0 456406 140008

45-64-06-14
(161.19)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Снастина Константина Владимировича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+1 лист Реш.
+1 Черн

Дата
«13» апреля 2025 года

Подпись участника
СКонст

Кулешов А.С.

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
45-64-06-14	65	+	−	+	∓	+	0	+	−
45-64-06-14		+	−	+	∓	+	0	+	−

4. Найдены не все корни, но уравнение сведено к трем простым уравнениям
2. Ответ неверный
8. Ответ неверный, рассуждения неверные

 Ковалёва Елена Евгеньевна

Кунгов А.С. (Кунгов)

45-64-06-14 (161.19)

Черновик

$7+2\sqrt{6}$

$(\sqrt{6}+1)^2=6+1+2\sqrt{6}$

65 (шестьдесят пять)

$\sqrt{4x^2+12x+9}$

$\sqrt{(2x+3)^2}+\sqrt{(3x+2)^2}-(\sqrt{-x-1})^2=$

$\sqrt{(\sqrt{6}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{6}-1)^2}$

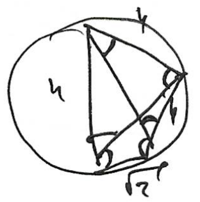
$|2x+3|+|3x+2|+x+1=\sqrt{6}+1-\sqrt{6}+1$

$|2x+3|+|3x+2|+x-1=0$

$-1{,}5 \quad -\frac{2}{3}$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)$

Брахмагупта



$(a+b-c)^3=(a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ac)(a+b-c)=$

a^3+b^2a

$\cos^3(\pi x)+\cos^3(2\pi x)=(\cos(\pi x)+\cos(2\pi x))($

$\cos^2(\pi x)+\cos^2(2\pi x)-\cos^2(\pi x)\cos^2(2\pi x)=$

Черновик

$$a^3+b^3-c^3=(a+b-c)^3$$

$$(a+b)(a^2+b^2-ab)=(a+b)\left((a+b-c)^2+c^2-c(a+b-c)\right)$$

$$a^2+b^2-ab=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc+c^2-$$

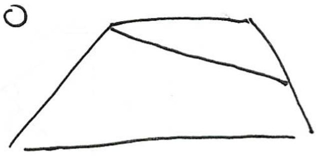
$$ac-cb+c^2$$

$$3c^2+3ab-3ac-3bc=0$$

$$\cancel{3c(c-a-b)+ab=0}$$

$$\cancel{3\cos^2(4\pi t)+\cos(\pi t)\cos(2\pi t)}$$

$$3c(c-a)+3b(a-c)=0$$



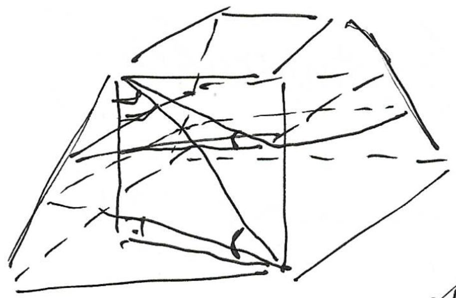
$$(c-a)(3c-3b)=0$$

$$(c-a)(c-b)=0$$

$$+a_1^2-b_2a_1+15=0$$

$$+a_2^2-b_3a_2+20=0$$

$$+a_3^2-b_1a_3+12=0$$



$$a_1+b_2=\frac{15}{a_1}$$

$$S'=\frac{15}{a_1}+\frac{20}{a_2}+\frac{12}{a_3}$$

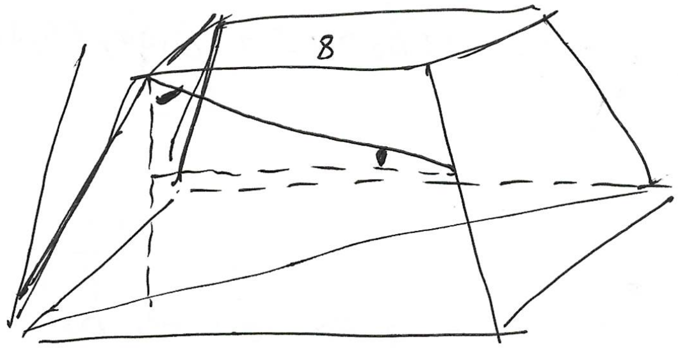
$a_1 2+$

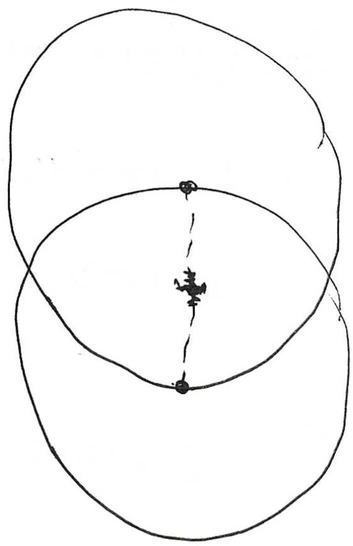
$$a_1b_1+12a_1=a_2b_2+15a_2=a_3b_3+20a_3$$

