



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов“
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Тюрина Данииле Михайловна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход 12:48
Возвраще 12:52
+1 Мст / Данилов Д.С.

Дата
«13» апреля 2025 года

Подпись участника

02-27-13-50

(160.2)

Зерновик.

$$\textcircled{1} \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x} - \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} \geq \log_2 x + 1$$

$$\left(\sqrt{t^2 + 3t} - \sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq t + 1 \right)^2$$

$$t^2 + 3t - \sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq t^2 + 2t + 1$$

$$(3t - 2t - 1 \geq \sqrt{t^2 + 3t - 4})^2$$

$$t^2 - 2t + 1 \geq t^2 + 3t - 4$$

50 (наибольшему)

$$1 + 4 \geq 5t$$

$$5t \leq 5$$

$$t \leq 1$$

$$\log_2 x \leq 1$$

$$\log_2 x + 1 \geq 0$$

$$\log_2 x \geq -1$$

$$\log_2 x \in [-1; 1]$$

$$\log_2 x \in [-1; 1]$$

$$\begin{aligned} 2^{-1} &= x \\ 2^1 &= x \\ 2^0 &= x \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\log_2 x + 1 \leq 0$$

$$\log_2 x \leq -1$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$t^2 + 3t - \sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq 0$$

$$\left(t^2 + 3t \geq \sqrt{t^2 + 3t - 4} \right)^2 \quad t^2 + 3t \geq 0$$

$$t^4 + 9t^2 + 6t^3 \geq t^2 + 3t - 4$$

Задача.

УР №1

① $\sqrt{\log_2^2 x + 3\log_2 x} - \sqrt{\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4} \geq \log_2 x + 1$

1 случай: $\log_2 x + 1 \geq 0$

$\log_2 x \geq -1$ *

Возведем обе части в квадрат

$\log_2^2 x + 3\log_2 x - \sqrt{\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4} \geq \log_2^2 x + 2\log_2 x + 1$

$\log_2 x - 1 \geq \sqrt{\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4}$

$\log_2 x - 1 \geq 0$ всегда, т.к. $\sqrt{\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4} \geq 0$
 $\log_2 x \geq 1$ (1) $\forall x > 0$

Возведем обе части в квадрат

$\log_2^2 x - 2\log_2 x + 1 \geq \log_2^2 x + 3\log_2 x - 4$
 $1 + 4 \geq 3\log_2 x + 2\log_2 x$
 $5\log_2 x \leq 5 \quad / :5$

$\log_2 x \leq 1$ (2)

Учитывая (1), (2) и *, $\log_2 x \geq 1$

$x \geq 2$

проверка ОДЗ:

$\begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x + 3\log_2 x - \sqrt{\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4} \geq 0 \end{cases}$

1) $2 > 0$ верно

2) $1^2 + 3 \cdot 1 - \sqrt{1^2 + 3 \cdot 1 - 4} \geq 0$ верно

3) $1^2 + 3 \cdot 1 - 4 \geq 0$ верно (0 ≥ 0)

2 случай: $\log_2 x + 1 < 0$

$\log_2 x < -1$ **

тогда, $\sqrt{a} \geq b$, где $a \geq 0$, $b < 0$ всегда верно

Проверю ОДЗ:

$\begin{cases} \log_2^2 x + 3\log_2 x - \sqrt{\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4} \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4 \geq 0$

Числовая.

стр N° 2

① продолжение

1) $\log_2 x \geq t$

$$t^2 + 3t \geq 2\sqrt{t^2 + 3t - 4}$$

$$t^2 + 3t \geq 0 \text{ всегда}$$

т.е. $\log_2^2 x + 3\log_2 x \geq 0$

$$\log_2 x (\log_2 x + 3) \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_2 x \in (-\infty; -3] \cup [0; +\infty)} \quad (1)$$

1) и 3) $t^2 + 3t - 4 \geq 0$

$$t_1 = -4; t_2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_2 x \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty)} \quad (2)$$

Пересечение

2) $x > 0$ (3)

(1), (2) и (3): $\boxed{\log_2 x \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty)}$

Пусть $t^2 + 3t = 0$.

