0 640374 000000

64-03-74-00
(160.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Сторожева Александра Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

АСтр

64-03-74-00 (160.1)

85 (восемьдесят пять) Черновик

№1

$t=\log_2 x$; $\sqrt{t^2+3t-\sqrt{t^2+3t-4}} \geq \cancel{\log_2 x}\ t+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (1)\ t^2+3t-\sqrt{t^2+3t-4}\geq (t+1)^2 \\ \begin{cases} (2)\ t+1\le 0 \\ (3)\ t^2+3t-\sqrt{t^2+3t-4}\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$

(1) $t-1 \ge \sqrt{t^2+3t-4} \Leftrightarrow \begin{cases}(t-1)^2\ge t^2+3t-4\\ t^2+3t-4\ge0\\ t-1\ge0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5\ge5t\\(t+4)(t-1)\ge0\\t-1\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t-1\le0\\(t+4)(t-1)\ge0\\t-1\ge0\end{cases}\Leftrightarrow t=1$

(2) $t\le -1$

(3) $\underbrace{t^2+3t}_{a} \ge \sqrt{t^2+3t-4}$; $a\ge\sqrt{a-4} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2\ge a-4\\a\ge0\\a-4\ge0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-a+4\ge0\\a\ge4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a\in(-\infty;\frac{1-\sqrt{17}}{2}]\cup[\frac{1+\sqrt{17}}{2};\infty)\\a\ge4\end{cases}$

$\Updownarrow$ $a\ge4$

$\Updownarrow$

$t^2+3t-4\ge0$

$\Updownarrow$

$(t+4)(t-1)\ge0 \Leftrightarrow t\in(-\infty;-4]\cup[1;\infty)$

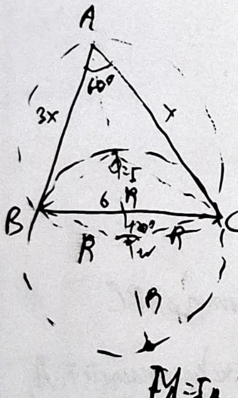
$\cancel{\sqrt{t^2+3t-4}\ge t+1;\ \sqrt{t^2+3t-\sqrt{t^2+3t-4}} \le \sqrt{t^2+3t-t+1}=\sqrt{(t+1)^2}=|t+1|}$

$\begin{cases}(2)\ t\le-1\\(3)\ t\in(-\infty;-4]\cup[1;\infty)\end{cases} \Leftrightarrow t\le-4$

$\left[\begin{array}{l}t=1\\t\le-4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=1\\ \log_2 x\le-4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x\in(0;\frac{1}{16}]\end{array}\right.$

$Ux\in\mathbb{Z}: \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\frac{1}{16}\end{array}\right. \Rightarrow 32+1=\boxed{33}$

№2



$M_A=5R$

$BC=6$

$6^2=R^2+R^2+2\cdot R\cdot R\cdot\frac{1}{2}=3R^2$; $R^2=12$; $R=2\sqrt{3}$

$OM=2R=4\sqrt{3}$

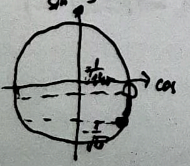
№3

$\sqrt{\cos x}=u\ge0$ $\quad u^4=\cos^2 x$ $\quad u^4+\frac{v^4}{9}=1$; $u=\sqrt[4]{1-\frac{v^4}{9}}$

$\sqrt{-3\sin x}=v\ge0$ $\quad v^4=9\sin^2 x$

$\sqrt{u+2v}>2\sqrt{u-v} \Leftrightarrow u+2v>4(u-v)\ge0 \Leftrightarrow \begin{cases}6v>3u\\u\ge v\end{cases} \Leftrightarrow \{2v>u\ge v$

$\begin{cases}2v>\sqrt[4]{1-\frac{v^4}{9}}\\ \sqrt[4]{1-\frac{v^4}{9}}\ge v\end{cases}$ $\begin{cases}16v^4>1-\frac{v^4}{9}\\1-\frac{v^4}{9}\ge v^4\end{cases}$ $\begin{cases}145v^4>9\\9\ge10v^4\end{cases}$ $\begin{cases}v^4>\frac{9}{145}\\v^4\le\frac{9}{10}\end{cases}$ $\begin{cases}v^2=-3\sin x\in(\frac{3}{\sqrt{145}};\frac{3}{\sqrt{10}}]\\ \sin x\in[-\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{1}{\sqrt{145}})\\ \cos x\ge0\end{cases}$



$x\in[\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{10}})+2\pi k;\ \arcsin(-\frac{1}{\sqrt{145}})+2\pi k),\ k\in\mathbb{Z}$

Чистовик (лист 1)

Задача 1.