45-64-06-14
(161.19)

$b_2 - a_1 = \frac{15}{a_1}$

Черновик





$\underbrace{5^{3-\frac{1}{x}}}_{\in (0;125)} \geq a + \sin 3^x$

$3^x \approx \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

$12a_1 = 15a_2 = 20a_3$

$12(a_1 - b_1) =$

$a_3 = \frac{3}{5}a_1 = \frac{3}{4}a_2$

$a_1 = \frac{5}{4}a_2 = \frac{5}{3}a_3$

$(x + a_1)(x^2 + b_1 x + 12)$

$a_1(b_2 - b_3) + 5 = 0$

$(x + 0{,}8a_1)(x^2 + b_2 x + 15)$

$a_1(b_3 - b_1) - 8 = 0$

$(x + 0{,}6a_1)(x^2 + b_3 x + 20)$

$a_1^2 - a_1 b_1 + 12 = a_1^2 - a_1 b_2 + 15 = a_1^2 - a_1 b_3 + 20$

$a_1(b_1 - b_2) + 3 = 0$

$\cancel{a_1(b_1 + b_2 + b_3) = 0}$

Черновик

$(1+a_1)(1+b_1+12) = (1+0,8a_1)(1+b_2+15)$

$\cancel{1}+b_1+12+a_1+a_1b_1+\cancel{12a_1} = \cancel{1}+b_2+15+0,8a_1+0,8a_1b_2$

$+12a_1$

$b_1+12+a_1+a_1b_1-b_2-15-0,8a_1-0,8a_1b_2=0$

$b_1-b_2-3+0,2a_1+a_1(0,8b_1-b_2)=0$

$a_1^2-a_1b_2+15=0$

$(a_1-b_2)=\frac{-15}{a_1}$

$a_2=0,8a_1$

$a_3=0,6a_1$

$b_2-a_1=\frac{+15}{a_1}$

$b_3-a_2=\frac{20}{a_2}$

$b_1-a_3=\frac{12}{a_3}$

$b_1+b_2+b_3+a_1+a_2+a_3=\frac{15}{a_1}+\frac{20}{a_2}+\frac{12}{a_3}+2a_1+2a_2+2a_3$

$\frac{15}{a_1}+\frac{200}{8a_1}+\frac{120}{6a_1}+2a_1+1,6a_1+1,2a_1$

$\frac{15}{a_1}+\frac{20}{a_1}+\frac{25}{a_1}+4,8a_1=\frac{60}{a_1}+4,8a_1$

45-64-06-14
(161.19)

$$12(a_1 - b_1) = (a_2 - b_1)(b_1^2 - b_1 b_2 + 15)$$ Черновик

$$12\left(a_1 - \left(\frac{12}{a_3} + a_3\right)\right) = ($$

$$12\left(a_1 - \frac{20}{a_1} - 0{,}6a_1\right) = \left(0{,}8a_1 - \frac{20}{a_1} - 0{,}6a_1\right)\left(\left(\frac{20}{a_1} + 0{,}6a_1\right)^2 -\right.$$

$$\left(\frac{20}{a_1} + 0{,}6a_1\right)($$

$$\left(\frac{12a_3}{} + a_3\right) - \left(\frac{15}{a_1} + a_1\right) - 3 + 0{,}2a_1 + \left(0{,}8\left(\frac{12a_3}{a_3} + a_3\right) - \left(\frac{15}{a_1} + a_1\right)\right) = 0$$

$$\frac{20}{a_1} + 0{,}6a_1 - \frac{15}{a_1} - a_1 - 3 + 0{,}2a_1 + \left(\frac{96}{10a_3} + 0{,}8a_3 - \frac{15}{a_1} - a_1\right) = 0$$

$$\frac{5}{a_1} - 0{,}2a_1 - 3 + \quad \frac{16}{a_1} + 0{,}48a_1 - \frac{15}{a_1} - a_1 =$$

$$= \frac{6}{a_1} - 0{,}72a_1 - 3 = 0$$

$$600 - 72a_1^2 - 300a_1 = 0$$

$$12a_1^2 + 50a_1 - 100 = 0$$

1825

$$6a_1^2 + 25a_1 - 50 = 0 \qquad 45^2 = 1625 + 4$$

$$625 + 1200$$

8

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Задача №1

Чистовик

$$\sqrt{(2x+3)^2} + \sqrt{(3x+2)^2} - \left(\sqrt{-x-1}\right)^2 =$$

$$\sqrt{(\sqrt{6}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{6}-1)^2}$$

$$\sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{6} < 3 \Rightarrow \sqrt{6} > 1$$

Извлечём корни:

$$\begin{cases} |2x+3| + |3x+2| + x + 1 = (\sqrt{6}+1) - (\sqrt{6}-1) \\ -x-1 \geq 0 \end{cases}$$

