



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов 2025 г.
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Туровской Марии Тедиевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

[подпись]

Черновик:

$$1) |2x-3| + |x-3| - (x-2) = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{(\sqrt{2}-1)^2} - \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{(\sqrt{2}-1)^2} \quad x \leq 2$$

$$|2x-3| + |x-3| - x + 2 = 1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1)$$

$$|2x-3| + |x-3| - x = 0 \quad 65 \text{ (много десят тысяч)}$$

$$x \leq 2 \Rightarrow x-3 \leq -1 < 0 \Rightarrow |2x-3| + 3 - x - x = 0$$

$$|2x-3| + 3 - 2x = 0$$

$$\text{Если } x \geq 1,5 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow [1,5; 2]$$

$$\text{Если } x < 1,5 \Rightarrow 3 - 2x + 3 - 2x = 0$$

$$x = 1,5$$

Ответ: $[1,5; 2]$

N2:

$$x > 0 \Rightarrow \frac{x}{2} > 0 \Rightarrow 3^{5-\frac{x}{2}} < 243$$

$$\frac{3^{5-\frac{x}{2}} - \sin 4^x}{\frac{x-1}{2-1}} \geq a$$

$$\frac{3^{5-\frac{x}{2}} - \sin 4^x}{\leq 1} < 244$$

$$\frac{3^{5-\frac{x}{2}} - \sin 4^x}{\frac{x-1}{2-1}} \geq a$$

$$\frac{3^{5-\frac{x}{2}} - \sin 4^x}{\geq -1} > -1$$

(244)

$$f(x) = 3^{5-\frac{x}{2}} - \sin 4^x$$

$$f'(x) = 3^{5-\frac{x}{2}} \cdot \ln(3) \cdot \frac{1}{2} - \cos 4^x \cdot 4^x \cdot \ln 4$$

N3:

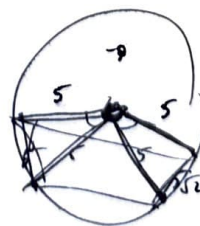


$$d_1 \cdot d_2 = 25\sqrt{2} + 5 \cdot x$$

2 шуга

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 + \frac{5 \cdot 5}{2} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5$$

$$\frac{25\sqrt{3}}{2} + \frac{25}{2} + \frac{25}{4}$$



Умножим:

$$4) a^3 - b^3 + c^3 = (a-b+c)^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b+c)^3 - c^3$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)((a-b+c)^2 + c^2 + c(a-b+c))$$

$$\begin{cases} a=b \\ a^2 + ab + b^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac - 2bc + c^2 + ac - bc + c^2 \end{cases}$$

$$3ab + 3bc = 3c^2 + 3ac$$

$$ab + bc = c^2 + ac$$

$$b(a+c) = c(a+c)$$

$$\checkmark \begin{cases} b=c \\ a=b \\ a=c \end{cases}$$

$$① b=c \Rightarrow \sin 2\pi x = \frac{2\sin 2\pi x \cos 2\pi x}{\sin 4\pi x}$$

$$\sin 2\pi x (2\cos 2\pi x - 1) = 0$$

$$② a=b$$

$$③ a=-c \Rightarrow \sin \pi x = \frac{-\sin 4\pi x}{-2 \cdot \sin 2\pi x \cdot \cos 2\pi x}$$

$$\begin{array}{r} 24^2 \\ 9416 \\ 16 \\ \hline 546 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23^2 \\ 22404 \end{array}$$

$$-2 \cdot 2 \cdot \cos \pi x \cdot \sin \pi x \cdot \cos 2\pi x$$

$$\frac{\sin \pi x}{0} (1 + 4 \cos \pi x \cdot \cos 2\pi x) = 0$$

$$1 + 4 \cos \pi x (2 \cos^2 \pi x - 1) = 0$$

$$8 \cos^3 \pi x - 4 \cos \pi x + 1 = 0$$

$$(2 \cos \pi x - 1)(4 \cos^2 \pi x + 2 \cos \pi x - 1) = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 4 = 20$$