$\log_2 x = t;\ \sqrt{t^2+3t-\sqrt{t^2+3t-4}} \geq t+1 \iff \left[\begin{array}{l} (1)\ t^2+3t-\sqrt{t^2+3t-4} \geq t^2+2t+1 \\ (2)\ \begin{cases} t+1 \leq 0 \\ (3)\ t^2+3t-\sqrt{t^2+3t-4} \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

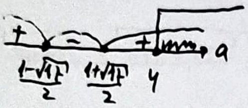
$(1)\ t-1 \geq \sqrt{t^2+3t-4} \iff \begin{cases} t^2-2t+1 \geq t^2+3t-4 \\ t^2+3t-4 \geq 0 \\ t-1 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1)\ 5(t-1) \leq 0 \\ (4)\ (t+4)(t-1) \geq 0 \\ (6)\ t-1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} t-1 \leq 0 \\ t-1 \geq 0 \end{cases} \iff t=1$ – удовл. (5)

$\Downarrow$

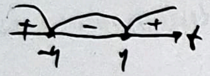
$t=1$ – решение

$(3)\ t^2+3t \geq \sqrt{t^2+3t-4}\ ;\ a=t^2+3t\ ;\ a \geq \sqrt{a-4} \iff \begin{cases} a^2 \geq a-4 \\ a-4 \geq 0 \\ a \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (7)\ a^2-a+4 \geq 0 \\ a \geq 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a\in \end{cases}$

$(7)\ a^2-a+4=0,\ a=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$



$\Rightarrow a \geq 4 \iff t^2+3t-4=(t+4)(t-1) \geq 0$



$(3):\ t\in(-\infty;-4]\cup[1;\infty)$

$\left[\begin{array}{l} (1)\ t=1 \\ (2)\ \begin{cases} t \leq -1 \\ (3)\ t\in(-\infty;-4]\cup[1;\infty) \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t\in(-\infty;-4] \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \log_2 x=1 \\ \log_2 x\in(-\infty;-4] \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=2 \\ 0<x\leq 2^{-4}=\frac{1}{16} \end{array}\right.$

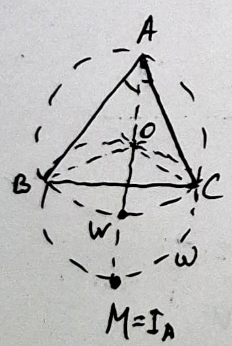
$x\in(0;\frac{1}{16}]\cup\{2\}$

$f(x)=16x\in\mathbb{Z} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{16} \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 16x=1 \\ 16x=32 \end{array}\right.$

$f(\frac{1}{16})+f(2)=1+32=33$

Ответ: 33

Задача 2.



O – т. пересечения биссектрис $\triangle ABC \Rightarrow$ O – инцентр $\triangle ABC$

Пусть W – середина дуги $\overset{\frown}{BC}$ описанной окр. $\triangle ABC$, не содержащей т. A, W лежит на биссектрисе $\angle BAC$.

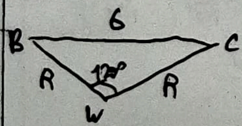
Тогда по лемме о трезубце W – центр. описанной окр. $\triangle OBC$ (ω), и на этой же окружности лежит I_A – центр вневписанной окр. $\triangle ABC$, кас. BC

I_A лежит на биссектрисе $\angle BAC \Rightarrow$ O и I_A – т. пересечения ω и AO $\Rightarrow$

$\Rightarrow I_A = M$

W – центр $\omega \Rightarrow WO=WM=WB=WC=R \Rightarrow OM=OW+WM=2R=2BW$

$\angle BAC=60^\circ \Rightarrow \angle BWC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$ (т.к. W лежит на опис. окр. $\triangle ABC$), $BW=WC=R$, $BC=6$



Т. косинусов $\triangle BWC$: $6^2=R^2+R^2-2\cdot R\cdot R\cdot \underbrace{\cos 120^\circ}_{-\frac{1}{2}} = 3R^2 \Rightarrow R^2=12 \Rightarrow R=2\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow OM=2R=4\sqrt{3}$

Ответ: $4\sqrt{3}$

64-03-74-00 (160.1)

Чистовик (лист 2)

Задача 3.

