



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Питова Захара Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Рр

$$\sqrt{4x^2 + 12x + 9} + \sqrt{2x^2 + 12x + 9} - (\sqrt{-(x+1)})^2 =$$

$$= \sqrt{7} + \sqrt{29} - \sqrt{7} - \sqrt{29}$$

$$\begin{cases} |2x+3| + |3x+2| + x+1 = \sqrt{(\sqrt{6}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{6}-1)^2} \\ -(x+1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2x+3| + |3x+2| + x+1 = \sqrt{6} + 1 - \sqrt{6} + 1 \\ x \leq -1 \Rightarrow 3x+2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2x+3| - 3x - 2 + x + 1 = 2 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2x+3| = 2x+3 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ 2x+3 = 2x+3 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3 < 0 \\ -2x-3 = 2x+3 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -\frac{3}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \\ x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq -1$$

$$\text{Ответ: } x \in \left[-\frac{3}{2}; -1\right]$$

~2

$$5^{3-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 3^x$$

Числа
нет реш при $x > 0$
 $a = ?$
 $a > 0$
 $a < 0$

при $x > 0$ $\sin 3^x$ принимает любое значение от -1 до 1
при $x > 0$ $5^{3-\frac{1}{x}}$ принимает любое значение
от 0 (при $x \rightarrow 0 - \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow 5^{3-\frac{1}{x}} \rightarrow 0$)

до 5^3 (при $x \rightarrow \infty - \frac{1}{x} \rightarrow 0 \Rightarrow 5^{3-\frac{1}{x}} \rightarrow 5^3$)

$5^{3-\frac{1}{x}} \uparrow$ по теореме композиции $\uparrow$, т.к. $x \uparrow$; $\frac{1}{x} \downarrow$ на $x > 0$;
 $-\frac{1}{x} \uparrow$ на $x > 0$.

$$5^{3-\frac{1}{x}} > 0 \quad 5^{3-\frac{1}{x}} < 125$$

$$a-1 \leq a + \sin 3^x \leq a+1$$

т.к. a наименьшее и нет корней $x > 0$

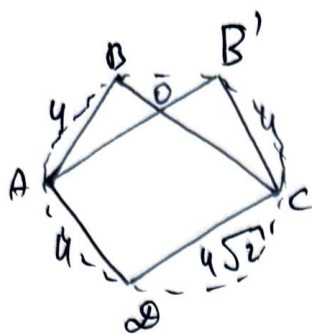
$$\Rightarrow 5^{3-\frac{1}{x}} < 125 \leq a-1 \leq a + \sin 3^x$$

$$\Rightarrow a \geq 126$$

Ответ: ~~125~~ 126

№3 Чистовик

т.к. известные стороны
могут стоять либо в
порядке 4, 4, $4\sqrt{2}$, либо в
порядке 4, $4\sqrt{2}$, 4, то нам
подойдут либо $ABCD$, либо $AB'CD$.



т.к. $AB'CD$ впис. и $AB = B'C$, то $AB'CD$ - равнове-
сная трапеция $\Rightarrow S_{ABC} = S_{AB'C}$ ($O = AB' \cap BC$;
 S_{AOC} - общ и $S_{ABO} = S_{OB'C}$) $\Rightarrow$ порядок не
важен. $S_{ABCD} \neq \max$ при $S_{ABCD} = \max$ и

$$S_{ABC} = \max. (S_{ABCD} = S_{ADC} + S_{ABC})$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot DC \cdot \sin \angle ADC; |\sin t| \leq 1$$

$$\Rightarrow \angle ADC = 90^\circ \Rightarrow AC - \text{диаметр} \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$$

по т. Пифагора: $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{16 + 32} = \sqrt{48}$
где $\triangle ADC$.