$$\cos \pi x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8}$$

$$\cos \pi x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Черновик:

$$\begin{cases} (x+a_1)(x^2+b_1x+6) = (x+a_2)(x^2+b_2x+8) \\ (x+a_1)(x^2+b_1x+6) = (x+a_3)(x^2+b_3x+12) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 + (a_1+b_1) \cdot x^2 + (a_1b_1+6)x + 6a_1 = x^3 + (a_2+b_2) \cdot x^2 + (a_2b_2+8)x + 8a_2 \\ x^3 + (a_1+b_1) \cdot x^2 + (a_1b_1+6)x + 6a_1 = x^3 + (a_3+b_3) \cdot x^2 + (a_3b_3+12)x + 12a_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 + (a_1+b_1) \cdot x^2 + (a_1b_1+6)x + 6a_1 = x^3 + (a_2+b_2) \cdot x^2 + (a_2b_2+8)x + 8a_2 \\ x^3 + (a_1+b_1) \cdot x^2 + (a_1b_1+6)x + 6a_1 = x^3 + (a_3+b_3) \cdot x^2 + (a_3b_3+12)x + 12a_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+b_1-a_2-b_2) \cdot x^2 + (a_1b_1-a_2b_2-2) \cdot x + 6a_1-8a_2 = 0 \\ (a_1+b_1-a_3-b_3) \cdot x^2 + (a_1b_1-a_3b_3-6) \cdot x + 6a_1-12a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+b_1-a_2-b_2) \cdot x^2 + (a_1b_1-a_2b_2-2) \cdot x + 6a_1-8a_2 = 0 \\ (a_1+b_1-a_3-b_3) \cdot x^2 + (a_1b_1-a_3b_3-6) \cdot x + 6a_1-12a_3 = 0 \end{cases}$$

$$a_1+b_1 = a_2+b_2$$

$$a_1+b_1 = a_3+b_3$$

$$a_1 \cdot b_1 = a_2b_2 + 2$$

$$a_1 \cdot b_1 = a_3b_3 + 6$$

$$6a_1 = 8a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{3}{4} \cdot a_1 = 1,5a_3$$

$$6a_1 = 12a_3 \Rightarrow a_1 = 2a_3$$

$$2a_3+b_1 = a_3+b_3$$

$$a_3 = b_3 - b_1$$

$$2a_3+b_1 = 1,5a_3+b_2$$

$$0,5a_3 = b_2 - b_1$$

$$b_3 - b_1 = 2(b_2 - b_1)$$

$$b_1 + b_3 = 2b_2$$

$$2a_3 \cdot b_1 = 1,5a_3 \cdot b_2 + 2 = a_3 \cdot b_3 + 6 \quad b_3 - 2b_1 + b_2 = 1,5a_3$$

$$\begin{cases} a_3(1,5b_2 - b_3) = 4 \\ a_3(2b_1 - 1,5b_2) = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$1,5b_2 - b_3 = \frac{4}{a_3}$$

$$2b_1 - 1,5b_2 = \frac{2}{a_3}$$

$$3b_2 - b_3 - 2b_1 = \frac{2}{a_3}$$

$$b_3 - 2b_1 + b_2 = 1,5a_3$$

$$2b_3 - 2b_2 = 1,5a_3 - \frac{2}{a_3}$$

$$b_3 - b_2 = \frac{3}{4}a_3 - \frac{1}{2a_3}$$

$$= \frac{1}{2}a_3$$

$$\frac{1}{4}a_3 = \frac{1}{2a_3}$$

$$\frac{1}{4}a_3^2 = 1$$

$$a_3 = 2$$

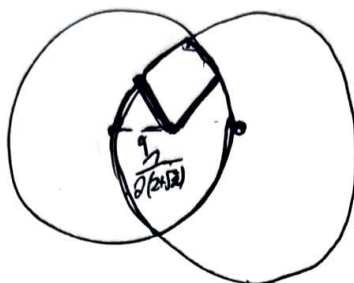
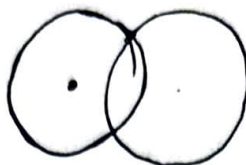
Черновик:

$$\cos 2\alpha = -\cos 2\alpha$$

$$2\cos 2\alpha - 1 = 3\cos \alpha - 4\cos 3\alpha$$

NC:

$$4\cos 3\alpha + 2\cos 2\alpha - 3\cos \alpha + 1 = 0$$



$$7\cos 15^\circ - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}+2}{2}$$

N7:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \cos \frac{2\pi}{5}$$

$$\cos 15^\circ =$$



$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \frac{\sqrt{5}+2}{2}$$

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \frac{2\sqrt{5}+2}{725} > 3$$

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{4} = \frac{6+15}{20}$$

$$\frac{3}{10} + \frac{5}{6} = \frac{9+25}{30} = \frac{34}{30}$$

$$\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)$$

$$\frac{3}{10}$$

$$\frac{3}{10} - \frac{5}{6} = \frac{9-25}{30} = \frac{-16}{30}$$

$$\cos 2\alpha = -\cos 2\alpha$$

$$4\cos 3\alpha - 3\cos \alpha = -2\cos 2\alpha + 1$$

$$4\cos 3\alpha + 2\cos \alpha - 3\cos \alpha - 1 = 0$$

$$\frac{3}{10} - \frac{3}{4} = \frac{6-15}{20} = \frac{-9}{20}$$

$$3\sin \alpha - 4\sin 3\alpha =$$

$$4 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{8}{5} - \frac{5}{6} = \frac{48-25}{30} = \frac{23}{30}$$

$$\frac{3}{10} - \frac{1}{6} = \frac{9}{30} + \frac{5}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

$$\frac{7}{15}$$

$$\frac{8}{5} - \frac{3}{4} = \frac{32-15}{20} = \frac{17}{20}$$

$$\frac{3}{10} + \frac{2}{3} = \frac{9+20}{30} = \frac{29}{30}$$

$$\frac{8}{5} + \frac{7}{6} = \frac{48+35}{30} = \frac{83}{30}$$

$$\frac{8}{5} + \frac{2}{3} = \frac{24+10}{15} = \frac{34}{15}$$

$$\frac{8}{5} + \frac{3}{4} = \frac{32+15}{20} = \frac{47}{20} = \frac{47}{20}$$

Чистовик

Задача 1:

$$\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2} + (\sqrt{-(x-2)})^2 = \sqrt{2+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} \quad \text{Обл. оп. упрощ.}$$

$$|2x-3| + |x-3| - (x-2) = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} \quad x \leq 2$$

$$|2x-3| + |x-3| - x + 2 = 1 + \sqrt{2} - |\sqrt{2}-1|$$

$$\sqrt{2} > 1 \Rightarrow \sqrt{2-1} = \sqrt{2}-1 \Rightarrow:$$

$$(\text{так } 2 > 1)$$

$$|2x-3| + |x-3| - x + 2 = 1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2}-1)$$

$$|2x-3| + |x-3| - x = 0$$

$$\text{Из обл. оп.} \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow \frac{x-3}{\leq 2} \leq -1 < 0 \Rightarrow |x-3| = 3-x \Rightarrow:$$

$$|2x-3| + 3 - 2x = 0$$

$$1) \text{ Если } x \geq 1,5 \Rightarrow 2x \geq 3 \Rightarrow 2x-3 \geq 0 \Rightarrow |2x-3| = 2x-3 \Rightarrow:$$

$$2x-3+3-2x=0$$

$$0=0$$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{в данной обл. и с учетом обл. оп.: } x \in [1,5; 2].$$

$$2) \text{ Если } x \leq 1,5 \Rightarrow 2x \leq 3 \Rightarrow 2x-3 \leq 0 \Rightarrow |2x-3| = 3-2x \Rightarrow:$$