$u=\sqrt{\cos x}\geq 0;\ \cos x\geq 0$

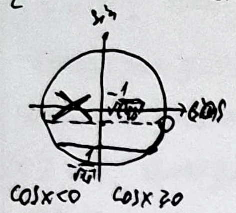
$v=\sqrt{-3\sin x}\geq 0$ $\quad u^4+\frac{v^4}{9}=\cos^2 x+\frac{(-3\sin x)^2}{9}=\cos^2 x+\sin^2 x=1 \Rightarrow u=\sqrt[4]{1-\frac{v^4}{9}}$

$\sqrt{u+2v}>2\sqrt{u-v} \Leftrightarrow \begin{cases} u+2v>2^2(u-v) \\ u-v\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6v>3u \\ u\geq v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u<2v \\ u\geq v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ \sqrt[4]{1-\frac{v^4}{9}}<2v \\ (2)\ \sqrt[4]{1-\frac{v^4}{9}}\geq v \end{cases},\ (v\geq 0)$

$(1) \begin{cases} 1-\frac{v^4}{9}<16v^4 \\ 1-\frac{v^4}{9}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9<145v^4 \\ v^4\leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^4>\cancel{\frac{145}{9}}\frac{9}{145} \\ v^4\leq 9 \end{cases}$

$(2)\ 1-\frac{v^4}{9}\geq v^4 \Leftrightarrow 9\geq 10v^4 \Leftrightarrow v^4\leq\frac{9}{10}$

$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow v^4\in\left(\cancel{\frac{145}{9}}\frac{9}{145};\frac{9}{10}\right] \Leftrightarrow (v^2\geq 0)\ v^2\in\left(\frac{3}{\sqrt{145}};\frac{3}{\sqrt{10}}\right] \Leftrightarrow -3\sin x\in\left(\frac{3}{\sqrt{145}};\frac{3}{\sqrt{10}}\right] \Leftrightarrow \sin x\in\left[-\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{1}{\sqrt{145}}\right)$



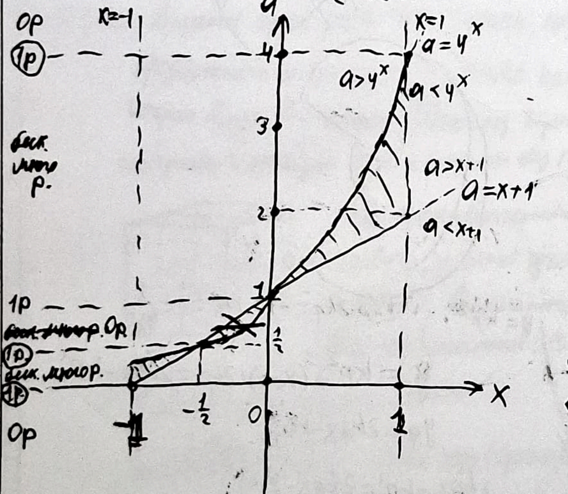
$x\in\left[\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)+2\pi k;\ \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{145}}\right)+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}$

Ответ: $\left[\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)+2\pi k;\ \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{145}}\right)+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}$

Задача 4.