где $\triangle ABC$: $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{48 - 16} = \sqrt{32}$

$$S_{ABCD} = S_{ADC} + S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \cdot \sin 90^\circ + \\ + \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 90^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

Ответ: $16\sqrt{2}$

N4

Умножение

$$\cos^3(\pi x) + \cos^2(2\pi x) - \cos^2(4\pi x) =$$

$$= (\underbrace{\cos(\pi x)}_a + \underbrace{\cos(2\pi x)}_b - \underbrace{\cos(4\pi x)}_c)^3$$

$$\cos(2\pi x) = (2\cos^2(\pi x) - 1)$$

$$\cos(4\pi x) = (2\cos^2(2\pi x) - 1) = 2(2\cos^2(\pi x) - 1)^2 - 1 =$$

$$= 2(4\cos^4(\pi x) - 4\cos^2(\pi x) + 1) - 1 = 8\cos^4\pi x - 8\cos^2\pi x + 1$$

$$a^3 + b^3 - c^3 = (a + b - c)^3$$

$$a^3 + b^3 - c^3 = (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc)(a + b - c)$$

$$a^3 + b^3 - c^3 = a^3 + \underline{b^2a} + \underline{c^2a} + \underline{2a^2b} - \underline{2a^2c} - \underline{2ab^2} + \underline{a^2b} + \underline{b^2c} + \underline{2ab^2} - \underline{2abc} - \underline{2b^2c} - \underline{a^2c} - \underline{b^2c} - \underline{c^3} - \underline{2abc} + \underline{2ac^2} + \underline{2bc^2}$$

$$0 = 3b^2a + 3c^2a + 3a^2b - 3a^2c - 6abc + 3bc^2 - 3b^2c$$

$$b^2c + a^2c + 2abc = b^2a + c^2a + a^2b + bc^2$$

$$c(a+b)^2 = c^2(a+b) + ab(a+b)$$

$$a+b=0 \quad (1)$$

$$c(a+b) = c^2 + ab \quad (2)$$

$$1) \cos \pi x + 2\cos^2 \pi x - 1 = 0$$

$$2\cos^2 \pi x + 2\cos \pi x - \cos \pi x - 1 = 0$$

$$2\cos \pi x (\cos \pi x + 1) - (\cos \pi x + 1) = 0$$

$$(\cos \pi x - \frac{1}{2})(\cos \pi x + 1) = 0$$

$$\pi x = \pm \frac{1}{3}\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{1}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

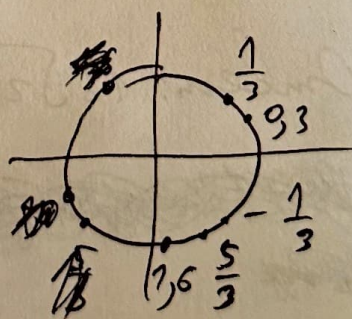
подходят $\frac{1}{3}$, меньшие показатели

не подходят, а $2 - \frac{1}{3} > 1,6 \Rightarrow$ больше нет

$$\pi x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

только $x = 1$



н 4 продолжение 1 Исходник

$$2) a^2 + b^2 = c^2 + a^2$$

$$ac - ab = c^2 - bc$$

$$a(c-b) = c(c-b)$$

$$(a-c)(c-b) = 0$$

$$\begin{cases} a-c=0 & (3) \\ c-b=0 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c=0 & (3) \\ c-b=0 & (4) \end{cases}$$

$$3) \cos^4 \pi x - 8 \cos^2 \pi x + 8 \cos^2 \pi x - 1 = 0$$

$$\cos^4 \pi x - 1 - 8 \cos^2 \pi x (\cos^2 \pi x - 1) = 0$$

$$(\cos^4 \pi x - 1) (1 - 8 \cos^2 \pi x (\cos^2 \pi x + 1)) = 0$$

$$\cos^4 \pi x - 1 = 0$$

$$\pi x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2k, k \in \mathbb{Z} \text{ не подходит}$$