1) $-x-1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1$

2) $|2x+3| + |3x+2| + x - 1 = 0$

~~(I) $x \geq -1,5$~~

~~$2x+3 + 3x+2$~~

по ОДЗ $x \leq -1 \Rightarrow 3x+2 < 0$

$|2x+3| - 3x - 2 + x - 1 = 0$

$|2x+3| - 3 - 2x = 0$

(I) $x \geq -1,5 \Rightarrow 2x+3 \geq 0$

$2x+3-3-2x=0$ тождество $\Rightarrow$

подойдёт любой $x \geq -1,5$ и $x \leq -1$

Чистовик

II) $t < -1{,}5$

$-2t - 3 - 3 - 2t = 0$

$-4t - 6 = 0$

$-4t = 6 \Rightarrow t = -1{,}5$ Ø с усл-ем

Ответ: $t \in [-1{,}5; -1]$

Задача № 4

Обозначим: $a = \cos(\pi t)$
$b = \cos(2\pi t)$
$c = \cos(\cancel{4}\pi t)$

Решим ур-ие:

$a^3 + b^3 - c^3 = (a+b-c)^3 \rightarrow a^3 + b^3 = (a+b-c)^3 + c^3$

$(a+b)(a^2 + b^2 - ab) = (a+b)((a+b-c)^2 + c^2 - c(a+b-c))$

$\left[\begin{array}{l} a^2 + b^2 - ab = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc + c^2 - ac - bc + c^2 \\ a = -b \end{array}\right.$

1) $3c^2 + 3ab - 3ac - 3bc = 0$

$3c(c-a) + 3b(a-c) = 0$

$(c-a)(3c - 3b) = 0$

Ответы: $\left[\begin{array}{l} a = c \\ a = b \\ b = c \end{array}\right.$

Рассмотрим случаи

$\hookrightarrow$

$\cos(\pi x) = \cos(2\pi x)$

Чистовик:

$\cos(2\pi x) = \cos(\pi x + \pi x) = \cos^2(\pi x) - \underbrace{\sin^2(\pi x)}_{1-\cos^2(\pi x)}$

$2\cos^2(\pi x) - \cos(\pi x) - 1 = 0$

$t = \cos(\pi x);\quad t \in [-1; 1]$

$2t^2 - t - 1 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$ По т. Виета

$\left[\begin{array}{l} \cos(\pi x) = 1 \\ \pi x = 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \\ x = 2k;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \cos(\pi x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \quad \pi x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\frac{2}{3} + 2k;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\cos(2\pi x) = \cos(4\pi x)$ У/р-ие аналогично

1 шг $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \cos(2\pi x) = 1 \rightarrow 2x = 2k;\ k \in \mathbb{Z} \\ \cos(2\pi x) = -\frac{1}{2} \rightarrow 2\pi x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$x = \pm\frac{1}{3} + k;\ k \in \mathbb{Z}$

$\cos(\pi x) = \cos(4\pi x)$

$\cos(\pi x) = 2\cos^2(2\pi x) - 1$

$\cos(\pi x) = 2\left(2\cos^2(\pi x) - 1\right)^2 - 1$

$\cos(\pi x) = 2\left(4\cos^4(\pi x) + 1 - 4\cos^2(\pi x)\right) - 1$

$8\cos^4(\pi x) - 8\cos^2(\pi x) - \cos(\pi x) + 1 = 0$

Чистовик

$t = \cos(\pi t)$; $t \in [-1; 1]$

$8t^4 - 8t^2 + 1 - t = 0$

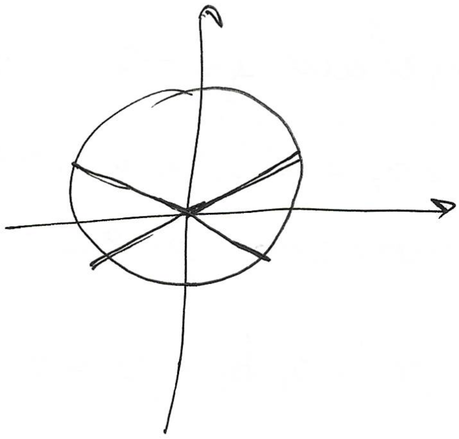
$8t^2(t-1)(t+1) + (1-t) = 0$

$(t-1)(8t^3 + 8t^2 - 1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} 8t^3 + 8t^2 - 1 = 0 \\ t = 1 \text{ уже разобран} \end{array}\right.$

$\cos(\pi t) = \pm \arccos\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\right) + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

......