$$3-2x+3-2x=0$$

$$2 \cdot (3-2x) = 0$$

$$x = 1,5.$$

$$\text{Из п. 1 и 2} \Rightarrow x \in [1,5; 2].$$

$$\text{Ответ: } [1,5; 2].$$

Задача 2:

$$3^{5-\frac{x}{2}} - \sin 4^x \geq a$$

$$1) x > 0 \Rightarrow \frac{x}{2} > 0 \Rightarrow 5 - \frac{x}{2} < 5 \Rightarrow 3^{5-\frac{x}{2}} < 243$$

$$\sin 4^x \geq -1 \Rightarrow -\sin 4^x \leq 1$$

$$\Rightarrow 3^{5-\frac{x}{2}} - \sin 4^x <$$

$$< 244.$$

$$2) 3^{5-\frac{x}{2}} > 0$$

$$\sin 4^x \leq 1 \Rightarrow -\sin 4^x \geq -1 \Rightarrow 3^{5-\frac{x}{2}} - \sin 4^x > -1.$$

$$\text{Из п. 1 и 2} \Rightarrow (3^{5-\frac{x}{2}} - \sin 4^x) \in (-1; 244) \text{ при } x > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ наименьшее положительное a , при котором неравенство не

Итого:

Задача 2 (продолжение):

имеет ли одно решение $x > 0$: $a_{\min} = 244$ (т.к. если $a < 244$, то все положительные x , при которых $(3^{5-\frac{x}{2}} - \sin 4x) \in [0, 244)$, являются решениями уравнения).

Ответ: 244.

Задача 4:

$$\sin^3(\pi x) - \sin^3(2\pi x) + \sin^3(4\pi x) = (\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x))^3$$

Замена: $\sin(\pi x) = a$; $\sin(2\pi x) = b$; $\sin(4\pi x) = c$.

$$a^3 - b^3 + c^3 = (a - b + c)^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b + c)^3 - c^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)((a - b + c)^2 + c^2 + c(a - b + c))$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc + c^2 + ac - bc + c^2)$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)(a^2 + b^2 + 3c^2 - 2ab + 3ac - 3bc)$$

$$(a - b)(a^2 + b^2 + 3c^2 - 2ab + 3ac - 3bc - a^2 - ab - b^2) = 0$$

$$(a - b)(3c^2 - 3ab + 3ac - 3bc) = 0$$

$$(a - b)(c(c + a) - b(a + c)) = 0$$

$$(a - b)(c - b)(a + c) = 0$$

$$\begin{cases} a = b \\ b = c \\ a = -c \end{cases} \begin{matrix} \text{обн.} \\ \text{зам.} \end{matrix} \begin{cases} \sin(\pi x) = \sin(2\pi x) & (1) \\ \sin(2\pi x) = \sin(4\pi x) & (2) \\ \sin(\pi x) = -\sin(4\pi x) & (3) \end{cases}$$

$$(1) \sin(\pi x) = 2\sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x)$$

$$\sin(\pi x)(2\cos(\pi x) - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \sin(\pi x) = 0 \\ \cos(\pi x) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi x = \pi k; k \in \mathbb{Z} \\ \pi x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k; k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{1}{3} + 2n; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$a) \frac{3}{10} \leq k \leq 1\frac{3}{5}; k \in \mathbb{Z}$$

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$b) \frac{3}{10} \leq \frac{1}{3} + 2n \leq \frac{8}{5}; n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{30} \leq 2n \leq \frac{19}{15}; n \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{1}{60} \leq n \leq \frac{19}{30}; n \in \mathbb{Z}$$

$$n = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$6) \frac{3}{10} \leq -\frac{1}{5} + 2n \leq \frac{8}{5}; n \in \mathbb{Z}$$

Числовик.