$|x+1-a|+|4^x-a|=|a-x-1|+|4^x-a|\geq(a-x-1)+(4^x-a)=4^x-x-1$, равенство при ~~$(a-x-1)(4^x-a)\geq 0$~~, $\begin{cases} a\geq x+1 \\ 4^x\geq a \end{cases}$

~~$(a-(x+1))(a-4^x)\leq 0$~~ $\begin{cases} a\geq x+1 \\ a\leq 4^x \end{cases}$



$a=4^x$ – выпуклый вниз график, $a=x+1$ – прямая $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ у $a=4^x$ и $a=x+1$ не более 2 пересечений

Заметим, что при $x=0$: $4^0=0+1$ и при $x=-\frac{1}{2}$:

$4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+1$ — $4^x=x+1 \Rightarrow (0;1)$ и $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ –

это все точки пересечения $a=4^x$ и $a=x+1$

$(a-(x+1))(a-4^x)\leq 0$ – удовлетворяют точки,

лежащие ~~между графиками $a=4^x$ и $a=x+1$~~

(или лежащие на нём) (или лежащие на нём)

выше графика $a=x+1$ и ниже графика $a=4^x$

Ответ: $0;\ \frac{1}{2};\ 1;\ 4$

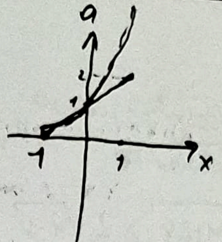
Черновик

№4

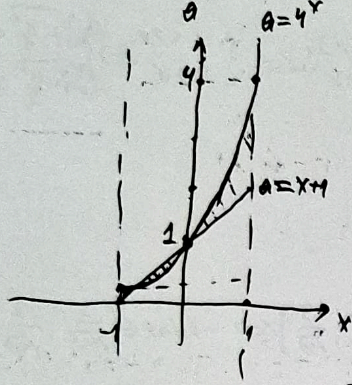
$a = x+1 \quad a = 4^x$

$|a-x-1| + |4^x-a| \geq a-x-1+4^x-a = 4^x-x-1$, $\ominus$: $(a-x-1)(4^x-a) \geq 0$

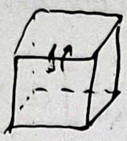
$(a-x-1)(a-4^x) \leq 0$



$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-x-1 \geq 0 \\ 4^x-a \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a-x-1 \leq 0 \\ 4^x-a \end{cases} \end{array}\right.$

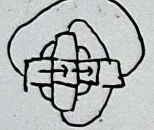


$4^x = x+1 \quad x = -\frac{1}{2}: \ \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$

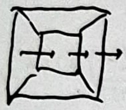


№5

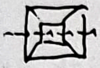
$\frac{1}{4}$:



$\frac{1}{4}$:



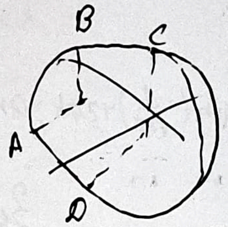
$\frac{1}{4}$



x

$\frac{1}{2}$:

№8.



Всего: $4^6 = 2^{12} = 4096$

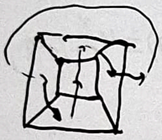
$3+3: \ 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

$2+4: \ \frac{6 \cdot 4}{2} \cdot \cancel{4} \cdot 2 = \cancel{48}\ 24$

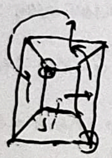
$2+2+2: \ 4 \cdot 2 = 8$

6:

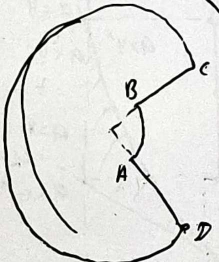
нет



$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

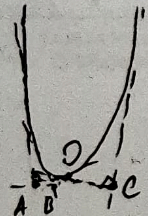


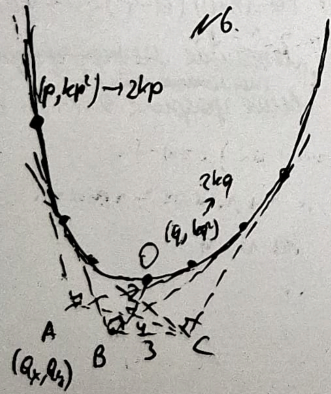
$4 \cdot 2 = 8$



$\frac{16+24+8+12+8}{4096} = \frac{68}{4096} = \frac{17}{1024}$

№6.