$$1 - 8 \cos^3 \pi x - 8 \cos^2 \pi x = 0$$

$$1 + 2 \cos \pi x = 2 \cos \pi x (4 \cos^2 \pi x + 4 \cos \pi x + 1)$$

$$1 + 2 \cos \pi x = 2 \cos \pi x (2 \cos \pi x + 1)^2$$

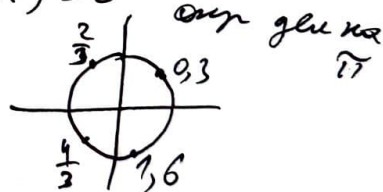
$$(2 \cos \pi x (2 \cos \pi x + 1) - 1) (1 + 2 \cos \pi x) = 0$$

$$1 + 2 \cos \pi x = 0$$

$$\cos \pi x = -\frac{1}{2}$$

$$\pi x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{2}{3} + 2k \text{ не подходит}$$



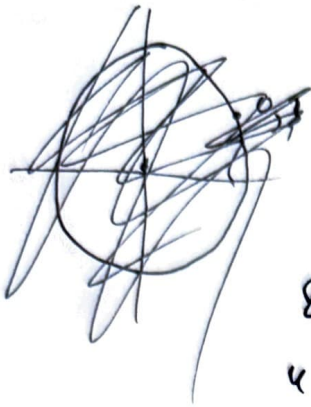
остатки меньше 0,3
или больше 1,6

$$4 \cos^2 \pi x + 2 \cos \pi x - 1 = 0$$

$$\cos \pi x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$$

$$|\cos \pi x| \leq 1 \Rightarrow x \in \emptyset$$

~~$$x = \pm \frac{2}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$~~

нч продолжение 2 Числовые

$$4) 8\cos^4 \pi x - 8\cos^2 \pi x + 1 - 2\cos^2 \pi x + 1 = 0$$

~~4) 8~~

$$8\cos^4 \pi x - 10\cos^2 \pi x + 2 = 0$$

$$4\cos^4 \pi x - 5\cos^2 \pi x + 1 = 0$$

$$\cos^2 \pi x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8}$$

$$\cos^2 \pi x = 2 \quad \text{не подходит} \quad |\cos t| \leq 1$$

$$\cos^2 \pi x = \frac{1}{2} \quad \text{не подходит} \quad t^2 \geq 0$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; 1\frac{1}{3} \right\}$$

$$f_1(x) = (x+a_1)(x^2 + b_1x + 12) \quad N5$$

Числовый

$$f_2(x) = (x+a_2)(x^2 + b_2x + 15)$$

$$f_3(x) = (x+a_3)(x^2 + b_3x + 20)$$

$$f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$$

$$x=0$$

$$a_1 \cdot 12 = a_2 \cdot 15 = a_3 \cdot 20$$

$$a_2 = \frac{4}{5} a_1 \quad a_3 = \frac{3}{5} a_1$$

~~$$x = -a_1$$

$$x + a_2 \neq 0 \Rightarrow x^2 + b_2x + 15 \neq 0$$

$$x + a_3 \neq 0 \Rightarrow x^2 + b_3x + 20 \neq 0$$~~

~~$$a_1^2 + a_1 b_2 + 15 = 0$$~~

~~$$a_1^2 + a_1 b_3 + 20 = 0$$~~

~~$$a_2^2 + a_2 b_1 + 12 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} a_2^2 + a_2 b_3 + 20 = 0 \\ a_3^2 + a_3 b_1 + 12 = 0 \end{array} \right\} \text{ для } x = -a_2$$~~

~~$$a_3^2 + a_3 b_2 + 15 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} a_2^2 + a_2 b_3 + 20 = 0 \\ a_3^2 + a_3 b_1 + 12 = 0 \end{array} \right\} \text{ для } x = -a_3$$~~

~~$$a_2^2 + a_2 b_1 + 12 = 0$$~~

~~$$a_3^2 + a_3 b_1 + 12 = 0$$~~

также возможно только если $a_2 = a_3$, $a_1 = a_2 = a_3$
 а так как $a_2 = \frac{4}{5} a_1 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$

Числовик

№5 продолжение 1

т.к. $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) \Rightarrow$ функции совпадают в каждой точке $\Rightarrow$ их значения одинаковы.