$$(t \geq \sqrt{t^2 - 4})^2 \text{ Возведем обе части в квадрат}$$

$$t^2 \geq t^2 - 4$$

$$t^2 - t^2 + 4 \geq 0$$

$$0 \geq 1 - 4 \cdot 4 = -15 < 0$$

всегда верноСмотрим $\blacktriangle$ и $\blackstar$, получаем $\log_2 x \in (-\infty; -4]$.Функция $f(x_0) = 16x_0$, $16x_0$ - целоеПроверим: 1) $x_0 \geq 2$: $f(2) = 16 \cdot 2 = 32$ - верно $\in \mathbb{Z}$

2) $\log_2 x = -4$

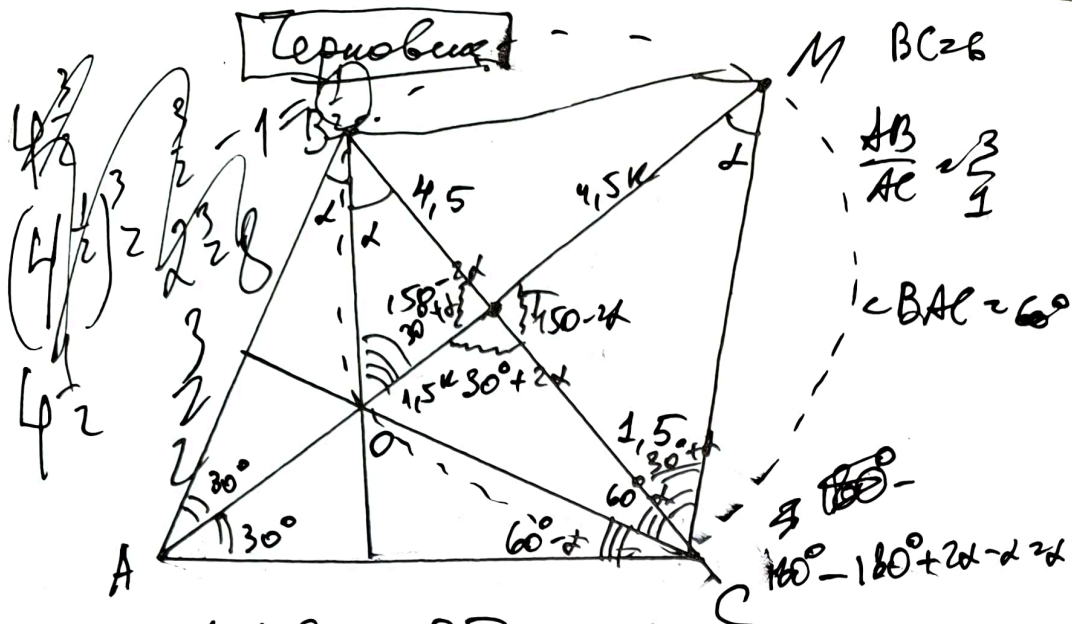
$$x = 2^{-4} = \frac{1}{16}, \quad f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{16} \cdot 16 = 1 \in \mathbb{Z} \text{ верно}$$

3) при $\log_2 x < -4$: $x < \frac{1}{16} \Rightarrow$

$$f(x_0) < 1 \Rightarrow \text{т.к. } x > 0, \text{ то}$$

$$f(x_0) \in (0; 1) \Rightarrow f(x_0) - \text{не целое.}$$

Ответ: $32 + 1 = 33$.



по св-ву: $\frac{BT}{TC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{1}$

$BT = 3x, TC = x$
 $4x = 6$
 $x = 1.5$

$4.5 = \frac{4.5}{1.5} = \frac{3}{1}$

$OT \cdot TM = BT \cdot TC$

$OT \cdot TM = 4.5 \cdot 1.5 = \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{4}$

