



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7-8 класс

Место проведения город Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Соколова Галина Евгеньевна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

ЛК

Александр

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Душан

ЧЕРНОВИК

75

сильбдаят
пять

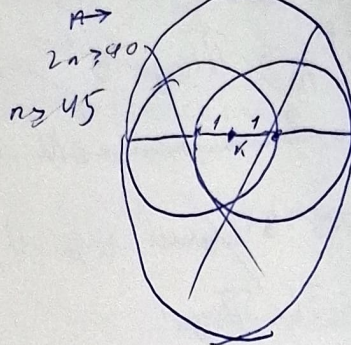
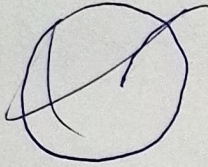
2000

8 → 4 → 2 → 6 → 8
1 2 3 4

20n-1

100-94 1:901 n?

20n > 900



2000

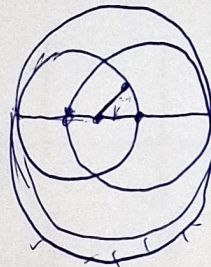
1020 км.

20n =

549

↓

550



99

249

199

279

289

299

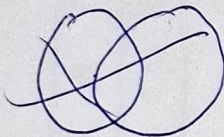
369

279

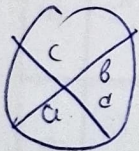
349

599

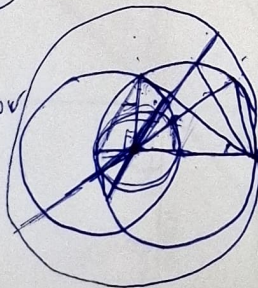
22 < 3



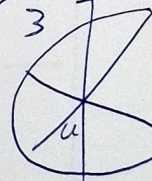
3 > 1 < 2



a, b = c, d, 100
a, b = c, d

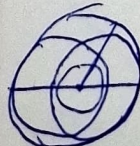


$$\left| \frac{4}{\sqrt{3}} \right| = \frac{49}{3} = 16 \frac{1}{3} > 4$$



$$a|a+b| = c|c+d|$$

$$a^2 + ab = c^2 + cd$$



$$\frac{a^2 + ab}{2} + c \geq \frac{c^2 + cd}{2}$$

$$2a+b \vee 2c+d$$

$$2c^2 + cd = a^2 + ab + c^2$$

$$2c^2 d = \frac{a^2 + ab}{c} + c = \frac{a^2 + ab}{c} + c$$

$$\geq a^2 + ab$$

$$\frac{4}{c} + c \geq 4 \quad \frac{3}{2} + c \geq \sqrt{\frac{3}{c}} \cdot c = \frac{3}{c} + c = 2\sqrt{3}$$

лимит $\sqrt{3}$

Черновик

$$\sqrt[3]{3}$$

Докажем по индукции, что $6^n \equiv 6 \pmod{10} \quad (n \in \mathbb{N})$

База: $6^1 = 6 \equiv 6 \pmod{10}$

Шаг: пусть $6^k \equiv 6 \pmod{10}$. Тогда $6^{k+1} = 6 \cdot 6^k \equiv 6 \cdot 6 \pmod{10} = 36 \equiv 6 \pmod{10}$, что и требовалось доказать. Значит, при $n \in \mathbb{N} \quad 6^n \equiv 6 \pmod{10}$

Заметим, что $2025 : 3 \mid$ (сумма цифр: 3), значит, $2025^{2025} : 3 \mid$

Пусть $2025^{2025} = 3L$. Тогда:

$$3L = 3(L-1) + 3$$

$$8^{3L} = 8^{3(L-1)+3}$$

$$8^{3L} = 8^{3(L-1)+3}$$

и

Лист 2

Чисто вкл.

№ 3

Докажем по индукции, что $8^{4n+1} \equiv 8 \pmod{10}$ при $n \in \mathbb{N}$.

База: $n=1$, $8^5 = 2^{15} = 2^{10} \cdot 2^5 = 1024 \cdot 32 \equiv 4 \cdot 2 = 8 \pmod{10}$

Переход: от $n=k$ к $n=k+1$

Пусть $8^{4k+1} \equiv 8 \pmod{10}$. Тогда:

$$8^{4(k+1)+1} = 8^{4k+5} = 8^{4k+1} \cdot 8^4 = 8^{4k+1} \cdot 2^{12} = 8^{4k+1} \cdot 4096 \equiv 8 \cdot 6 = 48 \equiv 8 \pmod{10}$$

Значит, $8^{4n+1} \equiv 8 \pmod{10}$ для $n \in \mathbb{N}$

Заметим, что $2025 \equiv 1 \pmod{4}$, поэтому $2025^{2025} \equiv 1^{2025} = 1 \pmod{4}$.

