



Выход 14-29 - 14.32

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Ульяновск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „ Ломоносов ”
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Семовой Анна Геннадьевна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

« 13 » апреля 202 5 года

Подпись участника

[Подпись]

№1.

тестовик 34

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} + (\sqrt{-(x-2)})^2 = \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{3} \quad \text{Ана-}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2} - (x-2) = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} \\ x-2 \leq 0 \end{cases} \quad 75$$

$$\begin{cases} |2x-3| - (x-3) - (x-2) = 1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) \quad (\text{смысл не имеет}) \\ x \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2x-3| - 2x + 5 = 2 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2x-3| = 2x-3 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

$$1,5 \leq x \leq 2$$

Ответ: $[1,5; 2]$

№2.

Надо понять, при каком наименьшем a графики левой и правой ^{частей} не будут пересекаться. И график правой части будет лежать над графиком левой части. Заметим, что у графика левой части $y = 3^5 = 243$ — асимптота, поэтому при $a < 244$ графики обязательно пересекутся, ^{или} график правой части будет лежать ниже, т.е. в любом случае это нам не подходит.

Но при $a = 244$ графики очевидно не пересекаются и график правой части строго над графиком левой. Значит ответ: 244.

№4.

$$\sin^3(\pi x) - \sin^3(2\pi x) + \sin^3(4\pi x) = (\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x))^3$$

Рассмотрим на отрезке $[0, 3; 1, 6]$

$$\begin{aligned} \text{Правая часть уравнения: } (a-b+c)^3 &= (a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+ac- \\ &- 2bc) = a^3+ab^2+ac^2-2a^2b+2a^2c-2abc- \\ &- 2ab^2-2ab^2c+2b^2c+a^2c+b^2c+c^3-2abc+2ab^2-2bc^2= \\ &= a^3-b^3+c^3+3ab^2+3ac^2-3a^2b+3a^2c-6abc-3bc^2+3b^2c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow ab^2+ac^2-a^2b+a^2c-2abc-bc^2+b^2c=0$$

$$ab^2-abc+ac^2-abc-a^2b+a^2c-bc^2+b^2c=0$$

$$ab(b-c)+ac(c-b)+a^2(b-c)+bc(b-c)=0$$

$$(b-c)(ab-ac-a^2+bc)=0$$

$$(c-b)(a+c)(b-c)=0$$

$$\begin{cases} -\pi x = -4x \\ -2\pi x = -4x \\ -\pi x = -2x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \pi x = -4x + 2\pi k \\ \pi x = \pi + 4\pi x + 2\pi k \\ 2\pi x = 4\pi x + 2\pi k \\ 2\pi x = \pi - 4\pi x + 2\pi k \\ \pi x = +2\pi x + 2\pi k \\ \pi x = \pi - 2\pi x - 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2k}{5} \\ y = -\frac{1+2k}{3} \\ x = -k \\ x = \frac{1+2k}{6} \\ x = -2k \\ x = \frac{1+2k}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x = \frac{2k}{5}: 0; \frac{2}{5}; \frac{4}{5}; \frac{6}{5}; \frac{8}{5}; \frac{10}{5}$$

$$x = -\frac{1+2k}{3}: -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 1; \frac{5}{3}$$

$$y = -k: 0; 1; 2$$

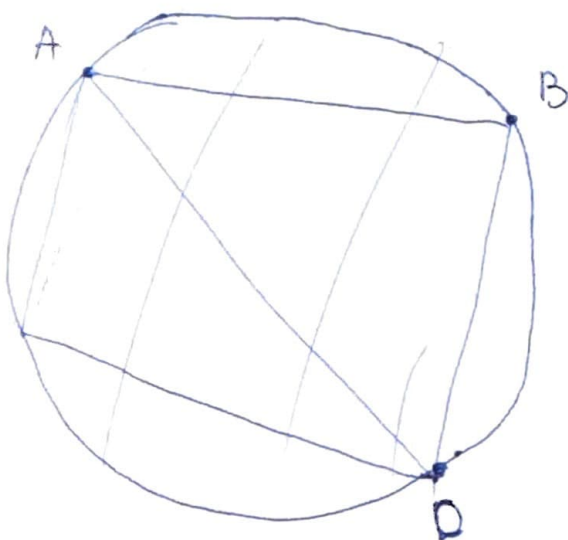
$$y = \frac{1+2k}{6}: \frac{1}{6}; \frac{3}{6}; \frac{5}{6}; \frac{7}{6}; \frac{9}{6}$$

