} \\ \frac{\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi p, p\in\mathbb{Z} \\ \frac{3\pi x}{2}=\pi q, q\in\mathbb{Z} \\ \frac{5x\pi}{2}=\pi g, g\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=n, n\in\mathbb{Z}\ (1) \\ x=\frac{k}{3}, k\in\mathbb{Z}\ (2) \\ x=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}m, m\in\mathbb{Z}\ (3) \\ x=1+2p, p\in\mathbb{Z}\ (4) \\ x=\frac{2}{3}q, q\in\mathbb{Z}\ (5) \\ x=\frac{2}{5}g, g\in\mathbb{Z}\ (6) \end{array}\right.$$

Найдем какие знач $x\in[0,3;1,6]$

1) $0,3\le n\le 1,6$, $n\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow n=1 \Rightarrow x=1$

2) $0,3\le \frac{k}{3}\le 1,6$

$0,9\le k\le 4,8$, $k\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow k=1;2;3;4 \Rightarrow$

$x=\frac{1}{3};\frac{2}{3};1;\frac{4}{3}$

чистовик

3) $0{,}3 \le \frac{1}{3}+\frac{2}{3}m \le 1{,}6$

$0{,}9 \le 1+2m \le 4{,}8$

$-0{,}1 \le 2m \le 3{,}8$

$-\frac{1}{20} \le m \le 1{,}9$, $m \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow m=0;1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{1}{3};1$

4) $0{,}3 \le 1+2p \le 1{,}6$

$-0{,}7 \le 2p \le 0{,}6$

$-0{,}35 \le p \le 0{,}3$, $p \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow p=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=1$

5) $0{,}3 \le \frac{2}{3}q \le 1{,}6$

$0{,}9 \le 2q \le 4{,}8$

$0{,}45 \le q \le 2{,}4$, $q \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow q=1;2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{2}{3};\frac{4}{3}$

6) $0{,}3 \le \frac{2}{5}q \le 1{,}6$

$1{,}5 \le 2q \le 8$

$0{,}75 \le q \le 4$, $q \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow q=1;2;3;4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{2}{5};\frac{4}{5};\frac{6}{5};\frac{8}{5}$

Следовательно X может принимать значения: $\frac{1}{3};\frac{2}{3};1;\frac{4}{3};\frac{2}{5};\frac{4}{5};\frac{6}{5};\frac{8}{5}$

Ответ: $\frac{1}{3};\frac{2}{3};1;\frac{4}{3};\frac{2}{5};\frac{4}{5};\frac{6}{5};\frac{8}{5}$

№5 $a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3>0$ и для любого знач. x: $f_1(x)=f_2(x)=f_3(x)$

Найти: $a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3=0$

1) Пусть Б.О.О.: x_1, x_2, x_3 - корни $f_1(x)$, т.е. $f_1(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, где $x_1=-a_1$ и по обобщ. теор. Виета: $x_2x_3=12$ и $x_1+x_2=-b_1$

2) $f_1(x_1)=f_2(x_1)=0$ и $f_1(x_2)=f_2(x_2)=0$ и $f_1(x_3)=f_2(x_3)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_2(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, аналогично,

$f_3(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

3) $f_2(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=(x+a_2)(x^2+b_2x+15)$

Пусть $x_1=-a_2$ $(x_1=-a_1) \Rightarrow$ по теор. Виета: $x_2x_3=15$, но из 1 пункта, следует, что $x_2x_3=12$ - прот-е.

Значит, $x_1 \neq -a_2$ и пусть Б.О.О: $x_2 = -a_2$, тогда по теор. Виета $x_1 x_3 = 15$ и $x_1 + x_3 = -\frac{b}{2}$ Чистовик

Аналогично для $f_3(x) = (x+a_3)(x^2+b_3x+20) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, ~~$x_1$ и x_2~~

$x_3 = -a_3$ и $(x_2x_1 = 20$ и $x_1 + x_2 = -b_3)$

4) Следовательно: $\begin{cases} x_2x_3 = 12 \\ x_1x_3 = 15 \\ x_1x_2 = 20 \end{cases}$ и т.к. $a_1, a_2, a_3 > 0$ и $x_1 = -a_1, x_2 = -a_2, x_3 = -a_3$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1, x_2, x_3 < 0$

Значит, $\begin{cases} x_1 = \frac{20}{x_2} \\ x_2x_3 = 12 \\ \frac{20x_3}{x_2} = 15 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = \frac{20}{x_2} \\ x_2 = \frac{12}{x_3} \\ \frac{4 \cdot x_3 \cdot x_3}{12} = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = \frac{20}{x_2} \\ x_2 = \frac{12}{x_3} \\ x_3^2 = 9 \end{cases}$ $(x_3 < 0)$

$\begin{cases} x_3 = -3 \\ x_2 = -4 \\ x_1 = -5 \end{cases} \Rightarrow$ $a_1 = 5;\ a_2 = 4;\ a_3 = 3$
$b_1 = 9;\ b_2 = 8;\ b_3 = 7$

Значит, $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 = 5 + 9 + 4 + 8 + 3 + 7 =$

$= 12 \cdot 3 = 36$

! Почему у $f_1(x)$ обязательно 3 корня?

Пусть это не так, тогда у $f_1(x)$ только 1 корень $x_1 = -a_1$, тогда и у $f_2(x)$ и $f_3(x)$: $x_1 = -a_1$ - точно корень.