Тогда пусть $2025^{2025} = 4l+1$. Тогда:

$$8^{4l+1} \equiv 8 \pmod{10} \text{ (как доказано ранее)}$$

Поэтому, последнее число $8^{2025^{2025}} = 8$.

Ответ: 8

№ 2

Заметим, что если число заканчивается на цифру, отличную от 9, то в четность суммы цифр следующего числа отличается от четности суммы цифр текущего числа (последний разряд отличается на 1, остальные одинаковы).

Но сумма цифр любого натурального числа должна быть четной - иначе его цифр не получится разбить на 2 группы с равной суммой. Значит, суперсчастливые число оканчивается на 9. ~~С другой стороны, если~~ Но сумма всех цифр, кроме 9, должна быть ≥ 9 (иначе эту сумму цифр в группе, в которой нет 9, будет < 9).² Также, если число, кратное 9, оканчивается на 9, то сумма 2 других цифр = 9 (иначе это не так). Тогда при разложении цифр на группы с 9 будет еще какая-то

Продолжение по сч. 4

Спр.
Анн. № 3

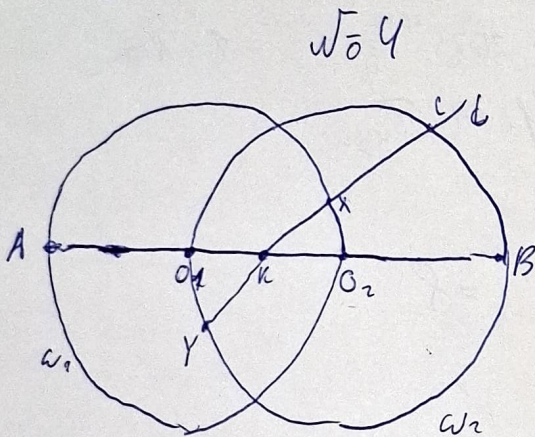
цифра, т.е. сумма цифр в этой группе > 9 , а в другой ≤ 9 (т.к. в ней 1 цифра). Рассмотрим всех "кандидатов" на наименьшее супермаскированное число, < 600 :

n - маск. по 9, сумма цифр $\leq 4+9=13$	$n+1$
99	100
189	190
279	280
369	370
459	460
549	550

не маск.
не маск.
не маск.
не маск.
не маск.
маск. (5+0=5)

Значит, наименьшее супермаскированное число = 549.

Ответ: 549



Решение:

Не учитывая общности, пусть точка пойдет так, чтобы её путь либо целиком проходил через пересечение ω_1 и ω_2 , либо был в ω_2 , но не в ω_1 в какой-то точке.

Остальные случаи симметричны.

Пусть AO_1B - диаметр ω_1 , O_2A - диаметр ω_2 .

Пусть KB - наименьшее кол. во точек, т.е. есть путь K , при котором travels больше $1/2$ - путь (1-путь).

Продолжение на стр. 65

Дано:

$\omega_1 = \text{Окр}(O_1, R_1)$ - 1-медиана

$\omega_2 = \text{Окр}(O_2, R_2)$ - 2-медиана

$O_1 \in \omega_2$

$O_2 \in \omega_1$

K - пер. O_1O_2

Найти:
найти длину пути

Найти:

пути с наименьшим кол. точек.

Стр. 65

Чистовик

Пусть $L \in \omega_1 = m \cdot X$, Y симметрична X относ. K .

Потому, по симметрии, $m \cdot Y \in \omega_2$. (и K - центр симметрии ω_1 и ω_2)

~~Заметим, что~~ Пусть Z принадлежит L и по зоне L ~~вышла~~
поверхности ω_2 ~~соединяет~~ K ~~и~~ Z ~~правой~~. Тогда на пути

из Z ~~соединяет~~ K ~~и~~ Z ~~правой~~, а не $L - L + 2K = L =$

$-K(CX + 2XK) = K(CX + XK + KY) = CY \cdot K$. П.к. ~~уменьшается~~ -

- это ~~соединяющие~~ хорды. $CY < O_1B$, $O_1B = 4$, $4 > CY$, $4K > CXK$.

Значит, KB ~~является~~ самый эффективный путь

Очевидно: Z по направлению к K ~~идет~~ из ~~поверхности~~.