$$x = -2k: 0; 2$$

$$x = \frac{1+2k}{3}$$

Ответ: $\left\{ \frac{2}{5}; \frac{4}{5}; \frac{6}{5}; \frac{8}{5}; \frac{1}{3}; 1; \frac{1}{2}; \frac{5}{6}; \frac{7}{6}; \frac{3}{2} \right\}$

N3.



$$AD = BD = 5$$

$$BC = 5\sqrt{2}$$

Решение

1. проведем радиусы $OA = OB = OC = OD = 5$

1. $\triangle BOC$ - прямоугольный, т.к.

$$BO^2 + OC^2 = BC^2$$

$$\angle BOC = 90^\circ, \angle OBC = \angle OCB = 45^\circ$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC = \frac{25}{2}$$

2. $\triangle AOB = \triangle COB$ - равнобедренный по 3 сторонам

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COB} = \frac{1}{2} \cdot CO \cdot OB \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3} \cdot 25}{4}$$

$$3. \triangle AOD: \angle AOD = 360^\circ - \angle AOB - \angle BOC - \angle COD = 150^\circ$$

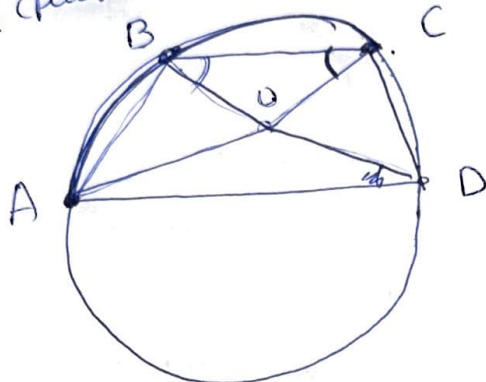
$$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OD \cdot \sin 150^\circ = \frac{25}{4} \text{ метров}$$

$$\begin{aligned} \text{ч. } S_{ABCO} &= S_{\triangle ADO} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COB} + S_{\triangle AOB} = \frac{25}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 25 \cdot 2 + \frac{25}{4} = \\ &= \frac{50 + 50\sqrt{3} + 25}{4} = \frac{75 + 50\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

II. Аналогично, получаем те же 4 треугольника

Ответ: $\frac{75 + 50\sqrt{3}}{4}$

N3. рисунок



$$\begin{aligned} \text{N5. } f_1(x) &= (x+a_1)(x^2+b_1x+6) \\ f_1(x) &= 0, \text{ при } x = -a_1 \text{ и еще 2 корня} \\ f_2(x) &= 0, \text{ при } x = -a_2 \text{ и еще 2 корня} \\ f_3(x) &= 0, \text{ при } x = -a_3 \text{ и еще 2 корня} \end{aligned} \Rightarrow$$

Т.к. $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$, то корни совпадают $\Rightarrow$

$-a_1, -a_2, -a_3 \rightarrow$ корни $f_1(x), f_2(x), f_3(x) \Rightarrow$

$-a_2, -a_3 \rightarrow$ корни $x^2+b_1x+6=0$

$-a_1, -a_3 \rightarrow$ корни $x^2+b_2x+8=0$

$-a_2, -a_1 \rightarrow$ корни $x^2+b_3x+12=0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} -a_2 - a_3 = -b_1 \\ a_2 \cdot a_3 = 6 \\ -a_1 - a_3 = -b_2 \\ a_1 \cdot a_3 = 8 \\ -a_2 - a_1 = -b_3 \\ a_2 \cdot a_1 = 12 \end{cases}$$

по теореме Виета.