$4t^2(2t+1) + 4t^2 - 1 = 0$

$(2t+1)(4t^2 + 2t - 1) = 0$

$t = -\frac{1}{2}$ разобран

$4t^2 + 2t - 1 = 0$

$D = 4 + 16 = 20$

$t = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ t = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$ Оба t по модулю < 1

Получаем, что

либо $t \in \mathbb{Z}$

либо $t = \pm\frac{2}{3} + k; k \in \mathbb{Z}$

либо $t = \pm\frac{1}{3} + k; k \in \mathbb{Z}$

либо $t = \pm \frac{\arccos\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} + 2k; k \in \mathbb{Z}$

Нам подходят: в $[0{,}3; 1{,}6]$

$\left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; 1\right\}$ $\cancel{\frac{\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi}}$,

все $\arccos(\dots)$ слишком маленькие по модулю и не подходят под ограничения

Задача № 5 | Чистовик

Подставим $x=0$

$12a_1 = 15a_2 = 20a_3 \Rightarrow$

$a_3 = 0,6a_1$

$a_2 = 0,8a_1$

Подставим $x=-a_1$: $f_1(-a_1)=0$

$-a_1+a_2 = -0,2a_1$ и $a_1>0 \Rightarrow$ 2ая скобка зануляется

Аналогично и для след. выводов:

$a_1^2 - a_1 b_2 + 15 = 0$ | Также подставив a_2 и a_3 получим

$a_2^2 - a_2 b_3 + 20 = 0$

$a_3^2 - a_3 b_1 + 12 = 0$

$b_3 - a_2 = \frac{20}{a_2}$; $b_1 - a_3 = \frac{12}{a_3}$

$b_2 - a_1 = \frac{15}{a_1}$

То есть:

$a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3 = \frac{15}{a_1} + \frac{20}{a_2} + \frac{12}{a_3} + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3$

$\frac{15}{a_1} + \frac{200}{8a_1} + \frac{120}{6a_3} + 4,8a_1 = S$

$S = \frac{60}{a_1} + 4,8a_1$. Осталось найти a_1

Подставим $x=1$:

$(1+a_1)(1+b_1+12) = (1+a_2)(1+b_2+15)$

$1+b_1+12+a_1+a_1b_1+12a_1 = 1+b_2+15+a_2+a_2b_2+$

$15a_2$

Сократим: Чистовик

$b_1+12+a_1+a_1b_1-b_2-15-a_2-a_2b_2=0$

$b_1=\frac{12}{a_3}+a_3=\frac{20}{a_1}+0,6a_1$

$b_2=\frac{15}{a_1}+a_1$

$\frac{20}{a_1}+0,6a_1+a_1+a_1\left(\frac{20}{a_1}+0,6a_1\right)-\left(\frac{15}{a_1}+a_1\right)-$

$0,8a_1-0,8a_1\left(\frac{15}{a_1}+a_1\right)-3=0$

$\frac{20}{a_1}+\underline{0,8a_1}+20+0,6a_1^2-\frac{15}{a_1}\underline{-a_1}-\underline{12}-0,8a_1^2-3=0$

$\cancel{-0,2a_1^2-12,2a_1+\frac{5}{a_1}+17=0} \quad |10a_1$

$\cancel{-2a_1^3-122a_1^2+50+170a_1=0}$

$\cancel{2a_1^3+122a_1^2-170a_1-50=0}$

$-0,2a_1^2-0,2a_1+5+\frac{5}{a_1}=0 \quad |-5a_1$

$a_1^3+a_1^2-25a_1-25=0$

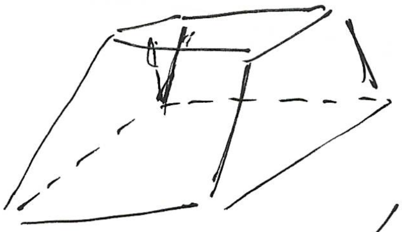
$a_1(a_1^2-25)+(a_1^2-25)=0$

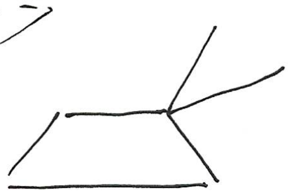
$\left[\begin{array}{l}(a_1^2-25)=0 \\ a_1=0\end{array}\right. \quad a_1>0 \Rightarrow a_1=5$