$\frac{180^\circ - 2x - 60^\circ}{2} = \frac{120^\circ - 2x}{2} = 60^\circ - x$

Δ подобна $\Delta BTO \sim \Delta MTC$

$\frac{OT}{1.5} = \frac{TM}{4.5}$

$\frac{OT}{TC} = \frac{BT}{TM}$

$\frac{OT}{1.5} = \frac{4.5}{TM}$

$\frac{MT}{BT} = k$

$MT = \frac{4.5k}{4.5}$

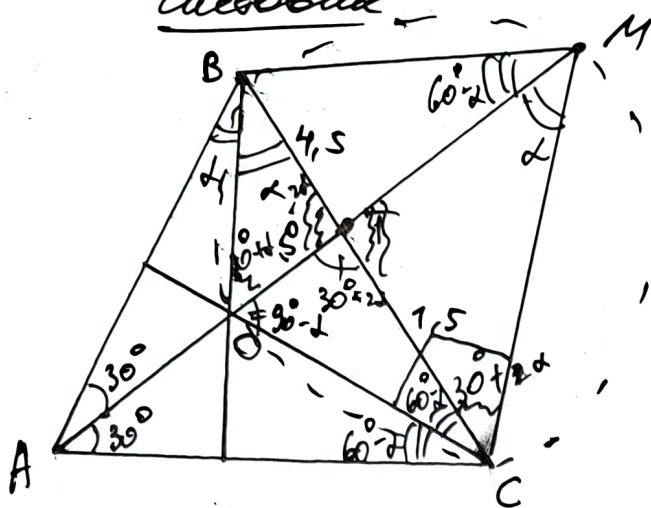
$OT \cdot TM = \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{4}$

$TC \cdot MC \cdot \sin$

Задача

ар. № 3

②



1) Пусть $T \in BC \cap OM$

Опишем в $\triangle ABC$, ... O - центр ($\angle BAC = 60^\circ$)

Тогда:

2) по св-ву биссектрисы AT :

$$\frac{BT}{TC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{1}, \quad BT = 3x, \quad TC = x$$

$$BT + TC = BC = 6$$

$$4x = 6$$

$$x = 1.5$$

$$\Rightarrow BT = 4.5, \quad TC = 1.5.$$

3) по теореме о пересекющихся хордах

$$BT \cdot TC = MT \cdot TO$$

$$\frac{9}{2} \cdot \frac{3}{2} = MT \cdot TO = \frac{27}{4} \Rightarrow MT = \frac{27}{4TO}$$

4) Проведем MC . 1) Тогда $\angle BOM = \angle MCB$
 $= \frac{1}{2} \angle BMC$ - опираются на одну дугу

2) $\angle BTO = \angle MTC$ как вертикальные

$$\Rightarrow \triangle BTO \sim \triangle MTC$$

$$\frac{BT}{OT} = \frac{MT}{CT}, \quad \text{но } \frac{4.5}{OT} = \frac{\frac{27}{4TO}}{1.5}$$

$$5) \angle BTO = 180^\circ - 30^\circ - 2\alpha = 150^\circ - 2\alpha \quad (\alpha = \angle ABO)$$

$$\angle BOT = 180^\circ - \alpha - (150^\circ - 2\alpha) = 30^\circ + \alpha$$

$$\angle ACB = \frac{180^\circ - 2\alpha - 60^\circ}{2} = 60^\circ - \alpha$$

$$\Rightarrow \angle AOCM = 60^\circ - \alpha + 30^\circ + \alpha = 90^\circ. \Rightarrow OM - диаметр.$$

Черновик.

023: $\cos x \geq 0$ $-3 \sin x \geq 0$



$$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3 \sin x} \geq 0$$

$$\cos x \geq -2\sqrt{-3 \sin x}$$

$$\forall \cos x \geq 0$$

$$\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3 \sin x} \geq 0$$

$$(\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3 \sin x})^2$$

$$(\cos x - 3 \sin x) \geq 0$$

$$\cos^2 x \geq 9 \sin^2 x$$

$$1 - \sin^2 x \geq 9 \sin^2 x$$

$$10 \sin^2 x \leq 1$$

$$\sin^2 x \leq \frac{1}{10}$$

$$\sin x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right]$$

$$\begin{cases} x+1-a \geq 0 \\ 4^x - a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a-1 \\ x \geq \log_4 a \end{cases}$$

$$-a \leq 0$$

$$a \in (0; +\infty)$$

$$x+1-a \geq 4^x - a \Leftrightarrow x+1 \geq 4^x$$

$$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3 \sin x} \geq 4\sqrt{\cos x - 3 \sin x}$$