по Тн Внета: $-(x_{11} + x_{12}) = b_1$; ~~$x_{11} \cdot x_{12} = 12 = 4 \cdot 3$~~

$-(x_{21} + x_{22}) = b_2$; $x_{21} \cdot x_{22} = 15 = 5 \cdot 3$

$-(x_{31} + x_{32}) = b_3$; $x_{31} \cdot x_{32} = 20 = 4 \cdot 5$

$x_{13} = -a_1$ $x_{23} = -a_2$ $x_{33} = -a_3$

корни совпадают ($y f_1, f_2, f_3$)

$-(x_{11} + x_{12} + x_{13}) = a_1 + b_1$

$-(x_{21} + x_{22} + x_{23}) = a_2 + b_2$

$-(x_{31} + x_{32} + x_{33}) = a_3 + b_3$

они удовлетворяют по Тн Внета для ~~3~~ ~~уравнения~~ ~~уравнения~~ 3 степени.

подходит $a_1 = 5$, $b_1 = 4$, $a_2 = 4$, $b_2 = 8$, $a_3 = 3$, $b_3 = 9$

$a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 = 12 + 12 + 12 = 36$

Пусть $x_{11} = 4 + \alpha$, тогда $x_{12} = \frac{12}{4 + \alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ так, чтобы $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 > 0$

текущая обобщенность: $x_{11} = x_{22} = x_{33}$; $x_{12} = x_{23} = x_{31}$; $x_{13} = x_{21} = x_{32}$.

$x_{22} = 4 + \alpha$, тогда $x_{21} = \frac{15}{4 + \alpha}$, $x_{23} = \frac{12}{4 + \alpha}$

$x_{33} = 4 + \alpha$, $x_{32} = \frac{15}{4 + \alpha}$, тогда $x_{31} = \frac{12}{4 + \alpha}$

$x_{13} = \frac{15}{4 + \alpha}$

$x_{11} \cdot x_{32} = 20 \Rightarrow \frac{12}{4 + \alpha} \cdot \frac{15}{4 + \alpha} = 20 \Rightarrow \alpha = 1$ $(4 + \alpha)^2 = 60^2$

$\Rightarrow a_1=5, b_1=7, a_2=4, b_2=8, a_3=3, b_3=9$

$\Rightarrow$ Ответ: 36

Учитовки

N 6

две посылки = две окр
в центрах O_1 и O_2

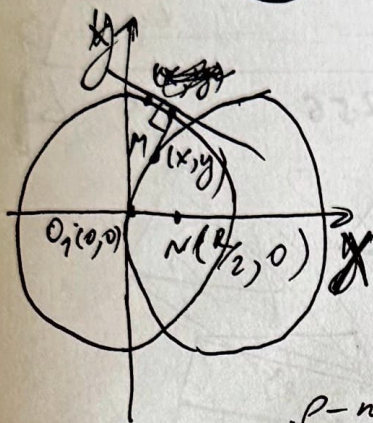
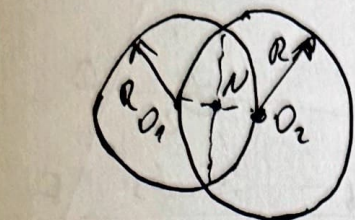
$R = \frac{2-\sqrt{2}}{5}$, N = середина $O_1 O_2$

