0 982236 130006

98-22-36-13
(162,6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

$13^{59} - 14^{03}$

Вариант 11 – 1

Место проведения Краснодар
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Ункунов Валерий Юрьевич
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» 04 2025 года

Подпись участника
Ункунов

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
98-22-36-13		+	±	+	±	+̣	0	0	−

Белогуцки

98-22-36-13 (162.6)

№5 ∃ все огр. общности $a_1 = a_2$, тогда при условии $f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow$

65 (неск. расст нет)

$x^2 + b_1x + 6 = x^2 + b_2x + 8$ что равносильно $b_2x = b_1x - 2$

что может быть верно не более чем при одном ~~условии~~ знач x, что противоречит условию $\Rightarrow a_1, a_2, a_3$ попарно различны, тогда $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$, имеет 3 корня $(-a_1, -a_2, -a_3)$, тогда по теореме Виета

Чистовик

$$\begin{cases} -a_1 - a_2 - a_3 = -b_1 \\ -a_1 - a_3 = -b_2 \\ -a_1 - a_2 = -b_3 \\ a_1 \cdot a_3 = 6 \\ a_1 \cdot a_3 = 8 \\ a_2 \cdot a_3 = 12 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Перемножим их $\Rightarrow$

$(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3)^2 = 576$ – что равносильно

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 24$, откуда $a_1 = 4$, $a_2 = 3$, $a_3 = 2$, тогда

$b_1 = 5$, $b_2 = 6$, $b_3 = 7$, $\Rightarrow a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 = 27$

Отв: 27

№1 $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2 = \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}$

$\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{2-x}^2 = \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}$

$|2x-3| + |x-3| + \sqrt{2-x}^2 = \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}$ ОДЗ: $x \le 2$

$\frac{3}{2}$ 2

1° $x \le \frac{3}{2}$

$3 - 2x - x + 3 + 2 - x = \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}$

$-4x + 8 = \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}$

$64 - 64x + 16x^2 = 3 + \sqrt{8} - 2(\sqrt{9-8}) + 3 - \sqrt{8}$

$16x^2 - 64x + 60 = 0$

$4x^2 - 16x + 15 = 0$

$D = 16^2 - 16 \cdot 15 = 16$

$x_{1,2} = \frac{16 \pm 4}{8} = \frac{5}{2}; \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ не подходит.

$\Downarrow$ пост.

2° $x \in [\frac{3}{2}; 2]$

$2x - 3 + 3 - x + 2 - x = \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}$

$2 = \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}$

$4 = 3 + \sqrt{8} - 2 + 3 - \sqrt{8}$

$4 = 4 \Rightarrow x \in [\frac{3}{2}; 2]$ – подходит $\Rightarrow$ Отв: $x \in [\frac{3}{2}; 2]$

Чистовик №2 $3^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 4^x$ Найдем область знач. функции $f(x) = 3^{5-\frac{1}{x}}$, при $x > 0$ $E(f) = [0; 243)$

т.к $\left(5 - \frac{1}{x}\right) \in (-\infty; 5)$, причем при $x \to +\infty$ $f(x) \to 243$

Найдем ОЗ $g(x) = a + \sin 4^x$, это $[a-1; a+1] \ni E(g)$

$a - 1 = g(x)$, при $x = \log_4 \pi k$, где $k \in N$

Заметим что $h(x) = \log_4 \pi x$ возр и неогр

Тогда комп. $f(h(x))$ - будет также $\to 243$, при $x \to +\infty$

$\Leftrightarrow$ для любого $N < 243$, существует X, при всех $x > X$, $f(h(x)) > N$, Если $a < 244$, то $a - 1 < 243$,

$\exists N = a - 1$, подставим, мы найдем реш. для $f(h(x)) > a - 1$

а значит и для $g(x) > f(x)$, Тогда $a = 244$ и обл. знач.

$E(g) \in [243; 245]$, а значит $g(x) > f(x)$ при $x > 0 \Rightarrow$

Ответ: $a = 244$.