$$6\sqrt{-3 \sin x} \geq 3\sqrt{\cos x}$$

$$2\sqrt{-3 \sin x} \geq \sqrt{\cos x}$$

$$4(-3 \sin x) \geq \cos x$$

$$(-12 \sin x \geq \cos x)^2$$

$$\cos^2 x \leq 144 \sin^2 x$$

$$144 \sin^2 x \geq \cos^2 x$$

$$|x+1-a| + |4^x - a| \geq 4^x - x - 1 \text{ имеет на } [-1; 1]$$

$$\text{З! } \textcircled{1} \text{ решаем}$$

$$|1+1-a| = |-a|$$

$$-a \geq 0$$

$$x+1-a + 4^x - a \geq 4^x - x - 1$$

$$x+x-2a-2 \geq 0$$

$$|4^{-1} - a| \geq \left| \frac{1}{4} - a \right|$$

$$|4^1 - a| \geq |4 - a|$$

$$2x - 2a - 2 \geq 0$$

$$x - a - 1 \geq 0$$

$$x \geq a+1$$

Условие

ср. № 5

③ ООЗ: $\cos x \geq 0$



$-3 \sin x \geq 0$



$\Rightarrow x \in IV$ четверть

$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3 \sin x} \geq 0$
верно $\forall x \in \text{ООЗ}$

$\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3 \sin x} \geq 0$
 $(\sqrt{\cos x})^2 - (\sqrt{-3 \sin x})^2$

$\cos^2 x \geq -3 \sin x$

Т.к. $\sin x \leq 0$, $-3 \sin x \geq 0$,
 $\cos x \geq 0$, то

$\cos^2 x \geq 9 \sin^2 x$

$1 - \sin^2 x \geq 9 \sin^2 x$

$10 \sin^2 x \leq 1$

$\sin^2 x \leq \frac{1}{10}$

$\sin x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}\right]$

Т.к. $x \in IV$, то $\sin x \leq 0$

$\sin x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{10}}; 0\right]$

Обе части ^{неравенства} ≥ 0
Возведем в квадрат

$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3 \sin x} \geq 4\sqrt{\cos x} - 4\sqrt{-3 \sin x}$

$6\sqrt{-3 \sin x} \geq 3\sqrt{\cos x} \quad | :3$

$(2\sqrt{-3 \sin x})^2 \geq (\sqrt{\cos x})^2$

$4 \cdot (-3) \sin x \geq \cos x$

$-12 \sin x \geq \cos x$

Т.к. $\sin x \leq 0$, $\cos x \geq 0$, то

Возведем в квадрат

$144 \sin^2 x \geq \cos^2 x$

$144 \sin^2 x \geq 1 - \sin^2 x$

$145 \sin^2 x \geq 1$

$\sin^2 x \geq \frac{1}{145}$

$\Rightarrow \sin x \in \left[-1; -\frac{1}{\sqrt{145}}\right] \cup \left(\frac{1}{\sqrt{145}}; 1\right]$

По ООЗ $\sin x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{10}}; 0\right]$

$\Rightarrow \sin x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{10}}; -\frac{1}{\sqrt{145}}\right]$

тогда $x \in \left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + 2\pi k; \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{145}}\right) + 2\pi k\right)$

Ответ: $x \in \left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + 2\pi k; \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{145}}\right) + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

$\frac{145}{10} = \frac{145}{10} = 14.5$
 $\frac{145}{10} = 14.5$

$\sqrt{145} = \sqrt{5 \cdot 29}$

Исходная.

стр. № 6

④ $|x+1-a| + |4^x - a| = 4^x - x - 1$

1 случай: $\begin{cases} x+1-a \geq 0 \\ 4^x - a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (1)$

$x+1-a + 4^x - a = 4^x - x - 1$

$2x - 2a + 2 = 0$

$2x = 2a - 2 \quad | :2$

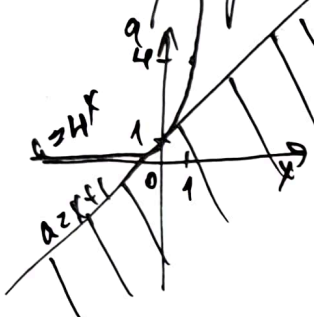
$x = a - 1$

т.е. $x \in [-1; 1]$, то $-1 \leq a - 1 \leq 1 \quad | +1$

$0 \leq a \leq 2$

$a \in [0; 2]$

Проверим систему (1)



