+1 лист +1 лист

0 843792 400005

84-37-92-40
(161.32)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Фадеева Максима Денисовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«13» апреля 2025 года

Подпись участника
ФадеевМД

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
84-37-92-40		+	+	+	+	+	±	∓	−

84-37-92-40 (161,32)

85 (восемьдесят пять)

№ 1 чистовик

Кремень

$$\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{9x^2-12x+4}-(\sqrt{x-1})^2=\sqrt{6+\sqrt{20}}-\sqrt{6-\sqrt{20}}$$

$$\sqrt{(2x-3)^2}+\sqrt{(3x-2)^2}-(\sqrt{x-1})^2=\sqrt{6+2\sqrt5}-\sqrt{6-2\sqrt5}$$

$$|2x-3|+|3x-2|-(\sqrt{x-1})^2=\sqrt{(\sqrt5+1)^2}-\sqrt{(\sqrt5-1)^2}$$

$$|2x-3|+|3x-2|-(\sqrt{x-1})^2=(\sqrt5+1)-(\sqrt5-1)$$

$$|2x-3|+|3x-2|-(\sqrt{x-1})^2=2$$

$$\cancel{\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq\frac32\\2x-3+3x-2-(\sqrt{x-1})^2=2\end{cases}\\\begin{cases}\frac23<x<\frac32\\3-2x+3x-2-(\sqrt{x-1})^2=2\end{cases}\\\begin{cases}x\leq\frac23\\\end{cases}\end{array}\right.}$$

$$\begin{cases}|2x-3|+|3x-2|-(x-1)=2\\x\geq1\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq\frac32\\x\geq1\\2x-3+3x-2-(x-1)=2\end{cases}\\\begin{cases}\frac23<x<\frac32\\x\geq1\\\cancel{|2x-3|+|3x|}\;3-2x+3x-2-(x-1)=2\end{cases}\\\begin{cases}x\leq\frac23\\x\geq1\\|2x-3|+|3x-2|-(x-1)=2\end{cases}\text{ — нет реш}\end{array}\right.$$

$$2$$

Чистовик

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \frac{3}{2} \\ 5x-5-x+1=2 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \le x < \frac{3}{2} \\ 1+x-(x-1)=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \frac{3}{2} \\ 4x=6 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \le x < \frac{3}{2} \\ 2=2 \text{ - верно} \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \frac{3}{2} \\ x=\frac{3}{2} \end{cases} \\ 1 \le x < \frac{3}{2} \end{array}\right.$$

ответ: $\left[1; \frac{3}{2}\right]$

№5

1) Подставим $f_1(0)=f_2(0)=f_3(0)$ (по условию)

$\Leftrightarrow \quad a_1\cdot(0+0+12)=a_2\cdot(0+0+18)=a_3\cdot(0+0+24)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1=2a_3 \\ a_1=\frac{3}{2}a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=2a_3 \\ a_2=\frac{4}{3}a_3 \end{cases}$

2) Подставим $f_1(-a_1)=f_2(-a_1)=f_3(-a_1)$

$f_1(-a_1)=0$

$f_2(-a_1)=(a_2-a_1)(a_1^2-b_2a_1+18)$

$f_3(-a_1)=(a_3-a_1)(a_1^2-b_3a_1+24)$

$\Rightarrow \begin{cases} 0=(a_2-a_1)(a_1^2-b_2a_1+18) \\ 0=(a_3-a_1)(a_1^2-b_3a_1+24) \end{cases}$

$\begin{cases} 0=(\frac{4}{3}a_3-2a_3)(a_1^2-b_2a_1+18) \\ 0=(a_3-2a_3)(a_1^2-b_3a_1+24) \end{cases}$

черновик

$$\begin{cases} 0 = \overset{\neq 0 \text{ (по условию)}}{-\frac{2}{3}a_3} \cdot (a_1^2 - b_2 a_1 + 18) \\ 0 = \underset{\neq 0 \text{ (по условию)}}{-a_3} \cdot (a_1^2 - b_3 a_1 + 24) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 - b_2 a_1 + 18 = 0 \\ a_1^2 - b_3 a_1 + 24 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4a_3^2 - 2b_2 a_3 + 18 = 0 \\ 4a_3^2 - 2b_3 a_3 + 24 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