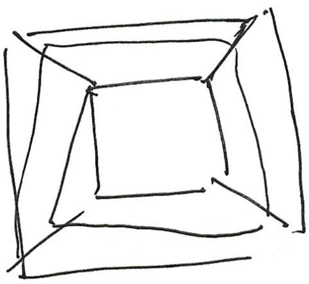
$S'=\frac{60}{a_1}+4,8a_1=12+24=36$

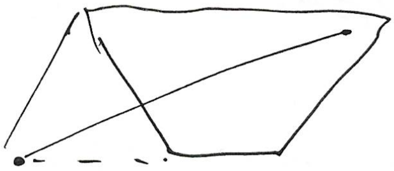
Ответ: $\underline{36}$

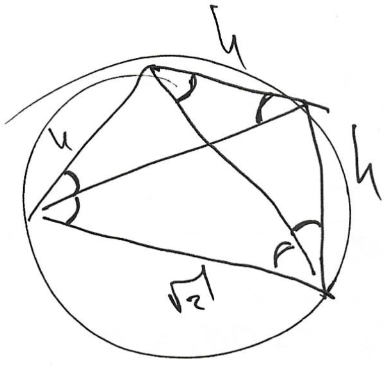
Черновик

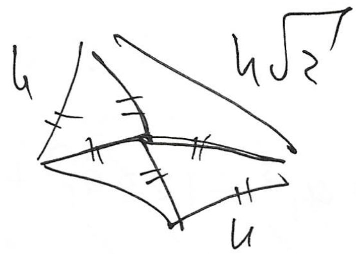


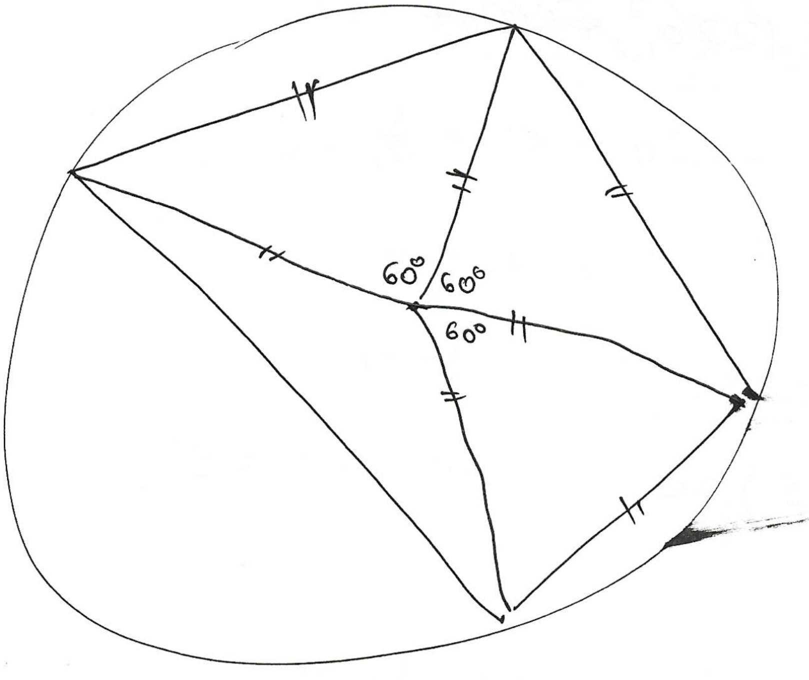






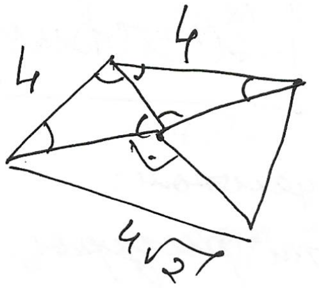


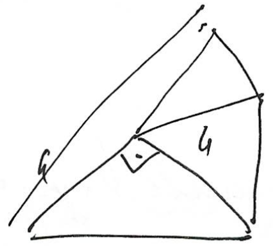


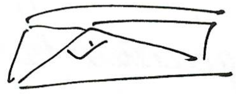


45-64-06-14
(161.19)

Черновик







$a^2 = 4^2 + 4^2 - 2\cos 150° \cdot 4^2$

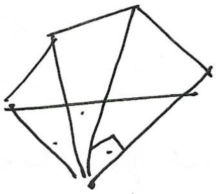
$a^2 = 32 + 16\sqrt{3}$

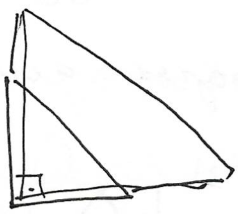
$a = 4\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$2 \cdot 4\sqrt{3} + 8 + \ldots$