1) $x \geq a - 1$ верно ($x \geq a - 1$ - условие случая)

2) $4^x - a \geq 0 \quad 4^x \geq a \quad 4^{-1} \geq 0 \quad 4^0 \geq 1 \quad 4^1 \geq 2$

$\log_4 a \leq x$

2 случай: $\begin{cases} x+1-a \leq 0 \\ 4^x - a \geq 0 \end{cases} \quad x \leq a - 1 \quad [a \geq 2]$

$-x - 1 + a + 4^x - a = 4^x - x - 1$

$-1 = -1$ верно $\rightarrow$ т.е. x - любое

Для любого a выполняется:

$\begin{cases} x+1-a \leq 0 \\ x \leq a-1 \end{cases} \quad x \in [-1; 1]$

не подходит

$4^x - a \geq 4^x - 2 \geq a \quad \frac{1}{4} \geq a \quad 1 \geq a \quad 4 \geq a$
 $\Rightarrow a \in [0; 1] \cup [2; +\infty)$ было единственное решение,
 т.е. $4^x - x - 1 \geq a$
 $x \in [-1; 1]$

Шовши.

стр. № 7

④ продолжение

случай: $\begin{cases} x+1-a \geq 0 \\ 4^x - a \leq 0 \end{cases}$

$x \geq a-1$

$a-1 \leq -1$

$\boxed{a \leq 0}$

$x+1-a-4^x+a \geq 4^x-x-1$

$4^x+4^x-x-x-1-1 \geq 0$

$2 \cdot 4^x - 2x - 2 \geq 0$

$4^x - x - 1 \geq 0$

$4^x \geq x+1$

$4^x \in [\frac{1}{4}; 4], x+1 \in [0; 2]$

корней нет

$f(x) = 4^x$

возрастает и всегда больше, чем $f(x) = x+1$

случай: $\begin{cases} x+1-a \leq 0 \\ 4^x - a \leq 0 \end{cases}$

$x \leq a-1$

$a-1 \geq 1$

$\boxed{a \geq 2}$

$-x-x+a-4^x+a \geq 4^x-x-x$

$2a = 2 \cdot 4^x$

$a = 4^x$

$4^x \in [\frac{1}{4}; 4]$

$4^x - 4^x \leq 0$ верно

$a \in \{2\} \cup \{4\}$

$\Rightarrow a \in [2; 4]$

верно при любом значении x

но в условии $a \geq 2$ при $a \in (2; 4)$ в условии не выполняется (выполнение случая 2)

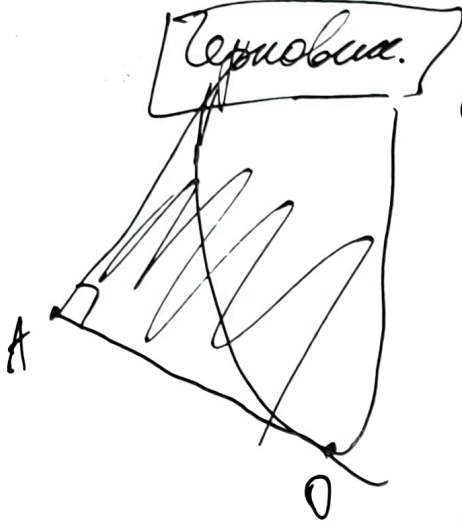
Итак, $a \in [0; 2] \cup a \in \{2\} \cup \{4\}$.

Значит, при $a \geq 2 \exists 2 x \in [-1; 1]$, где x_0 - корни уравнения

$\Rightarrow a \geq 2$ - не подходит.

Ответ: $a \in [0; 2] \cup \{4\}$.

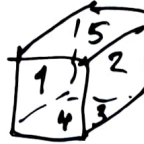
6.