3) Подставим $f_1(-a_3) = f_2(-a_3) = f_3(-a_3)$

$$\begin{cases} f_1(-a_3) = (a_1 - a_3)(a_3^2 - b_1 a_3 + 12) \\ f_2(-a_3) = (a_2 - a_3)(a_3^2 - b_2 a_3 + 18) \\ f_3(-a_3) = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} (a_1 - a_3)(a_3^2 - b_1 a_3 + 12) = 0 \\ (a_2 - a_3)(a_3^2 - b_2 a_3 + 18) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overset{\neq 0}{a_3} \cdot (a_3^2 - b_1 a_3 + 12) = 0 \\ \underset{\neq 0}{\frac{1}{3}a_3} (a_3^2 - b_2 a_3 + 18) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3^2 - b_1 a_3 + 12 = 0 \\ a_3^2 - b_2 a_3 + 18 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

4) $$\begin{cases} 4a_3^2 - 2b_2 a_3 + 18 = 0 \\ 4a_3^2 - 2b_3 a_3 + 24 = 0 \end{cases} (1) \quad \begin{cases} a_3^2 - b_1 a_3 + 12 = 0 \\ a_3^2 - b_2 a_3 + 18 = 0 \end{cases} (2)$$

чистовик

$\Rightarrow \begin{cases} 2a_3^2 - b_2 a_3 + 9 = 0 \\ a_3^2 - b_2 a_3 + 18 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2a_3^2 - (a_3^2 + 18) + 9 = 0 \\ b_2 a_3 = a_3^2 + 18 \mid : a_3 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a_3^2 = 9 \\ b_2 = \frac{a_3^2 + 18}{a_3} \end{cases}$ $\begin{cases} a_3 = \pm 3 \\ b_2 = \frac{a_3^2 + 18}{a_3} \end{cases}$

но $a_3 > 0$ (по условию) $\Rightarrow \begin{cases} a_3 = 3 \\ b_2 = \frac{3^2 + 18}{3} = 9 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad a_1 = 2a_3 = 6$

$a_2 = \frac{4}{3} a_3 = 4$

5) Также из условия что $f_1(x) \cdot f_2(x) = f_3(x)$

следует, что $f_1(-a_2) = f_2(-a_2) = f_3(-a_2)$

где $f_1(-a_2) = (a_1 - a_2)(a_2^2 - b_1 a_2 + 12)$

$f_2(-a_2) = 0$

$f_3(-a_2) = (a_3 - a_2)(a_2^2 - b_3 a_2 + 24)$

$\begin{cases} (a_1 - a_2)(a_2^2 - b_1 a_2 + 12) = 0 \\ (a_3 - a_2)(a_2^2 - b_3 a_2 + 24) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (6 - 4)(4^2 - 4b_1 + 12) = 0 \\ (3 - 4)(4^2 - 4b_3 + 24) = 0 \end{cases}$

84-37-92-40 (16132)

чистовик

$$\begin{cases} 4-b_1+3=0 \\ 4-b_3+6=0 \end{cases} \begin{cases} b_1=7 \\ b_3=10 \end{cases}$$

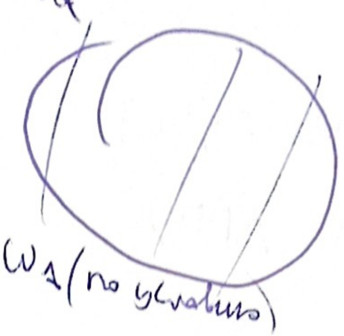
Значит, $a_1=6$, $a_2=4$, $a_3=3$, $b_1=7$, $b_2=9$, $b_3=10$

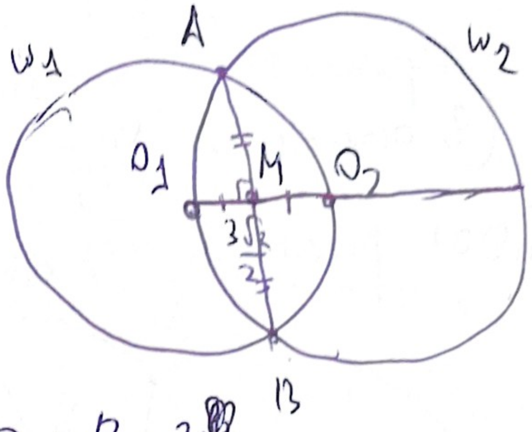
$\Rightarrow a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3=6+7+4+9+3+10=39$

Ответ: 39

№6

Так как половинки одинаковые то если одну стоит в т. O_1, а другую в т. O_2 то тогда