$2kp - 2kq = -1; \ pq = -\frac{1}{4k^2}$

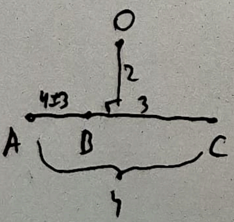
$y_p = kp^2 + (x-p) \cdot 2kp = 2kpx - kp^2$

$y_q = 2kqx - kq^2$

$2kpx - kp^2 = 2kqx - kq^2;$

$2kx(p-q) = k(p-q)(p+q); \ x = \frac{p+q}{2}$

$y = kp(p+q) - kp^2 = kpq = k \cdot \frac{-1}{4k^2} = \frac{-1}{4k} = \text{const}$



$S_{OAB} = 4 \pm 3$

64-03-74-00
(160.1)

Чистовик (лист 3)

Задача 5.

Если рассмотреть (ориентированный) граф, в котором вершины — стороны куба, а рёбрами соединены стороны, ребро между которыми перебежал жук, причём ребро ориентировано в сторону перемещения жука, то по условию: исходящая степень каждой вершины равна 1 и входящая степень каждой вершины равна 1. $\Rightarrow$ граф разбивается на непересекающиеся ориентированные циклы (если кубик не сменил своего первоначального вида)

Всего таких ориент. графов — $4^6 = 4096$

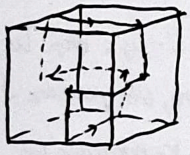
Рассмотрим количества ориент. графов, распадающихся на циклы, в зависимости от длин этих циклов:

1) 3 и 3: цикл длины 3  — проходит круг вокруг 1 вершины куба (возможны 2 направления), а другой цикл длины 3 будет проходить вокруг противоположной вершины; таких пар вершин — $\frac{8}{2} = 4$.
Всего Кол-во вариантов: $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

2) 2 и 4: цикл длины 2 охватывает пару соседних сторон, в оставшемся графе ~~единственно~~ есть ровно 1 цикл длины 4 (без учёта направления)
Кол-во вариантов: $\underbrace{\frac{6 \cdot 4}{2}}_{\text{пары сос. сторон}} \cdot \underbrace{2}_{\text{направление цикла}} = 24$

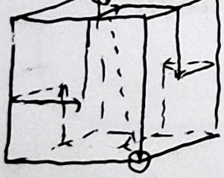
3) 2, 2 и 2: рассмотрим конкретную сторону куба, она соединена с одной из 4 соседних граней, есть ровно 2 способа разбить оставшиеся 4 грани на пары соседних
Кол-во вариантов: $4 \cdot 2 = 8$

4) 6: а) в цикле есть путь через 3 грани, соединяющий противоположные грани 
продолжить этот путь, не меняя направление, невозможно, иначе одна из двух оставшихся сторон будет вне цикла. Поэтому путь повернёт в одну из двух сторон и потом ~~пройдёт~~ повернёт и пройдёт ещё 2 стороны без поворота



пар противоположных сторон, проходимых без поворота — 3, в конце первого „прямого" участка есть 2 варианта, в какую сторону повернуть, и есть 2 варианта направления движения
Кол-во вариантов: $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

б) в цикле нет „прямого участка"



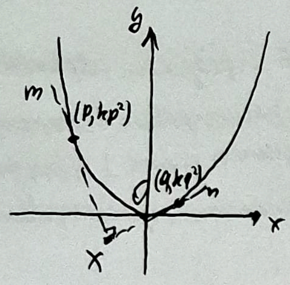
Есть пара (единственная) противоположных вершин, при повороте относительно прямой, их содержащей, ~~путь~~ цикл перейдёт сам в себя; и у него есть ~~В~~ 2 вар. направления
Кол-во вариантов: $4 \cdot 2 = 8$

Всего: $16 + 24 + 8 + 12 + 8 = 68 \Rightarrow$ вероятность $p = \frac{68}{4096} = \frac{17}{1024}$

Ответ: $\frac{17}{1024}$

Чистовик (лист 4)

Задача 6.