N - точка

каждое $\sim$ пути $\cdot K$

K - ~~число~~ кол-во посылок

(1) $M(x, y)$ - место пересечения
линий $K=1$ и $K=2$



R - путь линии

из M кратчайший путь - это по радиусу
по теореме Пифагора

$\Rightarrow R = (R - \sqrt{x^2 + y^2}) + 2\sqrt{(x - \frac{R}{2})^2 + y^2}$

$R = R - \sqrt{x^2 + y^2} + 2\sqrt{x^2 + y^2 - xR + \frac{R^2}{4}}$

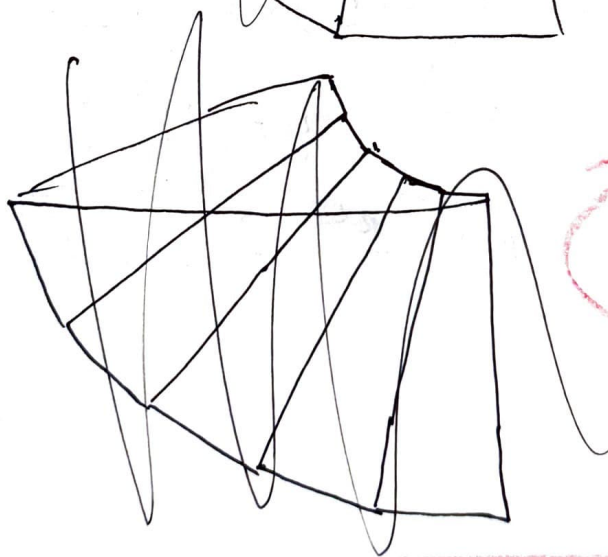
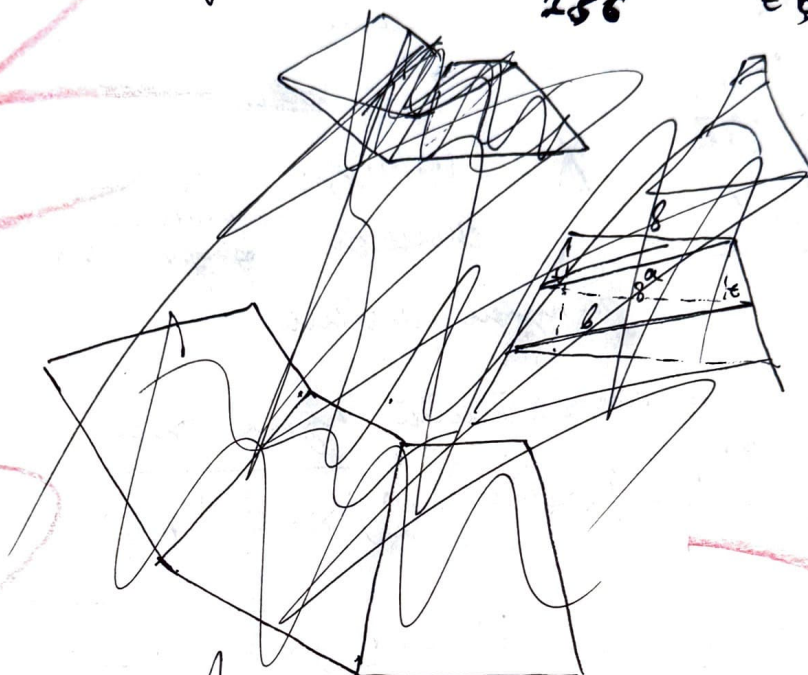
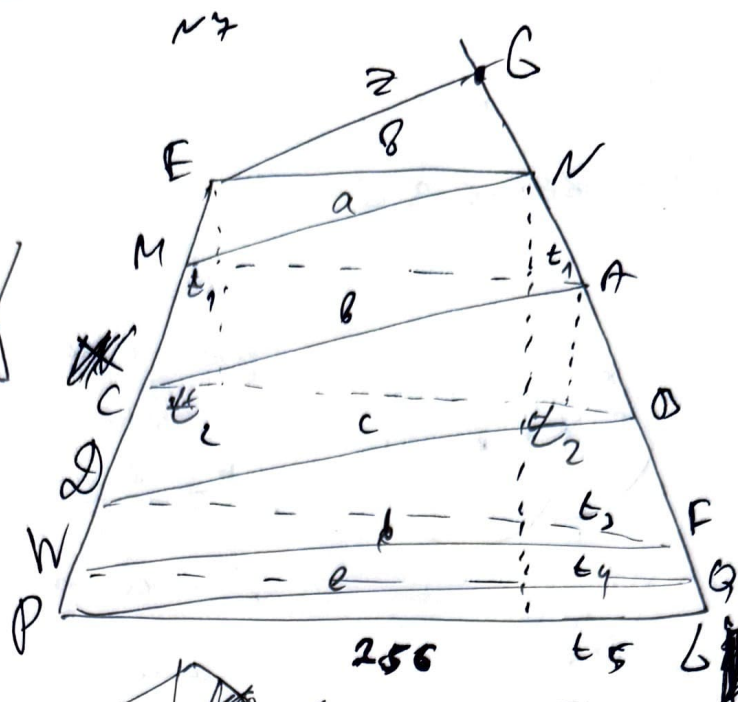
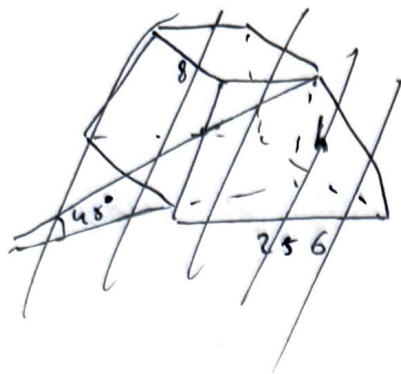
min при $x = \frac{R}{2}$ $y = \frac{\sqrt{3}}{2} R$