$O_2 \in \omega_1$ (по условию)

и $O_1 \in \omega_2$ так как $O_1O_2=R=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}$

~~Заметим, что так как окружности симметричны относительно AB и O_1O_2 (так как они равны)~~

~~$\Rightarrow$ достаточно рассмотреть только $\frac{1}{4}$ части таких окружностей ограниченной AB и O_1O_2 (в остальных будет аналогично)~~

~~рассмотрим AMO_2 (такую область)~~

~~где M — центр O_1O_2~~

~~$O_1O_2 \perp AB$ так как центров по св.~~ черновик

~~$O_1O_2 \perp AB$ так как $\triangle AO_1B$ - р/б =~~

$AO_1 = O_1B = AO_2 = O_2B = R = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow AO_1BO_2$ - ромб (по опр.) ~~равнобедр~~ опр)

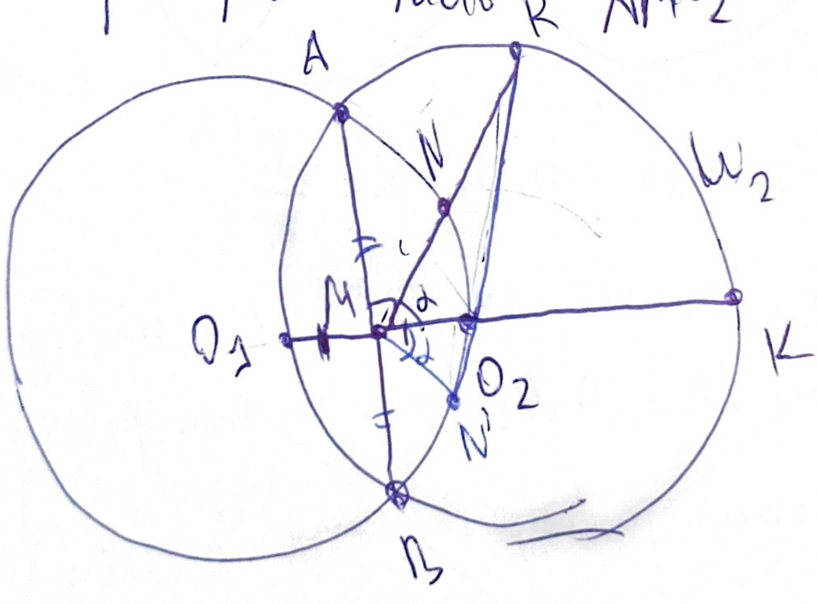
$\Rightarrow O_1O_2 \perp AB$; $AM = MB$, $O_1M = MO_2 \Rightarrow M$ - тора

Тогда заметим, что каждая фигуры симметричны относительно AB и O_1O_2 (так как окружности равны)

$\Rightarrow$ достаточно рассмотреть одну из частей ограниченной этими прямыми

(в остальных будет аналогично)

БОО1 рассмотрим область AMO_2



Пусть $MO_2 \cap \omega_2 = K$

т.е. рассматриваемая нами область ограничена прямыми AM и MK

$AO_1 = AO_2 = O_1O_2 = R = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta AO_1O_2$ - р/стор (по опр) $\Rightarrow AM = \frac{AO_2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4+2\sqrt{2}}$
(по св-ву высоты р/стор ΔAO_1O_2)

Чистовик

Если V_m - скорость мыши (бега)

и V - скорость намокания мыши под 1 поливалкой

$\Rightarrow t_1 = \frac{AM}{V_m} = \frac{3\sqrt{3}}{(4+2\sqrt{2})V_m}$ - время за которое

она пройдёт по AM, причём будет она

идти по ~~одной~~ 2-ум поливалками $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Она намокла на $2V \cdot t_1 = \frac{3\sqrt{3} \cdot 2V}{(4+2\sqrt{2})V_m} =$

$= \frac{3\sqrt{3}V}{(2+\sqrt{2})V_m}$

Очевидно что если мышь будет проходить только

по участку AMO_2 (т.е где две поливалки

то наименьшим ~~...~~ по намоканию будет

именно отрезок AM (т.к отрезок

будет меньше дуги

т.е начало путь из A

Пусть мышь начала свой путь из точки K

$\angle KMK = \alpha$

Заметим, что наименьший отрезок в области

работы 2 ~~поливалок~~ это MO_2 (по нер треуг)