$$\Rightarrow 2(a_1 + a_2 + a_3) = b_1 + b_2 + b_3 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 = 3 \neq$$

($a_1 + a_2 + a_3$)

Теперь рассмотрим

$$\begin{cases} a_1 \cdot a_2 = 12 \Rightarrow a_1 = \frac{12}{a_2}, \text{ т.к. } a_2 > 0 \\ a_1 \cdot a_3 = 8 \\ a_2 \cdot a_3 = 6 \end{cases}$$

циркуль

$$\begin{cases} a_1 = \frac{12}{a_2} \\ \frac{12}{a_2} \cdot a_3 = 8 \\ a_2 \cdot a_3 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{12}{a_2} \\ 12a_3 = 8a_2 \\ \frac{12a_3}{8} \cdot a_3 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{12}{a_2} \\ a_2 = \frac{12a_3}{8} \\ a_3 = \sqrt{\frac{6 \cdot 8}{12}} \end{cases}$$

$$a_3 = 2; a_2 = 3; a_1 = 4$$

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 = 27$$

Ответ: 27

№6.

$$r = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \quad \alpha = 60^\circ$$

$$M = 2 \cdot r \cdot \sin 60^\circ = r \cdot \sqrt{3}$$

$$M = r + 2 \cdot \frac{r}{2} = 2r$$

Произвольная: (отрезок - кратчайшее расстояние от 2х кор)

$$\alpha \in [0; \frac{\pi}{3}]$$

Требуется найти минимум функции?

$$f(\alpha) = r - \sqrt{2r^2(1 - \cos \alpha)} + 2 \cdot \sqrt{\frac{5r^2}{4} - r^2 \cos \alpha}$$

$$\frac{f(\alpha)}{r} = 1 - \sqrt{2(1 - \cos \alpha)} + 2 \cdot \sqrt{\frac{5}{4} - \cos \alpha} =$$

$$= 1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2} + \sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$$

$$\left(\frac{f(\alpha)}{r} \right)' = -2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4 \sin \alpha}{2 \cdot \sqrt{5 - 4 \cos \alpha}} =$$

$$= -2 \sqrt{5 - 4 \cos \alpha} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + 4 \sin \alpha =$$

$$= -2 \sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} (4 \sin \frac{\alpha}{2} - \sqrt{1 + 8 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}) = 0$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\alpha}{2} = 0 \text{ (не подходит по ОРЗ)} \\ \frac{4 \sin \frac{\alpha}{2}}{2} = \sqrt{1 + 8 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

$$16 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + 8 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} - \text{не подходит по ОРЗ}$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{3} \Rightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{6} \rightarrow$$

$$0 < \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}$$

$$\alpha_{\min} = 2 \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin \frac{\alpha_{\min}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{длины пути деленные на } r &= \frac{1}{2} - 2 \sin \frac{\alpha_{\min}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5 + 4 \cos \alpha_{\min}} = \\ &= \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5 - 4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + 8 \cdot \frac{1}{8}} = 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\text{длины пути } r = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}$$

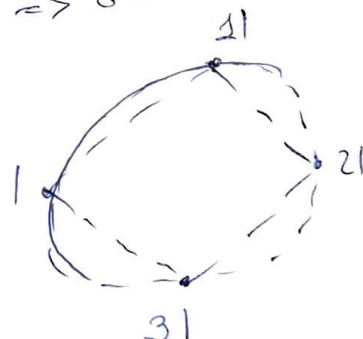
$$\text{Ответ: } \frac{1}{2 + \sqrt{2}}$$

№8.

Назовем все стороны по часовой стрелке 1, 2, ..., 40.
Соответственно 1 параллельна 21, 2 параллельна 22 и т.д.
без отр. обл. Рассмотрим треугольники с сторонами 1,
2-ую сторону будем брать от 22 до 40, т.к. от 29 до 40
будет аналогичный треугольник (равные)

Рассмотрим 1 и 31, к ним подойдут стороны от 12 до 20
по следовательно 9 шт. ~~1 и 32~~ $\Rightarrow 8$ шт.