№4 Сделаем замену $\sin \pi x = a$, $-\sin^3(2\pi x) = b$, $\sin(4\pi x) = c \Rightarrow$

$\cancel{a^3} + \cancel{b^3} + \cancel{c^3} = \cancel{a^3} + \cancel{b^3} + \cancel{c^3} + 3a^2c + 3ac^2 + 3a^2b + 3ab^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$, Правую часть разл.

$0 = a^2c + ac^2 + a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + 2abc$

$0 = (a+b)(b+c)(c+a)$; $a + b = 0$ или $b + c = 0$ или $a + c = 0$

$\sin \pi x = \sin 2\pi x$ или $\sin 2\pi x = \sin 4\pi x$ или $\sin \pi x = -\sin 4\pi x$.

$$\left[\begin{array}{l} \sin \pi x = 2\sin \pi x \cdot \cos \pi x \\ \sin 2\pi x = 2\sin 2\pi x \cdot \cos 2\pi x \\ \sin \pi x = -4\sin \pi x \cdot \cos \pi x \cdot \cos 2\pi x \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \cos \pi x = \frac{1}{2} \\ \sin \pi x = 0 \\ \cos 2\pi x = \frac{1}{2} \\ \sin 2\pi x = 0 \\ \cos \pi x \cdot \cos 2\pi x = -\frac{1}{4} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 2n_1 \pm \frac{1}{3} \\ x = n_2 \\ x = n_3 \pm \frac{1}{6} \\ x = \frac{n_4}{2} \\ \cos \pi x \cdot \cos 2\pi x = -\frac{1}{4}. \end{array}\right.$$

$\exists \cos \pi x = t \Rightarrow t \cdot (2t^2 - 1) = -\frac{1}{4}$ $\quad 8t^3 - 4t + 1 = 0$ $\quad (2t-1)(4t^2 + 2t - 1) = 0$

По схеме Горнера

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \cos \pi x = \frac{1}{2} \\ \cos \pi x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2n_1 \pm \frac{1}{3} \\ x = 2n_5 \pm \frac{2}{5} \\ x = 2n_6 \pm \frac{4}{5} \end{array}\right.$$

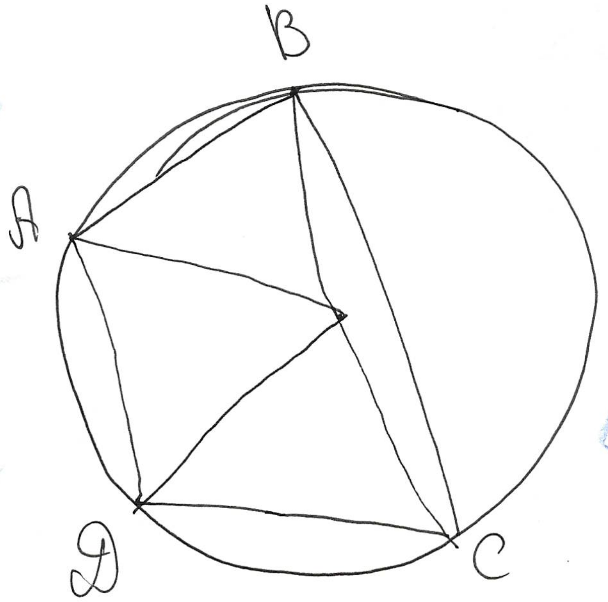
$x = \left(\frac{1}{3}; 0{,}4; 0{,}5; 0{,}8; 1; \frac{7}{6}; 1{,}2; 1{,}6; \frac{5}{6}\right)$

№3 Чистовик

Заметим, что стороны длиной 5, 5, $5\sqrt{2}$ видны из ц. окр. под углами $60°, 60°, 90°$ соотв. Если ц. окр. вне ч/у тогда есть сторона видна под углом = сумме ∠, под которыми видны 3 стороны, но если эта 4 неизв. сторона тогда она видна под углом $= 210°$, что невозможно и это не может быть сторона, которая видна под углом $90°$, т.к $90° < 60° + 60°$. Получается, что ц. окр-сти находится внутри чет/уг. а значит 4-ая сторона видна под углом $360° - 90° - 60 \cdot 2 = 150°$. Разобьем ч/у на Δ-ники соединив вершины с ц. окр. тогда S_{ABCD} = сумме $S_{\Delta\text{-ов}} = \frac{1}{2} 5^2 \cdot (\sin 60° + \sin 60° + \sin 90° + \sin 150°) = \frac{25}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) = \frac{75}{4} + \frac{25}{2} \cdot \sqrt{3}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{2}$