Так как например $MN + O_1M > O_1N$ ~~...~~

$MN > O_1N - O_1M = O_1O_2 - O_1M = MO_2$

№4 черновик

$\sin^3(\pi x)+\sin^3(2\pi x)-\sin^3(4\pi x)=$
$=\left(\sin(\pi x)+\sin(2\pi x)-\sin(4\pi x)\right)^3$

$\sin^3(\pi x)+\sin^3(2\pi x)-\sin^3(4\pi x)=$

$=\left(\sin(\pi x)+\sin(2\pi x)\right)^3-3(\sin\pi x+\sin 2\pi x)^2\sin(4\pi x)$
$+3(\sin\pi x+\sin 2\pi x)\sin^2(4\pi x)-\sin(4\pi x)^3$

~~$\sin^3(\pi x)+\sin^3(2\pi x)=\sin$~~

$0=3\sin(\pi x)^2\sin(2\pi x)+3\sin(\pi x)\sin^2(2\pi x)-$
$-3\sin^2(\pi x)\sin(4\pi x)-3\sin^2(2\pi x)\sin(4\pi x)$
$-6\sin(\pi x)\sin(2\pi x)\sin(4\pi x)+$
$+3\sin(\pi x)\sin^2(4\pi x)+3\sin(2\pi x)\sin^2(4\pi x)$

~~$\sin^2(\pi x)$~~
Пусть $a=\sin(\pi x)$, $b=\sin 2\pi x$, $c=\sin(4\pi x)$

$a^2b+ab^2-a^2c-b^2c+ac^2+bc^2-2abc=0$

~~$a^2(b-c)-bc(b-c)+ab^2+ac^2-2abc=0$~~

~~$ab(b-c)(a^2-bc)+ab(b-c)$~~ $+ac(a-b)=0$

$a^2(b-c)+ab(b-c)+ac^2-b^2c+bc^2-abc=0$

~~$a(b-c)(a+b)-c(a-b)(a+b)+bc(c-a)=0$~~

~~$(a+b)(a(b-c)-c(a-b))$~~ $+bc(c-a)=0$

№4 (продолжение)

Черновик

~~$(a+b)(ab-ac-ac+bc)$~~

~~$a(b-c)(a+b)-bc(b+a)-c^2(a^2+bc)=0$~~

~~$(b+a)(ab-ac-bc)$~~

$a(b-c)(a+b)+ac^2-b^2c+bc^2-abc=0$

$(a+b)(a(b-c))+c^2(a+b)-bc(a+b)=0$

$(a+b)(ab-ac+c^2-bc)=0$

$(a+b)(a(b-c)-c(b-c))=0$

$(a+b)(a-c)(b-c)=0$

$$\left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=c \\ b=c \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sin(\pi x)=(-\sin(2\pi x)) \\ \sin\pi x=\sin 4\pi x \\ \sin(2\pi x)=\sin(4\pi x) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \pi x=(-2\pi x)+2\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ \pi x=\pi-(-2\pi x)+2\pi q, q\in\mathbb{Z} \\ \pi x=4\pi x+2\pi s, s\in\mathbb{Z} \\ \pi x=\pi-4\pi x+2\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ 2\pi x=4\pi x+2\pi m, m\in\mathbb{Z} \\ 2\pi x=\pi-4\pi x+2\pi r, r\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{2n}{3}, n\in\mathbb{Z} \quad (1) \\ x=-1-2q, q\in\mathbb{Z} \quad (2) \\ x=-\frac{2}{3}s, s\in\mathbb{Z} \quad (3) \\ x=\frac{1+2k}{5}, k\in\mathbb{Z} \quad (4) \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} x=-m, m\in\mathbb{Z} \quad (5) \\ x=\frac{1+2r}{6}, r\in\mathbb{Z} \quad (6) \end{array}$$

чистовик

1) $x = \frac{2n}{3}, n \in \mathbb{Z}$: $1,8 = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$

при $n \leq 0$ $x \leq 0 \notin [0,3; 1,8]$

при $n = 1$: $x = \frac{2}{3} \in [\frac{3}{10}; \frac{9}{5}]$ – подходит $\frac{4}{3} \vee \frac{9}{5}$ $20 \vee 27$

при $n = 2$: $x = \frac{4}{3} \in [\frac{3}{10}; \frac{9}{5}]$ – подходит

при $n \geq 3$ $x \geq 2 \notin [\frac{3}{10}; \frac{9}{5}]$

2) $x = -1 - 2q, q \in \mathbb{Z}$

при $q \geq 0$: $x \leq -1$ $\notin [0,3; 1,8]$

при $q = -1$: $x = 1 \in [0,3; 1,8]$ – подходит

при $q \leq -2$: $x \geq 3 \notin [0,3; 1,8]$

3) $x = -\frac{2}{3}s, s \in \mathbb{Z}$

решения аналогичны пункту (1)