5. 1) туш — 4 водора,

$$p \approx 0,25$$

1 туш подеша



↓ помет. $p_1 = 1$

2 туш 9 3 водора

$$p_2 \approx 0,75$$

$$p_3 \approx 0,5$$

$$p_4 \approx 0,25$$

$$0,75$$

$$0,5$$

$$0,25$$

$$0,75$$

$$0,25$$

$$0,75$$

$$0,25$$

$$0,75$$

$$0,25$$

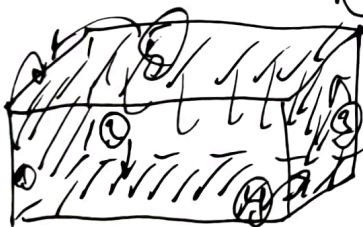
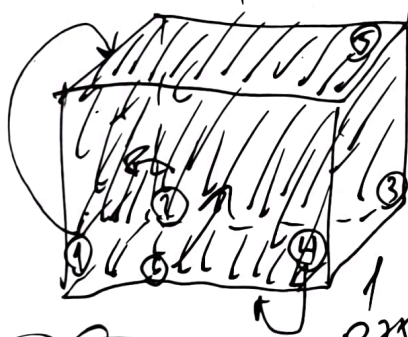
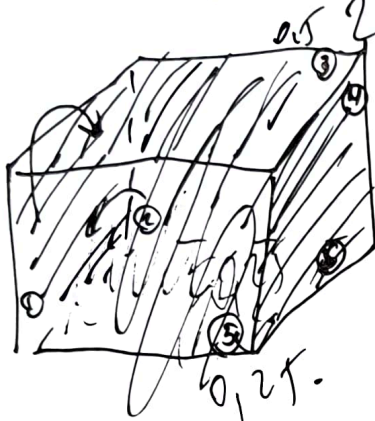
$$0,75$$

$$0,25$$

$$0,75$$

$$0,25$$

$$0,75$$

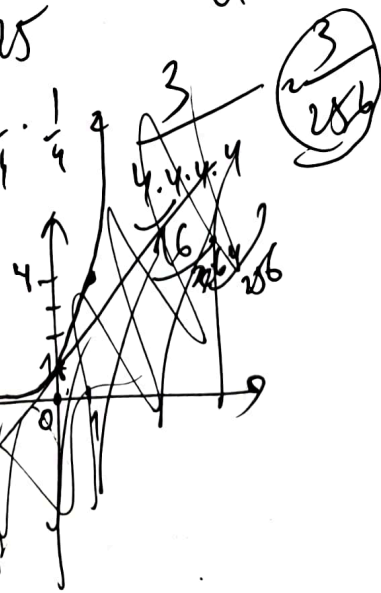


9.

$x+1-a \approx 0$
 $x+1-a \approx 0$

$x+1-a \approx 0$
 $x+1-a \approx 0$

$x+1-a \approx 0$
 $x+1-a \approx 0$



Шестовский

ср. №4

② продолжение.

$$\angle BOT = 30^\circ + \alpha, \angle OTC = 180^\circ - \angle BTO = 180^\circ - 150^\circ + 2\alpha = 30^\circ + 2\alpha$$

$$\text{тогда } \angle TOC = 180^\circ - \angle OTC - \angle TCO = 180^\circ - (30^\circ + 2\alpha) - (60^\circ - \alpha) = 90^\circ - \alpha$$

$$\text{тогда } \angle BOC = \angle BOT + \angle TOC = 30^\circ + \alpha + 90^\circ - \alpha = 120^\circ = 2\angle BAC.$$

по следствию из теоремы синусов для $\triangle OBC$:

$$\frac{BC}{\sin \angle BOC} = 2R = d = OM.$$

$$\frac{6}{\sin 120^\circ} = OM \Rightarrow \frac{6}{\sin 60^\circ} = OM, \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow OM = \frac{6}{(\frac{\sqrt{3}}{2})} = 6 : (\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