505

Ответ: 14

Пример: пусть с 2, 3, 4 и 5 ~~мудры~~ перекрестим на 1 (когда там 14), а с 1 и 6 - на 5 (там 7) ~~номера~~ - ~~количество~~ ~~букв~~ до ~~буквы~~ ~~на~~ ~~границе~~

Очевидно: на ~~любую~~ ~~границу~~ ~~мудры~~ ~~попадают~~ с ~~соседних~~ ~~границ~~,
у ~~любой~~ ~~границы~~ ~~суть~~ на ~~соседних~~ ~~границах~~ ~~суть~~ не ~~более~~

$24 - 4 = 14$ ~~мудры~~, значит, ~~мудры~~ ~~не~~ ~~более~~ 14.

506

Ответ: $n = 43$

~~Пример: ага~~

~~Пример: ну~~

Пусть $n = 45$. Тогда пусть у ~~каждой~~ ~~границы~~ ~~есть~~ ~~свой~~ ~~номер~~
(от 1 до 20 ~~включительно~~). Тогда ~~каждая~~ ~~граница~~ ~~первого~~ ~~племени~~ ~~задачу~~
~~по номеру~~

Продолжение на листе 508

Стр. 5

ИСТОВИК

Пусть каждый, кроме первого, решил задачи $5x+1, 5x+2, 5x+3, \dots$

из первых десяти

x - номер участника

$\dots 5x+45$ (взяв какое из этих чисел mod 50, за исключением

~~mod 50~~ ~~50~~, которое берётся как 50), с первым решил не ~~не~~ ~~не~~ ~~не~~

участков

но без $5x+1$. Тогда для любой задачи найдётся человек,

который не решил её (для задачи $5y$: ~~фактически~~ ~~$y=50$~~ ~~наименьшее~~

число, $> y$ и ≤ 5 . Тогда $x = \frac{y}{5}$ решил y , аналогично с

второй десяти человек и 50 задачами (вторыми), можно каждый

решил по 45 задач. Тогда, если Вася - первый, а Паша - второй,

удовле выполняется, но ни одну одну задачу не решил 10 чел.

Противоречие. Значит, $n \geq 47$.

В случае с $n=45$ каждый решил ≥ 45 задач, а кто-то ≥ 46 ,

Всего ~~решений~~ $\geq 45 \cdot 45 + 46 = 901$, по принципу Дирихле найдётся

задача с ≥ 10 решившими её ($\frac{901}{45} > 9$)

~~то~~ 7

Рассмотрим образы n -во способов (среди невозможных) и

каж-во способов ≤ 1

Пусть первый решает $\frac{1}{100}$ от тысяч, а дальше будет есть

и следит

числа, уменьшающийся, до второго до $\frac{11}{100}$. Это возможно.

предыдущий

тоу второго $> \frac{1}{100} > \frac{1}{100}$ первого $\leq \frac{10}{100}$, тоу второго $\leq \frac{10}{100} \Rightarrow$ тоу первого $> \frac{1}{100}$.

После хода первого остается $\frac{99}{100}, \frac{88}{100}, \frac{77}{100}, \frac{66}{100}, \frac{55}{100}, \frac{44}{100}, 0$ и т.д.

и.е. от его действий

Ответ: Ане.

Лист 6

ЧАСТОВИК

№ 1

Посчитаем кол-во способов логично разместить (или невозможности) и кол-во невозможных способов

$$\text{Общее кол-во способов} = C_{10}^5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 7 \cdot 7 = 18 \cdot 7 = 126$$

Сколько невозможных, если там есть 3 пилы поперек 1 пилы по с краю

Рассмотрим левую руку:

Л Л Л . . .

Где-то слева и где-то справа от ЛЛЛ должно быть по М,

Р
пары
левый рука

Л
пары
правый рука

Если слева от ЛЛЛ 1 Л, то справа тоже 1 Л

А как слева, так и справа становится в очередь из позиций

между М и Л 3 пары от них - 1 + 1 позиция или 2 М.

ЛЛЛЛЛЛЛЛЛЛЛЛ $\leftarrow 3 \cdot 4 = 12$ вар

ЛЛЛЛЛЛЛЛЛЛЛЛ $\leftarrow 12$ вар.

ЛЛЛЛЛЛЛЛЛЛЛЛ $\leftarrow 2 \cdot 5 = 10$ вар. Л

ЛЛЛЛЛЛЛЛЛЛЛЛ $\leftarrow 10$ вар. Л

5 2
мост уде Л
10+10+10+10+10

= 49 ~~вариантов~~ вар-тов, однако не с 17. Но если двигаться почитаем варианты с 3 Л и 3 Л поперек:

Л ЛЛЛ ЛЛЛЛ . . . Л Л . . . Л ЛЛЛ . . . ЛЛЛ . . . Л

Л
ЛЛЛЛЛ
Л

Вот возможные вар-ты:
Из 10 Л и 10 М в 6 местах можно поставить Л, М.
и по, и то или иначе. Значит, тут 36 случаев

Трой. на суг. Л.