Тоже $x = \frac{2}{3}$ и $x = \frac{4}{3}$ подходят

4) $x = \frac{1+2k}{5}, k \in \mathbb{Z}$

при $k \leq 0$: $x \leq \frac{1}{5} \notin [\frac{3}{10}; \frac{9}{5}]$

при $k = 1$: $x = \frac{3}{5} \in [\frac{3}{10}; \frac{9}{5}]$ – подходит

при $k = 2$: $x = 1 \in [\frac{3}{10}; \frac{9}{5}]$ – подходит

при $k = 3$: $x = \frac{7}{5} \in [\frac{3}{10}; \frac{9}{5}]$ – подходит

при $k = 4$: $x = \frac{9}{5} \in [\frac{3}{10}; \frac{9}{5}]$ – подходит

при $k \geq 5$ $x \geq \frac{11}{5} \notin [\frac{3}{10}; \frac{9}{5}]$

5) $x = -m, m \in \mathbb{Z}$

1) $m \geq 0$ $x \leq 0$ $\notin [\frac{3}{10}; \frac{9}{5}]$

2) $m = -1$ $x = 1 \in [\frac{3}{10}; \frac{9}{5}]$ – подходит

84-37-92-40
(161.32)

№2 (продолжение) Черновик

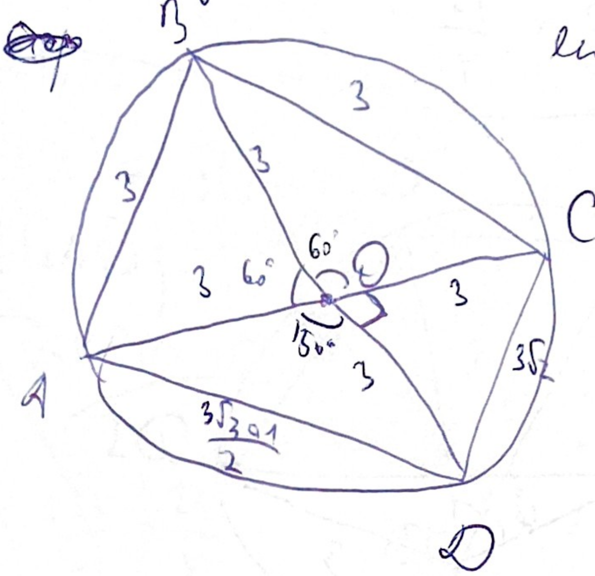
~~$= \left(5 - \frac{1}{x}\right)' \cdot \ln 4 \cdot 4^{5-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2} \cdot \ln 4 \cdot 4^{5-\frac{1}{x}} > 0$~~

~~$\Rightarrow f(x) \uparrow$ на $(0; \infty)$~~

№3

Здесь возможны два случая четырехугольника!

а)



если $AB = 3$
$BC = 3$
$CD = 3\sqrt{2}$

1) $BO = OA = OC = OD = 3 \Rightarrow \triangle BOA$ и $\triangle BOC$ — равн (по опр)

$\Rightarrow \angle AOB = 60°, \angle BOC = 60°$ (на св-ву)

2) По теореме косинусов в $\triangle COD$:

$CO^2 + OD^2 - 2\cos\angle COD \cdot CO \cdot OD = CD^2$

$3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3^2 \cos\angle COD = 3^2 \cdot 2$

$\cos\angle COD = 0 \Rightarrow \angle COD = 90°$

3) $\Rightarrow \angle AOD = 360° - \angle BOA - \angle BOC - \angle COD = 150°$

4) По теор косинусов в $\triangle AOD$,

$AO^2 + OD^2 - 2\cos\angle AOD \cdot AO \cdot OD = AD^2$

$\underbrace{AO^2 + OD^2}_{2 \cdot 3^2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3^2 = AD^2 \Rightarrow AD^2 = 3^2 (\sqrt{3} + 2)$

черновик

$\Rightarrow AD = 3\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}+1}{2}$