Отв: $S = \frac{75}{4} + \frac{25}{2}\sqrt{3}$



№8 ∠ между прямыми зависит от кол-во ~~стор~~

~~2/у~~ сторон 2/у между выбранными сторонами, Заметим

что нет 19 подряд идущих ~~сторон~~ не выбранных сторон

и наш 2/у лежит не внутри Δ образованного прямыми.

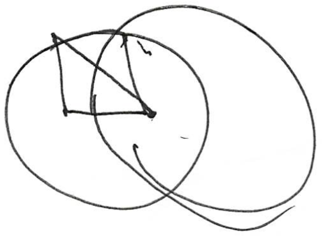
Докажем, что ∃ выбранная сторона (a_{40} a_1) и не выбр.

стороны (a_1, a_2), (a_2, a_3) ... (a_{19}, a_{20}), но так как

прямые пересекаются мы не могли выбрать

сторону ($a_{20} a_{21}$)

№6



Чистовик

98-22-36-13
(162.6)

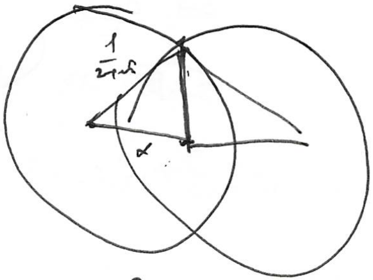
Черновик

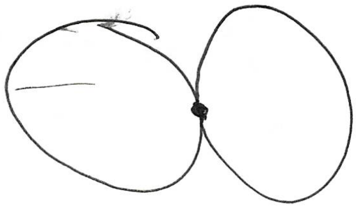
$2b^3 =$

$4b^2 + 2t - 1 = 0$

$D = 4 + 16 = 2\sqrt{5}$

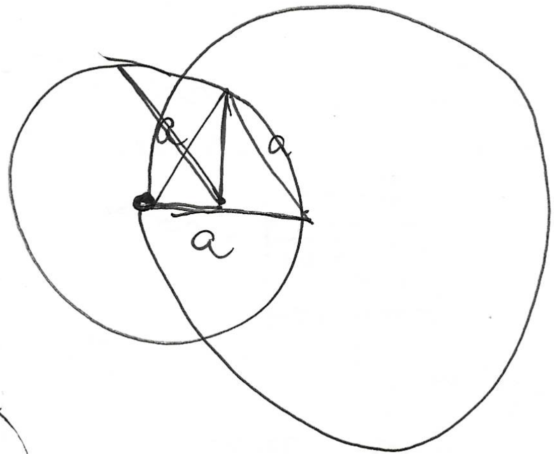
$b_{1,2} = -\frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

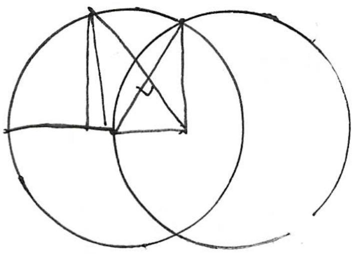




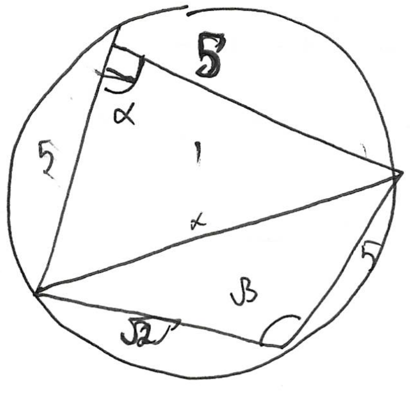
$a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} =$

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$





Черновик



$\alpha+\beta = 180^\circ$

$-3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3c^2b + 3c^2a$

$ac(3a+3c)$

$x^2 = \frac{50 \cdot 23}{10\sqrt{2}+50}$

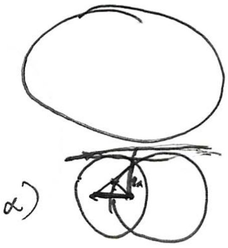
$x = \frac{\sqrt{50 \cdot 23}}{\sqrt{10\sqrt{2}+50}}$