Введём систему координат так, что $(0;0)$ — вершина параболы и OX — кас. параболы $\Rightarrow$ уравнение параболы $y=kx^2$

Пусть есть 2 перпендикулярные касательные в точках (p,kp^2) и (q,kq^2) (m и n)

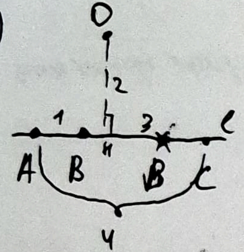
$k_m\cdot k_n=-1$; $k_m=\underbrace{2kp}_{(kx^2)'(p)}$, $k_n=\underbrace{2kq}_{(kx^2)'(q)}$; $4k^2pq=-1$; $pq=-\frac{1}{4k^2}$

Уравнения m и n: $y_m=kp^2+(x-p)\cdot 2kp=2kp\cdot x-kp^2$; $y_n=kq^2+(x-q)\cdot 2kq=2kq\cdot x-kq^2$

$X=m\cap n$, $X(x;y)$: $2kp\cdot x-kp^2=2kq\cdot x-kq^2$; $2kx(p-q)=k(p-q)(p+q)$; $p\neq q$; $k\neq 0$; $x=\frac{p+q}{2}$;

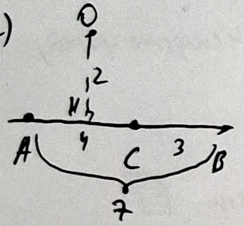
$y=2kp\cdot\frac{p+q}{2}-kp^2=kpq=k\cdot\frac{-1}{4k^2}=-\frac{1}{4k}=const$ — не зависит от p и q, все такие X лежат на одной прямой l ($y=-\frac{1}{4k}$)

1)



$B\in[AC]\Rightarrow AB=AC-BC=4-3=1$; $OH\perp l\Rightarrow OH\perp AB\Rightarrow S_{AOB}=\frac{1\cdot 2}{2}=1$

2)

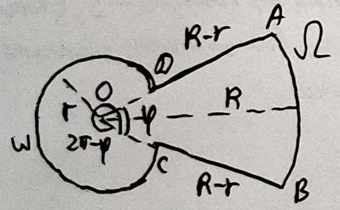


$C\in[AB]\Rightarrow AB=AC+BC=4+3=7$; $OH\perp l\Rightarrow OH\perp AB\Rightarrow S_{AOB}=\frac{7\cdot 2}{2}=7$

Ответ: 1 или 7

Задача 8

(если $AD\parallel BC$, то такой дуги $\overset{\frown}{AB}$: $\overset{\frown}{AB}\perp AD$, $\overset{\frown}{AB}\perp BC$ — не существует)



$O=(AD)\cap(BC)$; $\overset{\frown}{AB}$ — дуга окр. Ω, $\overset{\frown}{CD}$ — дуга окр. ω

$OA\perp\overset{\frown}{AB}\Rightarrow OA$ — радиус Ω, аналогично, OB — радиус Ω,

OC и OD — радиусы ω; R — радиус Ω, r — радиус ω

$\varphi=\angle AOB\Rightarrow\overset{\frown}{AB}=\varphi R$

$2\pi-\varphi=\angle COD$ (больший) $\Rightarrow\overset{\frown}{CD}=(2\pi-\varphi)r$

$\underbrace{\varphi<2\pi-\varphi}_{\varphi<\pi}\Rightarrow R>r\Rightarrow AD=BC=R-r$

$\varphi R\overset{(1)}{=}R-r\overset{(2)}{=}(2\pi-\varphi)r$

$\left.\begin{array}{l}(1)\ r=R(1-\varphi)\\(2)\ R=r(2\pi-\varphi+1)\end{array}\right\}\Rightarrow Rr=R(1-\varphi)\cdot r(2\pi-\varphi+1)\Rightarrow(1-\varphi)(2\pi-\varphi+1)=1$; $\varphi^2-\varphi(2\pi+2)+2\pi+1=1$;

$\varphi^2-2(\pi+1)\varphi+2\pi=0$; $\frac{D}{4}=(\pi+1)^2-2\pi=\pi^2+1$; $\varphi=\pi+1\pm\sqrt{\pi^2+1}\overset{\varphi<\pi}{\Longrightarrow}\varphi=\pi+1-\sqrt{\pi^2+1}$

Ответ: $\pi+1-\sqrt{\pi^2+1}$