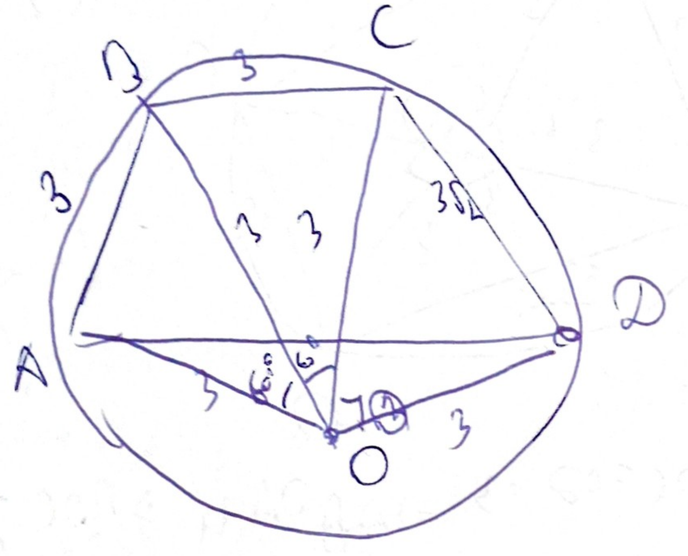
$\Rightarrow S(ABCD) = S(\triangle BOA) + S(\triangle BOC) + S(\triangle COD) +$

$+ S(\triangle AOD) = \frac{BO^2\sqrt{3}}{4} + \frac{BO^2\sqrt{3}}{4} + \frac{CO \cdot OD}{2} +$

$+ \frac{\sin 150^\circ\, AO \cdot OD}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2} + \frac{3^2}{4} =$

$= \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{27}{4}$

б)



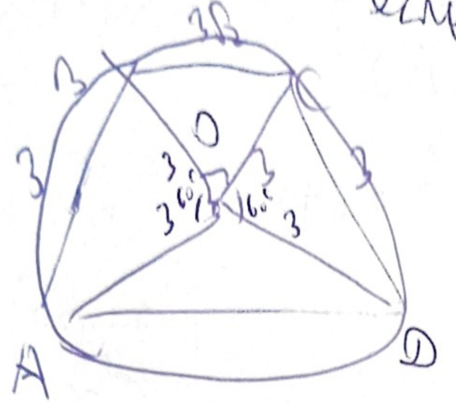
Аналогично $\angle COD = 90^\circ$, $\angle AOB = \angle BOC = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle AOD = 120^\circ + 90^\circ = 210^\circ$ — в $\triangle AOD$ такого быть не может

$\Rightarrow$ ~~$S(ABCD) = S(\triangle ABO) + S(\triangle BOC) + S(\triangle COD) - S(\triangle AOD) = \frac{BO^2\sqrt{3}}{4} + \frac{BO^2\sqrt{3}}{4} + \frac{CO \cdot OD}{2} + \frac{\sin(210^\circ) \cdot AO \cdot OD}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2} - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 3$~~

~~$S(\triangle AOD) =$~~ S значит, только в случае, если и $O \in (ABCD)$

2) Если стороны это $AB = 3$ четырёхугольник
$BC = 3\sqrt{2}$
$CD = 3$



Аналогично $\angle AOB = 60^\circ$; $\angle COD = 60^\circ$

$\angle BOC = 90^\circ \Rightarrow \angle AOD = 150^\circ$

$S(ABCD) = S(\triangle BOA) + S(\triangle COD) + S(\triangle BOC) +$

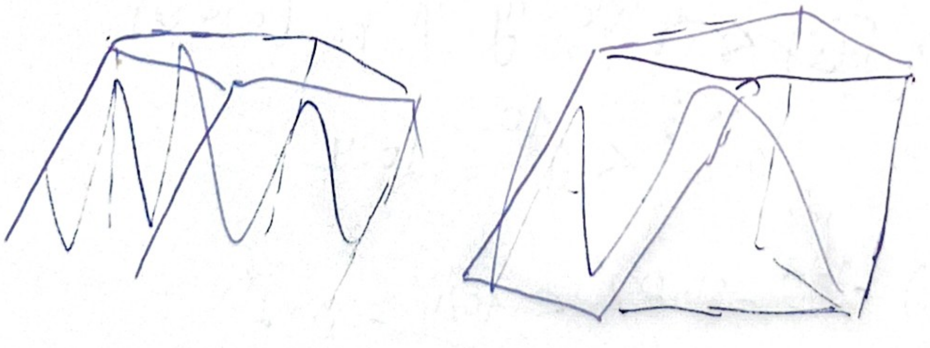
$+ S(\triangle AOD) = \frac{BO^2\sqrt{3}}{4} + \frac{CO^2\sqrt{3}}{4} + \frac{BO \cdot OC}{2} +$