$x^2 = 50 - 50\cos\alpha$

$x^2 = 27 - 10\sqrt{2}\cos(180^\circ - \alpha)$

$\alpha = 89^\circ$

$\frac{1}{2\sqrt{2}}$



$50 - 50\cos\alpha = 27 - 10\sqrt{2}\cos(180^\circ-\alpha)$

$\frac{27+10\sqrt{2}}{10\sqrt{2}+50}$

$50 - 50\cos\alpha = 27 + 10\sqrt{2}\cos\alpha$

$23 = 10\sqrt{2}\cos\alpha + 50\cos\alpha$

$\frac{25}{2} = 12,5$

$\boxed{\frac{23}{10\sqrt{2}+50}} = \cos\alpha$

$\frac{20}{}$ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$b^3 + 3b^2(a+c) + b(\dots) + 3ac(a+c)$

$\sin \frac{\sqrt{3}}{2} = 60^\circ$

$\frac{(5+\sqrt{2})^2}{(5+\sqrt{2})^2+23}$

$S = \frac{25\sin\alpha}{2} + \frac{5\sqrt{2}\sin\alpha}{2}$

$S = \frac{20}{2}\cos\alpha + \frac{5\sqrt{2}}{2}$ $\cos\alpha = 0$

$\cos\alpha = 0$ $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ — невозможно т.к. наличие пятиугольника [?]

$S = \frac{25}{2} \cdot \frac{(5+\sqrt{2})^2}{(5+\sqrt{2})^2+23} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\left(\frac{27+10\sqrt{2}}{10\sqrt{2}+50}\right)$

$S = \sin\alpha\left(\frac{25+5\sqrt{2}}{2}\right) \frac{\left(5+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2}}{2}$

$S = \left(25 + \frac{5}{\sqrt{2}} + 5\sqrt{2} + 1\right)$

98-22-36-13 (162.6)

Черновик $x \leq \frac{3}{2}$

$\exists \sin(\sqrt{x}) = a$

$3-2x+3-x+2-x = \sqrt{\ } - \sqrt{\ }$

$\sin 2\sqrt{x} = b$

$-4x+8 = \sqrt{\ } - \sqrt{\ }$

$\sin 4\sqrt{x} = c$

$64-64x+16x^2 = 3+\sqrt{8}+3-\sqrt{8}-2(1)$

$16x^2-64x+64 = 4$

$16x^2-64x+60=0$

$4x^2-16x+\cancel{15}=0$

$D = 16^2-16\cdot\cancel{15} = 16$

$x_{1,2} = \frac{16\pm4}{8} = \frac{5}{2};\ \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$

$(a-b+c)^3 - ((a-b)^3+c)^3 \Rightarrow a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^2 + -3(a-b)^2c$