$$\frac{19}{30} \leq 2n \leq \frac{29}{15}; n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{19}{60} \leq n \leq \frac{29}{30}; n \in \mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{19}{60} > 0 \Rightarrow n > 0 \\ \frac{29}{30} < 1 \Rightarrow n < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow n \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{в данном случае парных значений нет.}$$

$$(2) \sin(2\pi x) = 2 \cdot \sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x)$$

$$\sin(2\pi x) (2 \cos(\pi x) - 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin(2\pi x) = 0 \\ \cos(2\pi x) = \frac{1}{2} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\pi x = \pi^m; m \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi s; s \in \mathbb{Z} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{m}{2}; m \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{1}{6} + s; s \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

$$a) \frac{3}{10} \leq \frac{m}{2} \leq \frac{8}{5}; m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3}{5} \leq m \leq \frac{16}{5}; m \in \mathbb{Z}$$

$$m = 1, 2, 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, 1, 1.5$$

$$b) \frac{3}{10} \leq \frac{1}{6} + s \leq \frac{8}{5}; s \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{2}{15} \leq s \leq \frac{47}{30}; s \in \mathbb{Z}$$

$$s = 1 \Rightarrow x = 1\frac{1}{6}$$

$$6) \frac{3}{10} \leq -\frac{1}{6} + s \leq \frac{8}{5}; s \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{2}{15} \leq s \leq \frac{53}{30}; s \in \mathbb{Z}$$

$$s = 1 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

$$(3) \sin(\pi x) = -2 \cdot \sin(2\pi x) \cdot \cos(\pi x)$$

$$\sin(\pi x) + 4 \cdot \cos(\pi x) \cdot \sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x) = 0$$

$$\sin(\pi x) (1 + 4 \cdot \cos(\pi x) \cdot (2 \cos^2(\pi x) - 1)) = 0$$

$$\sin(\pi x) (8 \cos^3(\pi x) - 4 \cos(\pi x) + 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin(\pi x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ (с.н.т)} \\ 8 \cos^3(\pi x) - 4 \cos(\pi x) + 1 = 0 \text{ (3.1)} \end{array} \right.$$

$$(3.1) \text{ по формуле т. Вебба: } \cos(\pi x) = \frac{1}{2} \Rightarrow (2 \cos(\pi x) - 1)(4 \cos^2(\pi x) + 2 \cdot \cos(\pi x) - 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos(\pi x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ (с.н.т)} \\ \cos(\pi x) = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ (a)} \\ \cos(\pi x) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ (б)} \end{array} \right.$$

$$a) \pi x = \pm \arccos\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) + 2\pi a; a \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\arccos\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} + 2a; a \in \mathbb{Z}$$

Задача 4 (продолжение):

Числовые.

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-1+\sqrt{5} < 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{5} < 2\sqrt{2}+1$$

$$\sqrt{5} < 3$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{2} > 3$$

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4} < \frac{1}{2}$$

$$-1+\sqrt{5} < 2$$

$$\sqrt{5} < 3$$

$$\Rightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{4} < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (м.к. } \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\Rightarrow \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right) \in$$

$$\in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ (м.к. } \frac{-1+\sqrt{5}}{4} > 0 \Rightarrow \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right) \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \frac{\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} \in$$

$$\in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$$

$$\textcircled{1} \frac{3}{10} \leq \frac{\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} + 2a \leq \frac{8}{5}; a \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{10} - \frac{\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi}\right) \leq 2a \leq \frac{28}{5} - \frac{\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi}; a \in \mathbb{Z}$$

$$\in \left(\frac{3}{10}; \frac{1}{2}\right)$$

$$\in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$$

$$\in \left(-\frac{7}{10}; -\frac{1}{30}\right)$$

$$\in \left(\frac{21}{10}; \frac{19}{15}\right)$$

$$\in \left(\frac{22}{10}; \frac{29}{30}\right)$$

м.к.

$$a=0 \Rightarrow x = \frac{\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi}$$

$$\textcircled{2} \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{10} + \frac{\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi}\right) \leq a \leq \frac{7}{2} \left(\frac{8}{5} + \frac{\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi}\right); a \in \mathbb{Z}$$

$$\in \left(\frac{3}{10}; \frac{1}{2}\right)$$

$$\in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$$

$$\in \left(\frac{29}{30}; \frac{4}{5}\right)$$

$$\in \left(\frac{29}{15}; \frac{21}{10}\right)$$

$$\in \left(\frac{29}{10}; \frac{2}{5}\right)$$

$$\in \left(\frac{29}{30}; \frac{21}{20}\right)$$

$$* \frac{\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} < \frac{2}{5} \Rightarrow a < 1 \Rightarrow a \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right) < \frac{2}{5}\pi$$

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4} > \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$\Rightarrow$ в рамках круга реш. нет.