1) если $a_1 = a_2$: то при $f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow (x+a_1)(b_1x+12-b_2x\ldots$

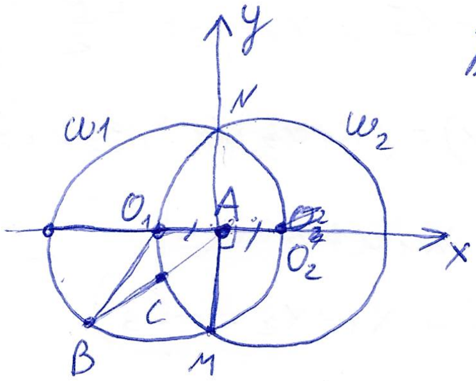
$\Leftrightarrow (x+a_1)(b_1x+12-b_2x-15)=0$ $\begin{cases} x+a_1=0 \\ x(b_1-b_2)=3 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x = -a_1 \\ x = \frac{3}{b_1-b_2} \end{array}\right.$ -

- прот-е. т.к. $b_1 \neq b_2$ ~~т.к. если $b_1 = b_2$~~

Ответ: 36

чистовик

№ 6



Дано: Окр ω_1 с центром O_1 и $R = 2a$ и Окр ω_2 с центром $O_2 \in \omega_1$ и $R = 2a$. (где $a = \frac{2-\sqrt{2}}{5}$)

т. $A \in O_1O_2$ и A – сер. O_1O_2.

$B \in \omega_1$, $C \in \omega_2$.

Найти: $\min(BC + 2CA)$

Решение: 1) Введем ДПСК т, что: $\overrightarrow{O_1O_2} \uparrow\uparrow \overrightarrow{Ox}$ и $\overrightarrow{MN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{Oy}$, где $MN \perp O_1O_2$ (по св-ву общей хорды двух окр-тей)

$MN \cap O_1O_2 = $ т A

т.к. A – сер O_1O_2

Значит, $A(0;0)$, $O_1(-a;0)$, $O_2(a;0)$; $M(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2})$ и $N(0; \frac{a\sqrt{3}}{2})$

тогда окр. ω_1: $(x+a)^2 + y^2 = 4a^2$ и т. $B(b_x; b_y) \in \omega_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(b_x; -\sqrt{4a^2 - (b_x+a)^2})$

Окр ω_2: $(x-a)^2 + y^2 = 4a^2$ и $C(c_x; c_y) \in \omega_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow C(c_x; -\sqrt{4a^2 - (c_x-a)^2})$

~~2) тогда: $BC = \sqrt{(c_x}$ $BC^2 = (c_x - b_x)^2 + (-\sqrt{4a^2-(c_x-a)^2} + \sqrt{4a^2-(b_x+a)^2})^2 =$~~

~~$= c_x^2 + b_x^2 - 2c_xb_x + 4a^2 - (b_x+a)^2 + 4a^2 - (c_x-a)^2 - 2\sqrt{4a^2-(c_x-a)^2}\sqrt{4a^2-(b_x+a)^2} =$~~

~~$AC^2 = (c_x - 0)^2 + (-\sqrt{4a^2-(c_x-a)^2})^2 = c_x^2 + 4a^2 - (c_x-a)^2 = c_x^2 + 4a^2 -$~~

~~$- c_x^2 + 2c_xa - a^2 = 3a^2 + 2c_xa \Rightarrow 2AC = 2\sqrt{3a^2 + 2c_xa}$~~

2) Рассмотрим крайние случаи:

(1) $C \equiv O_1$: $BC + 2CA = BO_1 + 2O_1A = 2BO_1 =$

$= 2 \cdot 2a = 4a = 2 \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{5} = \frac{4-2\sqrt{2}}{5}$

(2) $B \equiv C \equiv M$: $BC + 2CA = 2AM = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{5}$

см. продолж.

черновик

$5^{3^{x}-\frac{1}{x}} \geq a+\sin 3^{x}$ не им реш при $x>0$: $a_{min}=?$

Заметим, что $5^{3-\frac{1}{x}} \geq a+\sin 3^{x}$ не им. реш. при $x>0$

$\Leftrightarrow$ $5^{3-\frac{1}{x}} < a+\sin 3^{x}$ при всех знач. $x>0$.

Оценим это выражение: ($x>0$!)

$\cancel{5^{3-\frac{1}{x}} < 125 \leq a+\sin 3^{x}}$

1) $a+\sin 3^{x} \geq \cancel{5^{3-\frac{1}{x}} > 0}\ 125 > 5^{3-\frac{1}{x}}$

2) $a+\sin 3^{x} \leq a\mp 1$ т.к. $\sin 3^{x} \in [-1;1]$

Значит, $125 \leq a\mp 1 \Rightarrow$

$a \geq 12\cancel{4}6$ т.е. $\min(a)=12\cancel{4}6$

Ответ: $12\cancel{4}6$

№6 (продолжение):

Сравним: $\frac{4-2\sqrt{2}}{5} \overset{>}{\vee} \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{5}$ т.е. выгоднее напрямую идти через т. M в т. A

$4-2\sqrt{2} \overset{>}{\vee} 2\sqrt{3}-\sqrt{6}$

$2(2-\sqrt{2}) \vee \sqrt{3}(2-\sqrt{2})$

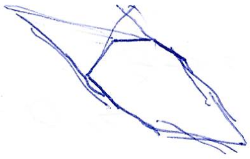
$2 > \sqrt{3}$

3) По нер-ву треугольника, выгоднее всего, когда $C \in AB$. Значит, проверим может ли быть т. что $BC+2AC < \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{5}$

и этого не может быт т.к. ~~BC~~ BC ~~во~~ убывает ~~прямо~~ обратно пропорц. AB, причем со скоростью <2.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{5}$

чистовик



№8

можно разбить 30-угольник на тройки сторон, которые образуют треугольники их всего: 10.