$+3(a-b)$

$3^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 4^x$

$a^x \cdot \ln a$

$3^{5-\frac{1}{x}} - \sin 4^x \geq a$

$a^{\frac{1}{2}\ln a} \cdot p$

$\ln 3.$

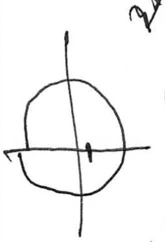
$a = 3^{5-\frac{1}{x}} - \sin 4^x$

$3^{5-\frac{1}{x}} - \sin 4^x = a$

$3^{5-\frac{1}{x}} \cdot \ln 3 - \cos 4^x \cdot 4^x \cdot \ln 4 = 0$

$3^{5-\frac{1}{x}} \cdot \ln 3 + \cos 4^x \cdot 4^x \cdot \ln 4 = 0$

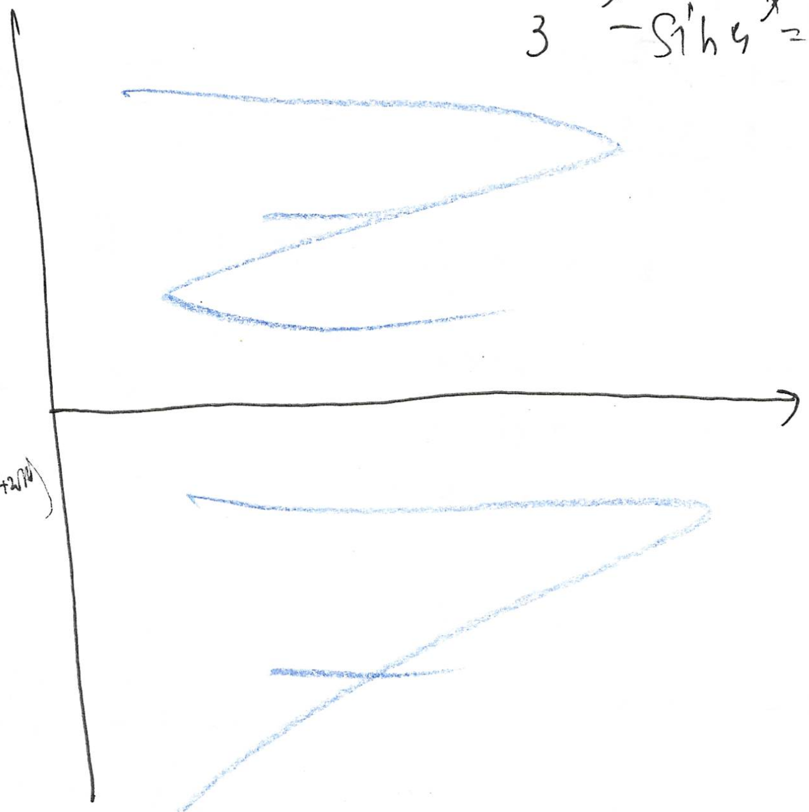
$\cos 4^x < 0$



$4^x \in \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$

$x \in \left(\log_4 \frac{\pi}{2}+2\pi k; \log_4 \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$

$\frac{3^{5-\frac{1}{x}}}{4^x \cdot \ln 4} = -\cos 4^x$



$x =$

Черновик $\sqrt{4x^2-12x+9} + \sqrt{x^2-6x+9} + \left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2 =$

$\sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}$

$\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2} + \left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2 = 2$

$\sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}$

$|2x-3| + |x-3| + \left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2 = \dfrac{\cancel{3}+\sqrt{8} - \cancel{3}+\sqrt{8}}{\sqrt{} + \sqrt{}}$

$-x+2 \geq 0$ ОДЗ: $x \leq 2$

$\frac{3}{2}$ 2

$\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{8}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{8}}}{\sqrt{3-\sqrt{8}}} =$

$\dfrac{1}{\sqrt{3-\sqrt{8}}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}$

1° $x \in [\frac{3}{2}; 2]$

$2x-3 - \cancel{x} + 3 + 2 - \cancel{x} = \dots$

$2 = \dfrac{2\sqrt{8}}{\sqrt{} + \sqrt{}}$

$\dfrac{1-3+\sqrt{8}}{\sqrt{3-\sqrt{8}}} = \dfrac{2\sqrt{8}-2}{\sqrt{3-\sqrt{8}}}$

$2\sqrt{8} = \sqrt{3+\sqrt{8}} + \sqrt{3-\sqrt{8}}$ $\sqrt{8} = \dfrac{1}{\sqrt{3-\sqrt{8}}} + \dfrac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}$

$3-\sqrt{8}$ 1 $\sqrt{8}$ $\dfrac{1}{\sqrt{3-\sqrt{8}}}$

$9-6\sqrt{8}+8$

$17-1 = 6\sqrt{8}$ 8 $\dfrac{1}{3-\sqrt{8}}$

$16 = 6\sqrt{8}$

$2^{10} = 36 \cdot 8$

$2 = \sqrt{} - \sqrt{}$

$2 = 6 - 2 \Rightarrow 2 = 4 \Leftrightarrow \varnothing$

$2 = 3 + \sqrt{8} - 2(\cancel{1}) + 3 - \sqrt{8}$

$2 = 6 - 4\sqrt{8}$

$\sqrt{8}$ 8 4 $\Leftrightarrow \varnothing$