Чистовик.

Задача 4 (продолжение):

$$\pi x = \pm \arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right) + 2\pi b; b \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \pm \frac{\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} + 2b; b \in \mathbb{Z}$$

$$b) \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{4} > -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{4} < -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$-1-\sqrt{5} > -2\sqrt{3} \quad -1-\sqrt{5} < -2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{3}-1 > \sqrt{5} \quad 1+\sqrt{5} > 2\sqrt{2}$$

$$13-4\sqrt{3} > 5 \quad 6+2\sqrt{5} > 8$$

$$8 > 4\sqrt{3} \quad 2\sqrt{5} > 2$$

$$2 > \sqrt{3} \quad \sqrt{5} > 1$$

$$\Rightarrow \arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right) \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow \frac{\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} \in \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{6}\right)$$

$$① \quad \frac{3}{10} \leq \frac{\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} + 2b \leq \frac{8}{5}; b \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{2}{2} \left(\frac{3}{10} - \frac{\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} \right) \leq b \leq \frac{2}{2} \left(\frac{8}{5} - \frac{\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} \right); b \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\in \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{6}\right)}{\in \left(\frac{22}{30}, \frac{17}{20}\right)} \leq b \leq \frac{\in \left(\frac{22}{30}, \frac{17}{20}\right)}{\in \left(\frac{22}{30}, \frac{17}{20}\right)}$$

$$\frac{\in \left(\frac{22}{30}, \frac{17}{20}\right)}{\in \left(-\frac{4}{15}, -\frac{9}{40}\right)}$$

$$b=0 \Rightarrow x = \frac{\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi}$$

$$② \quad \frac{1}{2} \left(\frac{3}{10} + \frac{\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} \right) \leq b \leq \frac{1}{2} \left(\frac{8}{5} + \frac{\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} \right)$$

$$\frac{\in \left(\frac{22}{30}, \frac{17}{20}\right)}{\in \left(\frac{47}{40}, \frac{23}{60}\right)} \leq b \leq \frac{\in \left(\frac{47}{40}, \frac{23}{60}\right)}{\in \left(\frac{47}{40}, \frac{23}{60}\right)}$$

$$\frac{\in \left(\frac{22}{30}, \frac{17}{20}\right)}{\in \left(\frac{22}{30}, \frac{17}{20}\right)}$$

$$b=1 \Rightarrow x = -\frac{\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} + 2$$

$$\text{Уз } n, 2n+3 \Rightarrow x = 1; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}; \frac{\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi}; -\frac{\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} + 2; \frac{\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi};$$

$$\text{Ответ: } 1; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}; \frac{\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi}; -\frac{\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} + 2; \frac{\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi}.$$

Условие.

Задача 5:

Пусть $x \in \mathbb{R}$ верно условие $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) \Rightarrow$:

$$\begin{cases} (x+a_1) \cdot (x^2+b_1x+6) = (x+a_3) \cdot (x^2+b_3x+12) \\ (x+a_2) \cdot (x^2+b_2x+8) = (x+a_1) \cdot (x^2+b_1x+6) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 + (a_1+b_1) \cdot x^2 + (a_1 \cdot b_1 + 6) \cdot x + 6a_1 = x^3 + (a_3+b_3) \cdot x^2 + (a_3b_3+12) \cdot x + 12a_3 \\ x^3 + (a_2+b_2) \cdot x^2 + (a_2 \cdot b_2 + 8) \cdot x + 8a_2 = x^3 + (a_1+b_1) \cdot x^2 + (a_1 \cdot b_1 + 6) \cdot x + 6a_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_1+b_1-a_3-b_3) \cdot x^2 + (a_1 \cdot b_1 - a_3 \cdot b_3 - 6) \cdot x + 6a_1 - 12a_3 = 0 \\ (a_1+b_1-a_2-b_2) \cdot x^2 + (a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2 - 2) \cdot x + 6a_1 - 8a_2 = 0 \end{cases}$$