Ответ: $4\sqrt{3}$

$4^x \geq 4$ $x \geq 1$
 $x \geq 1$
 ~~$x+3-4^x+4 \geq 4^x-x-1$~~
 ~~$x+1-2+|4^x-2| = 4^x-x-1$~~
 $|x+1-2| + |4^x-2| = 4^x-x-1$
 $7+1 = |x-1| + |4^x-2| = 4^x-x-1$
 $4^x \geq 4$ $x \geq 1$
 $4^x \geq 2$ $x \geq 1$
 $4^x \geq 2$ $x \geq 1$
 $x-1+4^x-2 = 4^x-x-1$
 $2x = 2$
 $x = 1$
 $x-1 \leq 0$ $x \leq 1$
 $4^x \geq 2$ $4^x \geq 2$
 $x \in [\frac{1}{2}; 1]$
 ~~$x+1+4^x-2 = 4^x-x-1$~~
 ~~$-1 = -1$~~
 $|x+1-1| + |4^x-1| = 4^x-x-1$
 $|x| + |4^x-1| = 4^x-x-1$
 $x \geq 0$ $4^x \geq 1$
 $x+4^x-1 = 4^x-x-1$
 $2x = 0$ $x = 0$
 $x \leq 0$ $4^x \leq 1$
 $x-4^x+1 = 4^x-x-1$
 $|x+1| + |4^x| = 4^x-x-1$
 $x+1 \geq 0$ $x \geq -1$
 $4^x \geq 0$ $4^x \geq 0$
 $x-2+|4^x-3| = 4^x-x-1$
 $|x-4| + |4^x-3| = 4^x-x-1$
 $-x+4-4^x+5 = 4^x-x-1$
 $2 \cdot 4^x \geq 0$

Горюхи.

$$2 \cdot 4^x = 10$$

$$4^x = 5$$

9.

$$x + (-1; 1)$$

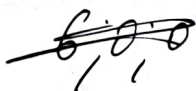
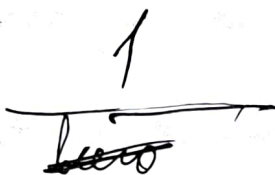
$$|x+1+1| + |4x+1| = 4x - x - 1$$

$$x + 2 + 4x + 1 = 4x - x - 1$$

$$2x = -1 - 3$$

$$6 \text{ штук } 2x = -4$$

$$12 \text{ шт } \boxed{x = 2}$$



$$(4; 2)$$

$$(4; 1; 1)$$



$$(3; 3)$$

$$(3; 2; 1)$$



$$(3; 1; 1)$$

$$(3; 1; 1; 1)$$

$$(2; 2; 2)$$

$$(2; 2; 1; 1)$$

$$\checkmark (2; 1; 1; 1; 1; 1)$$

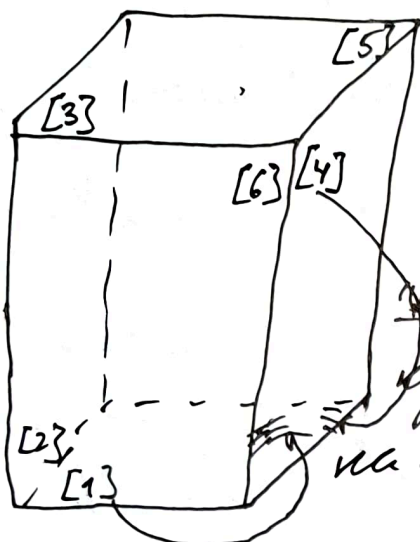
$$\checkmark (1; 1; 1; 1; 1; 1)$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \overline{) 3} \\ -10 \quad 2, 1 \\ -9 \end{array}$$

Гистограмма

стр. №8

⑤



у куба 6 граней =
6 нуков всего.

Рассмотрим суграи:

хвостик: [1] нуков бегит
куда хочет, нуков, шаши,
на правую квадратную грань.

Тогда [4] нуков, занимавших ранее эту грань,
теперь могут бегать куда хотят, нуков на левую
квадратную грань

[2] нуков уже не может бегать на ни одну грань
(т.е. кубик не изменил своей базы), и

тогда $p_2 = 0,75 = \frac{3}{4}$ — половина нуков, нуков на

В результате "перетасовки" на гранях может
быть такое распределение (т.е. нуков и грани-
единиц), порядок граней и номер нуков
и вышек):

- 1) на одной грани — 4, на другой — 2 нука
(и вышка, и вышка) (4, 2)
- 2) (4, 1; 1)
- 3) (3, 2; 2) (3, 3) 4) (1, 1; 1; 1; 1; 1)
- 5) (3, 2; 1) — всего 9 случаев
- 6) (3, 1; 1; 1)
- 7) (2, 2; 2) тогда $P_2 = \frac{1}{9} = 0,11$
- 8) (2, 2; 1; 1)
- 9) (2, 1; 1; 1; 1) Ответ: 0,11.

5 и 6 нуков на одной
гранях быть не может
укажем грани
4 и соседей
(маж) 4 нука могут
перемещаться на
грань.