$+ \frac{\sin 150^\circ AO \cdot OD}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 9}{2} =$

$= \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{27}{4}$

Значит, наибольшая возможная площадь этого четырёхугольника это $S = \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{27}{4}$

Ответ: $\frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{27}{4}$



черновик

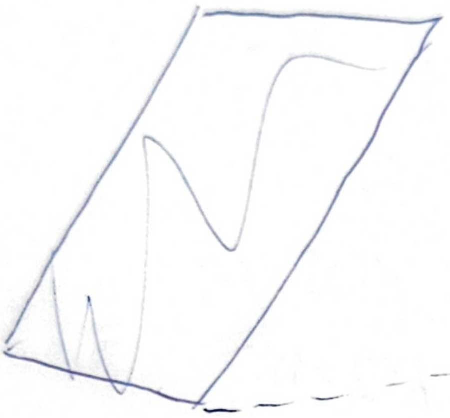
№2

$4^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 2^x$ — не имеет ни одного реш

$x>0$

$a>0$

$a - ?$



$f(x) = 4^{5-\frac{1}{x}} - \sin 2^x \qquad x>0$

$f(x) = 2^{10-\frac{2}{x}} - \sin 2^x$

$x>0 \Rightarrow -\frac{1}{x}<0$

$10-\frac{2}{x}<10$

$\Rightarrow$ т.к. $2^x \uparrow$ на $(0, +\infty)$

$\Rightarrow 2^{10-\frac{2}{x}} < 2^{10} = 1024$

$f(x) = 2^{10-\frac{2}{x}} - \sin 2^x < 1024 - \sin 2^x$

84-37-92-40
(161.32)

№2 ~~Черновик~~ Чистовик

$4^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 2^x$ не имеет реш $x>0$
где $a>0$
Найти a - ?

$4^{5-\frac{1}{x}} - \sin 2^x \geq a$

Пусть $f(x) = 4^{5-\frac{1}{x}} - \sin 2^x = 2^{10-\frac{2}{x}} - \sin 2^x$

Заметим, что $10-\frac{2}{x} < 10$ (тк $x>0 \Rightarrow -\frac{2}{x}<0$)

а так $2^x \uparrow$ на $(0;+\infty) \Rightarrow 2^{10-\frac{2}{x}} < 2^{10} = 1024$

Далее $-\sin 2^x \leq 1$ при этом равенство
достигается при $\sin 2^x = -1$
$0 < 2^x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $\frac{\pi}{2} + 2\pi n > 0$ и $n \in \mathbb{Z}$
$2^x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$

$x = \log_2 (2\pi n - \frac{\pi}{2})$

~~при $\log_2 (2\pi n - \frac{\pi}{2}) \uparrow$~~

~~$\log_2 x \uparrow$ на $\mathbb{R} \Rightarrow$~~

Значит $f(x) = 2^{10-\frac{2}{x}} + \sin 2^x < 1024 + 1 = 1025$
$\wedge$ 1024 $\quad$ $\wedge$ 1

То есть $f(x)$ всегда меньше 1025

Но если $f(x) = 1025 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$

то уже будет какое решение $x>0$ тк

~~$2^{10-\frac{2}{x}} \leq 1024 - \varepsilon$~~ $\quad \lim_{x\to\infty} (10-\frac{2}{x}) = 10$

ЧИСТОВИК

Значит 1025 – ~~минимально~~ минимальное значение недостижимое в значении функции $f(x)$ при $x>0$

$\Rightarrow$ если $f(x) \geq a$

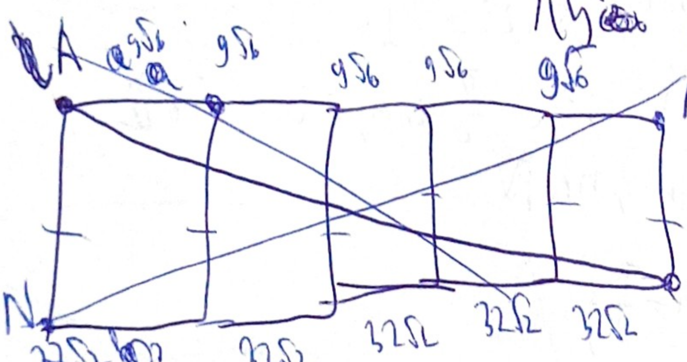
и $a \geq 1025 \Rightarrow f(x) \geq a \geq 1025$ – нет реш при $x>0$