Оба квадратные уравнения выполняются при $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$:

$$\begin{cases} a_1+b_1 = a_3+b_3 \\ a_1+b_1 = a_2+b_2 \\ a_2 \cdot b_1 = a_3 \cdot b_3 + 6 \\ a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 + 2 \\ 6a_1 = 12a_3 \Rightarrow a_1 = 2a_3 \\ 6a_1 = 8a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{3}{4} \cdot a_1 = \frac{3}{2} \cdot a_3 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} a_1+b_1 = 2a_3+b_1 = a_3+b_3 \\ a_2+b_2 = 1,5a_3+b_2 = a_1+b_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_3+b_1 = 1,5a_3+b_2 \\ b_2-b_1 = 0,5a_3 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 2a_3+b_1 = a_3+b_3 \\ 1,5a_3+b_2 = 2a_3+b_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = b_3 - b_1 \\ 0,5a_3 = \frac{b_2-b_1}{2} \Rightarrow b_3+b_2-2b_1 = 1,5a_3 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} 2a_3 \cdot b_1 = \frac{1,5 \cdot a_3 \cdot b_2 + 2}{a_3 \cdot b_3 + 6} \\ 2a_3 \cdot b_1 = 1,5a_3 \cdot b_2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b_1 - b_2 = \frac{2}{a_3} \\ 1,5b_2 - b_3 = \frac{4}{a_3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b_2 - b_3 - 2b_1 = \frac{2}{a_3} \\ b_3 + b_2 - 2b_1 = 1,5a_3 \end{cases}$$

$$\text{Из п. 2 и 3} \Rightarrow \begin{cases} 3b_2 - b_3 - 2b_1 = \frac{2}{a_3} \\ b_3 + b_2 - 2b_1 = 1,5a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b_3 - 2b_2 = 1,5a_3 - \frac{2}{a_3} \\ b_3 - b_2 = 0,75a_3 - \frac{1}{a_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1+b_1 = a_3+b_3 = 2a_3+b_1 \\ a_1+b_1 = 1,5a_3+b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3+b_3 = 1,5a_3+b_2 \\ b_3-b_2 = 0,5a_3 \\ 2(b_3-b_2) = a_3 \Rightarrow 0,5a_3 = \frac{2}{a_3} \end{cases}$$

Задача 5 (продолжение):

Числовые.

$$a_3^2 = 4$$

$$a_3 = 2 \text{ (т.к. } a_3 > 0) \Rightarrow a_1 = 2 \cdot 2 = 4; a_2 = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$$

$$\begin{cases} 4 + b_1 = 2 + b_3 \\ 4 + b_1 = 3 + b_2 \\ 2 + b_3 = 3 + b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_3 = b_1 + 2 \\ b_2 = 1 + b_1 \\ 2 + b_1 + 2 = 3 + 1 + b_1 \end{cases}$$

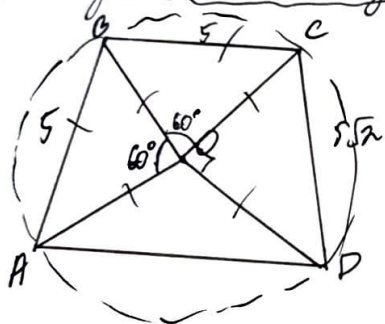
$$\begin{cases} 4 \cdot b_1 - 2 \cdot b_3 = 6 \\ 4 \cdot b_1 - 3 \cdot b_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b_1 - 2(b_1 + 2) = 6 \\ 4b_1 - 3(1 + b_1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b_1 = 10 \\ b_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_2 = 1 + 5 = 6; b_3 = 5 + 2 = 7 \Rightarrow a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 = 9 \cdot 3 = 27.$$