1 и 32 $\rightarrow$ к ним ~~от 13 до 20~~ $\Rightarrow 7$ шт.
Аналогично, 1 и 33 $\rightarrow 6$ шт.
1 и 34 $\rightarrow 5$ шт.
1 и 35 $\rightarrow 4$ шт.
1 и 36 $\rightarrow 3$ шт.
1 и 37 $\rightarrow 2$ шт.
1 и 38 $\rightarrow 1$ шт.
1 и 39 $\rightarrow 0$ шт.



Итого пока по 45 треугольников.

Теперь: 1 и 30 $\rightarrow$ к ним стороны от 11 до 20 $\Rightarrow 10$ шт.
11 брать не надо, т.к. этот треугольник был посчитан ранее (9 шт.).

1 и 29 $\rightarrow$ от 10 до 20 $\Rightarrow 11$ шт., но! 10, 11 брать не надо
были посчитаны ранее (9 шт.).

1 и 28 $\rightarrow 9$ шт. (аналогично)

... 1 и 22 $\rightarrow 9$ шт.

Итого еще: $9 + 9 + \dots + 9 = 81$ треугольников.

Ответ: $81 + 45 = 126$ треугольников.

Ответ: 126 треугольников

Черновики

$$-x+2 \geq 0 \quad x \leq 2$$

~~XX~~ 3 4 5 6 7 8

$$|2x-9| + |x-3| \cdot x+2 =$$

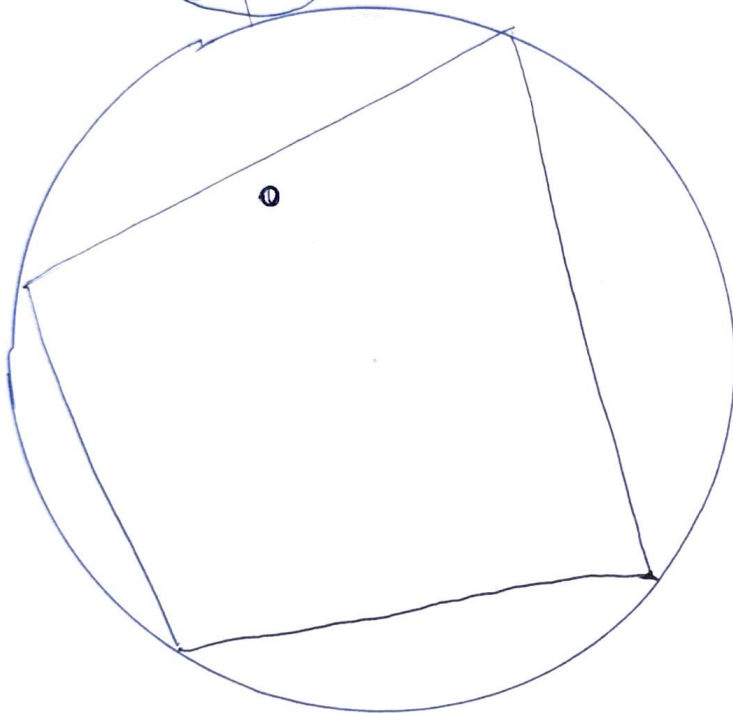
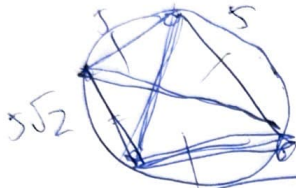
$$2 \cdot \sqrt{2} \cdot (x^2 + 6x + 9) = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = (1 + \sqrt{2})^2$$

Взаимноисключающе.

$$f_1(x) = (x+a)/(x^2+bx+c) \geq a + \sin 4x$$

№3. график продвигается

$$\sin^3 \pi x - \sin^3(2\pi x) + \sin^3(4\pi x) = (\sin(2\pi x) + \sin(4\pi x))^3$$



Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
56-41-53-79	75	+	+	±	+	+	±	0	-

3) Не известно, что 4-е число, сумма 8 цифр

8) Неверное решение

6) Нет достоверных данных (р-ли вычисления не)