120





$24 \rightarrow 96$

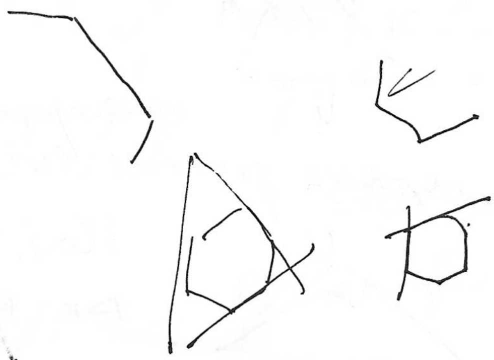
$8+16+32+64+128$

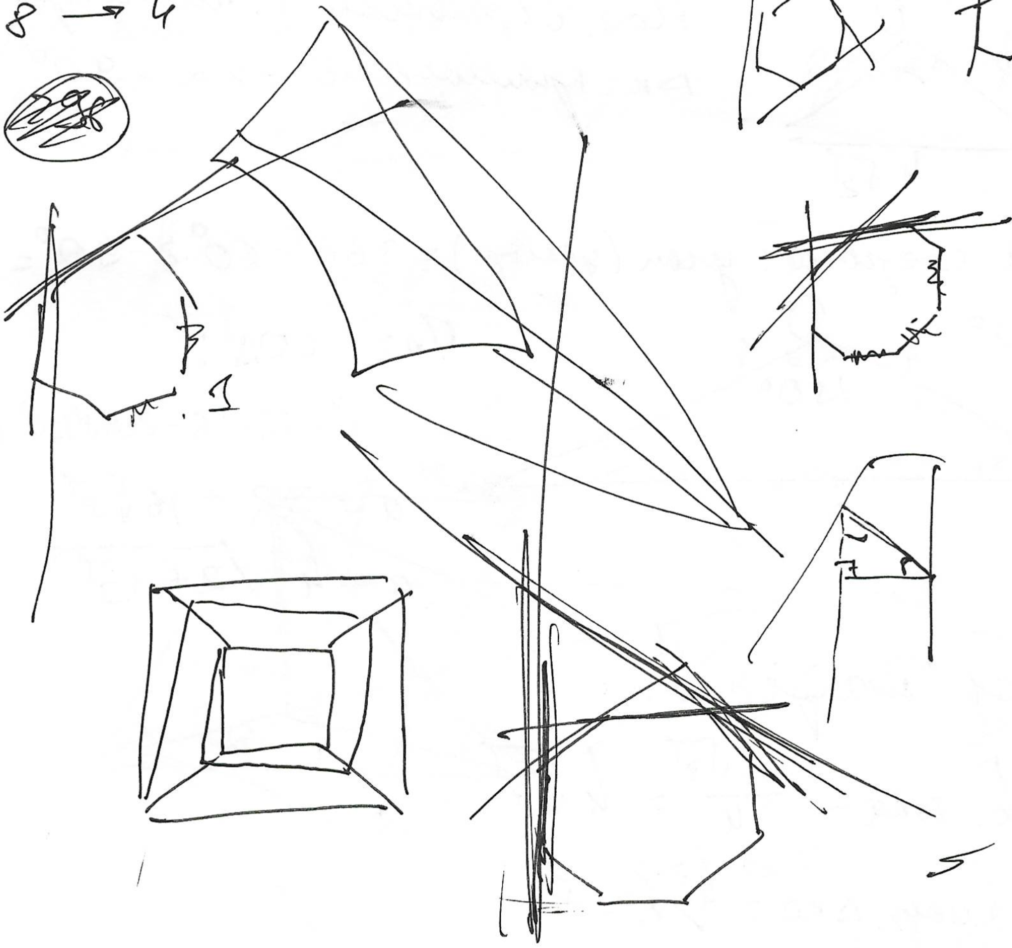
$256 - 4 - 2 - 2$

2 48

$6 \rightarrow 1$

$8 \rightarrow 4$



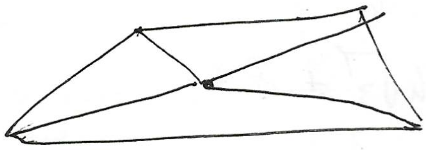


Задача №3

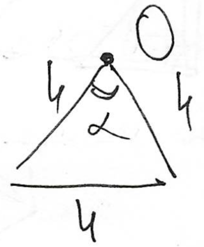
Чистовик

Соединим вершины 4-х уг-ка с центром:

(I) центр окр-ти лежит внутри фигуры:

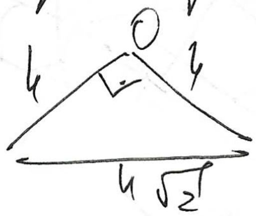


1) сторона длины 4:



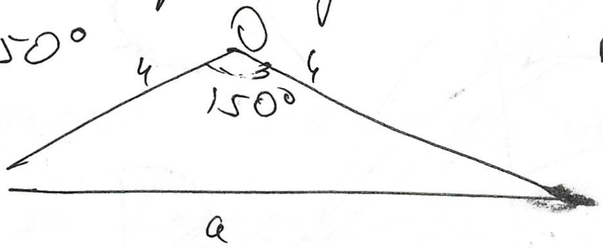
→ обр-тся р/с Δк => $\alpha = 60°$

2) сторона длины $4\sqrt{2}$:



По т. обратной т. Пифагора Δк прямоуг-ый => $\alpha = 90°$

3) 4ая сторона: угол (центр.) $= 360° - 60° \cdot 2 - 90° = 150°$



По т. cos:

$a^2 = 16 + 16 - 2\cos 150° \cdot 16$

$a^2 = 32 + 16\sqrt{3}$

$a = 4\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Теперь найдём S:

$S_{\text{р.к. Δка}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$

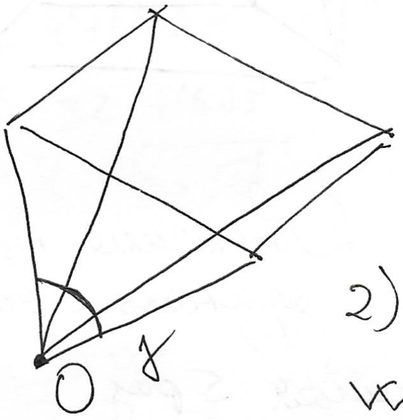
$S_{\text{прямоуг. Δка}} = 4^2/2 = 8$

$S_{4\text{го } \Delta\text{ка}} = \frac{\sin(150°) \cdot 16}{2} = 4$

Чистовик

$S_{общ.} = 12 + 8\sqrt{3}$

II центр окр-ти лежит вне фигуры



1) Мы уже выяснили, что центр. угол, опир-ся на $4\sqrt{2} = 90°$ => γ не может быть $= 60°$, т.к. $γ = 90° + \ldots > 60°$

2) Если $γ = 90°$, то $γ = 2 \cdot 60° + \ldots > 90°$

=> γ - опирается на бо́льшую сторону, причём $γ = 2 \cdot 60° + 90° = 210°$ => т.к. сум углов в Δке $= 180°$

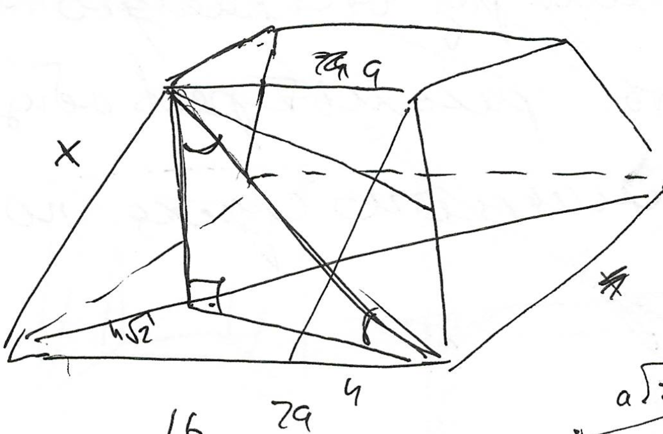
~~$S_{р.\Delta ков} = 8\sqrt{3}$ по-прежнему~~