Ответ: 27

Задача 3:

Пусть m, O — центр окружности, пусть также даны стороны AB, BC и CD (без отрезков, касающихся m, O внутри $ABCD$):



Найти:

$$S_{ABCD} - ?$$

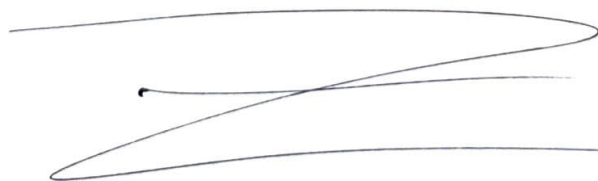
Решение.

Пусть $AB = BC = 5$; $CD = 5\sqrt{2}$ (без отрезков, касающихся m, O) $\Rightarrow \triangle AOB$ и $\triangle BOC$ — $\triangle$ с (т.к. $OA = OB = OC = OD = 5 = R$), а $\triangle COD$ — $\triangle$ прямоуг. (по отрезкам, касающимся m, O) $\Rightarrow \angle AOB = \angle BOC = 60^\circ$ (по условию углов и свойству $\triangle$ с),

$$\angle COD = 90^\circ \Rightarrow \angle AOD = 360^\circ - 2 \cdot 60^\circ - 90^\circ = 360^\circ - 120^\circ - 90^\circ = 150^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin 150^\circ = 5 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{25}{2} + \frac{25}{4} = \frac{50\sqrt{3} + 50 + 25}{4} = \frac{50\sqrt{3} + 75}{4}.$$

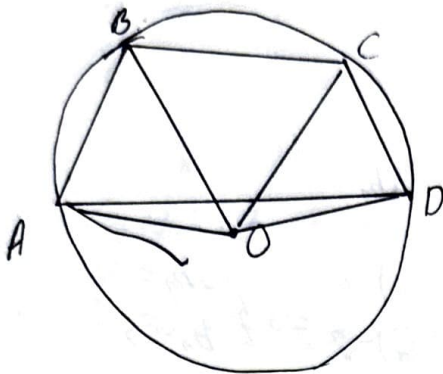
2-ой случай



Чистовик.

2-ой случай (если $m.O$ ^{расположен} вне четверти-ка ABCD):

①



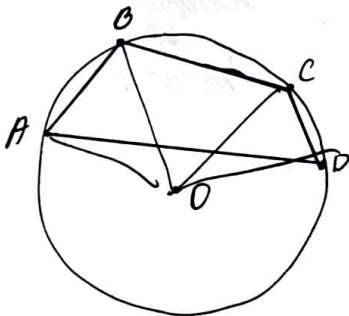
Найти:

S_{ABCD} - ?

Решение.

Если нам даны AB, BC и CD, то ^{на основе} ~~аналогично~~ ^{аналогично} случай 1: $\angle AOD = 60^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 120^\circ + 90^\circ = 210^\circ > 180^\circ \Rightarrow m.O$ располагается ^{вне} AD, т.к. сумма углов $\triangle AOD = 180^\circ \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ такого быть не может.

②



Найти:

S_{ABCD} - ?

Решение.

Если нам дано AD, то на основе п.1: макс. возможное значение $\angle AOD = 90^\circ$, а 2 угла из $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD$ равны как минимум $60^\circ \Rightarrow$ мин. возможное значение суммы трех углов $= 120^\circ$, а макс. возможное значение $\angle AOD = 90^\circ < 120^\circ \Rightarrow$ такого быть не может, т.к. $\angle AOD$ сумма ~~двух~~ ^{трех} углов.

Ответ: $\frac{50\sqrt{3} + 75}{4}$.

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
10-98-25-22		+	$\pm$	+	$\pm$	+	0	0	0

- 2) Нем дозволено, посыл при $a < 244$ получить субъективные суждения.
- 4) Точная посыл $\frac{08}{5}$.