$R = R - R + 2\sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{3}{4}R^2 - \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{4}}$

$R = \frac{\sqrt{3}}{2} R$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{5}$

Чистовик



$$a+b+c+d+e = 124\sqrt{10}$$

Числовик

$$x = \sqrt{\frac{(256-8)^2}{2} + 16} = \sqrt{124^2 + 16}$$

Пусть назовем $2t_1+8$ $2t_2+8$ $2t_3+8$ $2t_4+8$ $2t_5+8$ $\cos \gamma = \cos \alpha$

$$2t_1+8=256$$

из подобия по 2 углам $\triangle EGM; \triangle HNA; \triangle PAB; \triangle QOF; \triangle FWG; \triangle GPL$

$$\frac{2}{8} = \frac{a}{8+2t_1} = \frac{b}{8+2t_2} = \frac{c}{8+2t_3} = \frac{d}{8+2t_4} = \frac{e}{8+2t_5}$$

по Thalesa

$$CD = 13F \quad \frac{CD}{AB} = K \Rightarrow e = Kb = K^2c = K^3d = K^4a =$$

$$K^5$$

$$\frac{e}{2} = \frac{256}{8} = 32 = K^5 \Rightarrow K=2$$

$$\Rightarrow 2t_1+8 = 2 \cdot 8 \Rightarrow t_1 = 4$$

$h_a = NK_a$ - высота по теореме Пифагора

$$h_a = MK_a \cdot \tan 45^\circ = MK_a$$

$$MK_a = \sqrt{t_1^2 + (t_1+8)^2} = \sqrt{16+144}$$

$$MK_a = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

$$h_b = \sqrt{t_2^2 + (t_2+8)^2} = \sqrt{144+400}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{8} = \frac{h_a}{h_b} \Rightarrow h_b = 8\sqrt{10}, h_c = 16\sqrt{10}, h_d = 32\sqrt{10}, h_e = 64\sqrt{10}$$

$$h_a + h_b + h_c + h_d + h_e = h$$

$$20\sqrt{10} + 40\sqrt{10} + 64\sqrt{10} = h$$

$$h = 124\sqrt{10}$$

Ответ: $124\sqrt{10}$

[illegible]