~~$S_{пр.\Delta ка} = 8$ по-прежнему~~

~~$S_{4\text{го } \Delta\text{ка}} = \frac{\sin(210°) \cdot 16}{2} =$~~

→ случай единственен

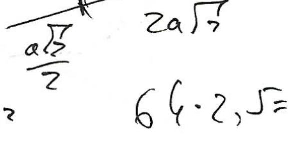
Ответ: $12 + 8\sqrt{3}$



$256 + 32 - \sqrt{2}$ $64\sqrt{2}$

160

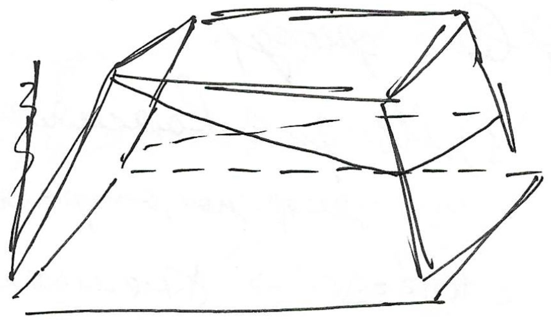
$4\sqrt{10}$

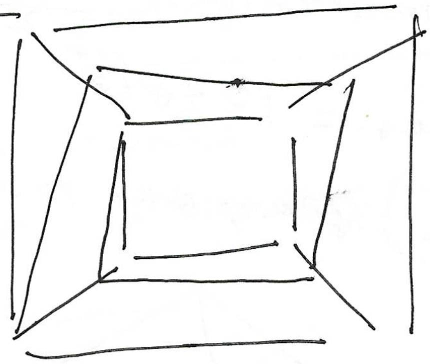


$\frac{a^2}{2} + 4a^2 - 2a^2 =$ $2{,}5a^2$

$64 \cdot 2{,}5 = 128 + 32$

Задача №7 Чистовик



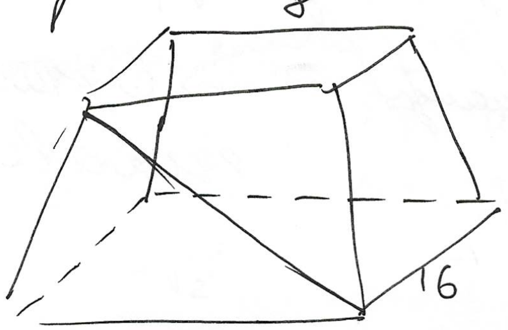


1) сторона осн-ия (1) = 8

——— 11 ——— (2) = 256

Движение верш. одинаково относительно стороны; всего он спускался 5 раз

2) Рассмотрим верхний срез пирамиды в рамках 1го спуска



~~5 спуск~~

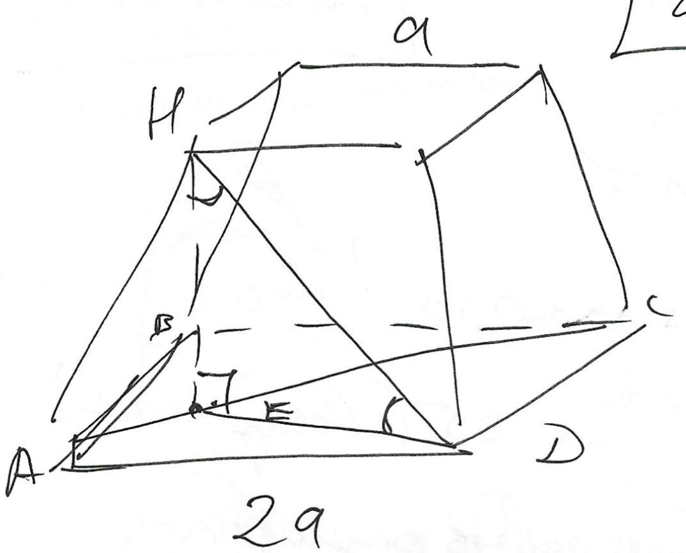
Заметим, что после каждого спуска сторона „нового верхнего" осн-ия удваивается:

$$\log_2\left(\frac{256}{8}\right) = 5$$

выразим всякий раз отсекаемую часть высоты рассмотрев общий случай единичного спуска по 1ой стороне :

45-64-06-14 (161.19)

Чистовик



1) Мы знаем, что линия спуска составляет $45°$ с пл-тью земли => и со своей пр-цией тож || пл-ти.

диагональ нижнего осн-ия $= 2a\sqrt{2}$ по Т. Пифагора

верхнего — $a\sqrt{2}$ (аналогично) =>

2) AE (~~вы~~ попр-ями в силу симметрии) равна $\frac{2a\sqrt{2}-a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

$\angle CAD = 45°$ из кв-та и $AD = 2a$ =>

по т. cos в $\triangle AED$:

$$ED^2 = \frac{a^2}{2} + 4a^2 - 2\cos 45° \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot 2a =$$

$$4{,}5a^2 - 2a^2 = 2{,}5a^2 \Rightarrow ED = a\sqrt{2{,}5}$$

3) $\triangle$к HED — прямоуг. и р/б поусл. => $HE = a\sqrt{2{,}5}$

4) За все 5 спусков $a = \{8, 16, 32, 64, 128\}$ =>

сложим части, получив длину высоты:

$$8\sqrt{\frac{5}{2}} + 16\sqrt{\frac{5}{2}} + \ldots + 128\sqrt{\frac{5}{2}} = 248\sqrt{2{,}5}$$

Ответ: $248\sqrt{2{,}5}$ м.е.

Задача №2 | Чистовик

$5^{3-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 3^x$

Заметим, что если $x \to +\infty$, то $\frac{1}{x} \to 0$ и

$3-\frac{1}{x} \to 3$ и $5^{3-\frac{1}{x}} \to 125$ (своему max)

Т.к. П иррац. 3^x будет давать различные остатки при делении на П в зависимости от x. ~~Подобрав очень большой x, такой что $3^x \% 2\pi \to \pi$~~

Если мы будем ↗ x, то $5^{3-\frac{1}{x}}$ будет расти очень быстро и покроет $\sin 3^x$ ($max = 1$)

Если мы будем ↘ x, то $\sin 3^x \to 0$

Найдём x, $3^x = \frac{\pi}{2}$, а $5^{3-\frac{1}{x}}$ ↘:

$x = \log_3 \frac{\pi}{2}$. Тогда:

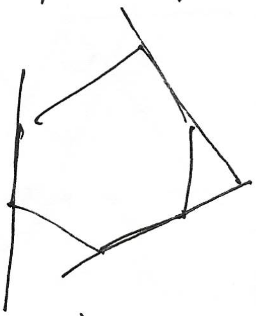
$5^{3-\frac{1}{\log_3 \frac{\pi}{2}}} \geq a + 1 \Rightarrow \min a =$

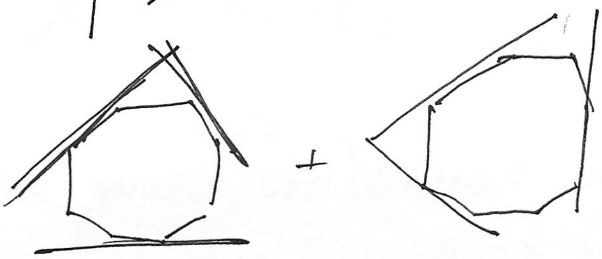
$5^{3-\frac{1}{\log_3 \frac{\pi}{2}}} - 1 + \text{delta}$

Задача 8

Чистовик

Рассмотрим правильные 2n-угольники:

6:  1 ок

8:  2 ока

и т.д. Выбирая 2 стороны для ока, мы запрещаем выбор 2х параллельных сторон из половины этих 2х ⇒ индукция сохраняется. для 30уг. оков будет $\frac{30}{2}-2=13$

Ответ: 13