Анн. Сир. 7

ЧИСТОВИК

~~После этого следует считать путь $126 - (44 + 44) - 36$~~

↓

↑

П - ЛЛЛ - МММ - Л -

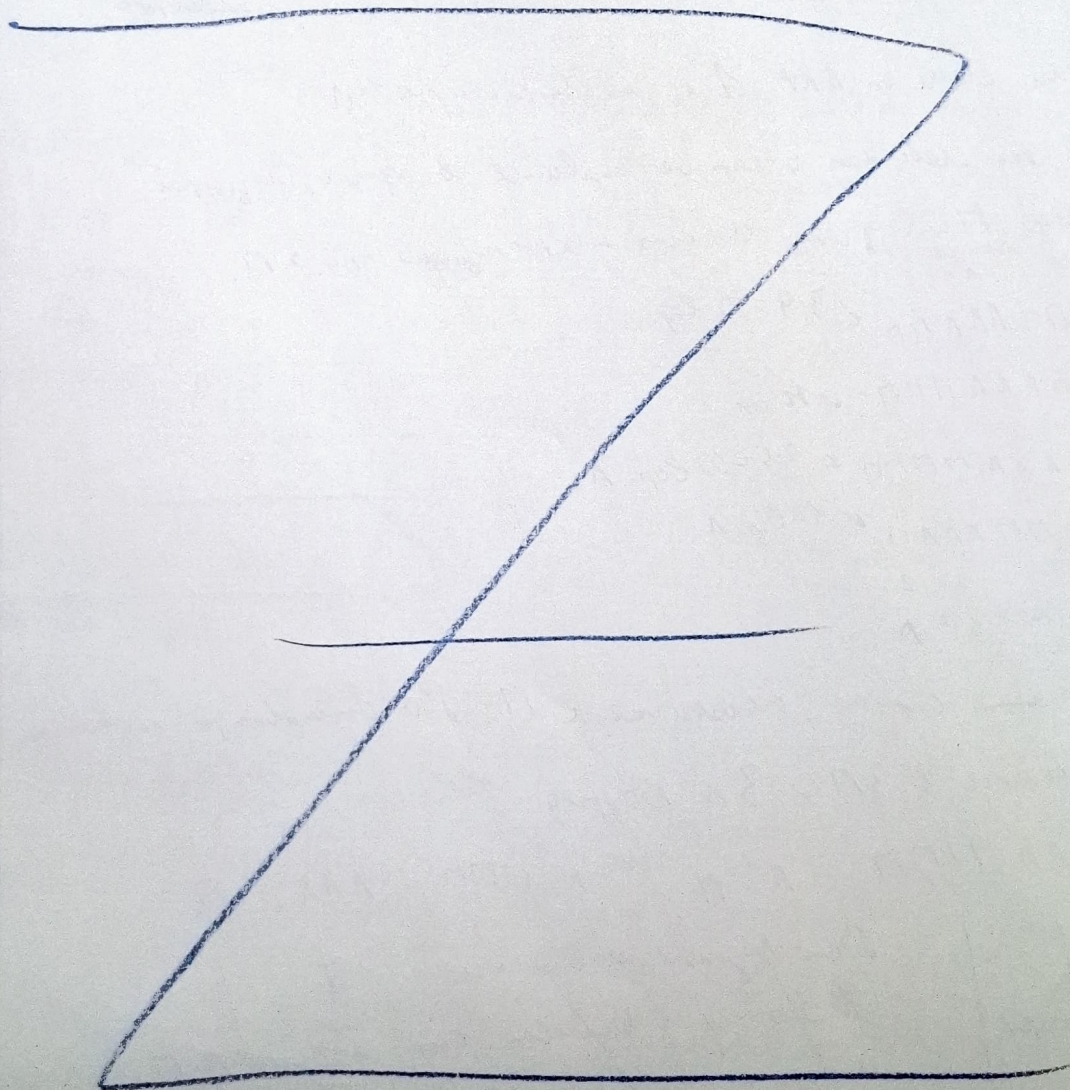
М - МММ - ЛЛЛ - М -

и тем, и тем по 6-6 = 36 способов

И

После этого следует считать количество $126 - (44 + 44 - 36 - 36) =$
 $= 126 - 16 = 110$

Ответ: 110 способов



Стр. 8