$\Rightarrow$ минимальное полож. значение a при котором неравенство не имеет реш в $x>0$ это 1025

Ответ: 1025

№ 7

Рассмотрим развертку боковой поверхности пирамиды с дополнительной гранью



Путь AB и является путем первого уравнения (AB – отрезок) на развертке

Так как его путь состоит из пяти отрезков ломаной

Так как он шел по углом 45° к поверхности земли

Полученное уравнение AB также будет под углом 45° от поверхности земли так как и каждого отдельного отрезка было 45° от поверхности земли (~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$\Rightarrow$ высота AH пирамиды ~~[illegible]~~ $\perp$ HB (по определ перпенд. прямой и плоск)

чистовик

$\Rightarrow \triangle AHB$: $AH = \sin \angle (AB; \alpha) \cdot AB = AB \cdot \sin 45^\circ =$
$= \frac{1}{\sqrt{2}} AB$ где α – плоскость нижнего основания

так как пирамида правильная $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ сторона верхнего основания a

равна: $a^2 = 486 \Rightarrow a = \sqrt{486}$

а нижнего b: $b^{4/4} = \sqrt{2048}$

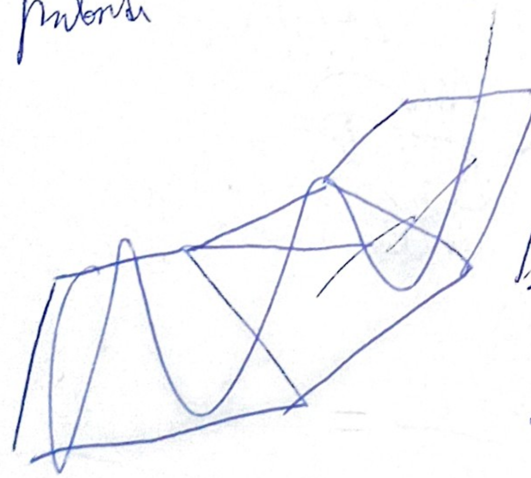
$\Rightarrow b = 32\sqrt{2}$ $a = 9\sqrt{6}$

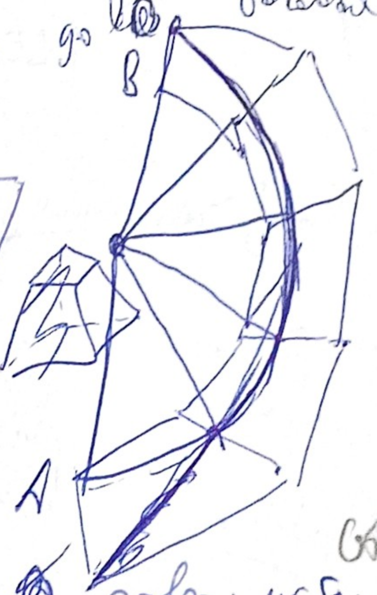
$\Rightarrow AM = 5 \cdot 9\sqrt{6} = 45\sqrt{6}$

$ND_5 = 32\sqrt{2} \cdot 5 = 160\sqrt{2}$ ~~ответ~~

тогда $AB = 5b + 5a =$
$= 45\sqrt{6} + 160\sqrt{2}$
$\Rightarrow h = (45\sqrt{3} + 160)$

так как пирамида до её боковые ребра равны





ответ неверно

ответ: $45\sqrt{3} + 160$ м.е

№ 6 (продолжение)

Длина отрезка MN уменьшается от AM до MO_2 когда точка N движется от A до O_2

$\angle O_1MN = 180^\circ - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ По теореме косинусов в $\triangle O_1MN$:

$O_1M^2 + MN^2 - 2\cos \angle O_1MN \cdot MN \cdot O_1M = O_1N^2$ (1)

Аналогично

$$MN^2 + MO_2^2 - 2\cos\alpha\, NMO_2 \cdot MN \cdot OM_2 = O_2N^2 \quad (2)$$

т.е. из (1): $R^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (MN)^2 + 2\cos\alpha \cdot MN \cdot \frac{R}{2}$

из (2): $O_2N^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (MN)^2 - 2\cos\alpha \cdot MN \cdot R$

$$2(MN)^2 = R^2 + O_2N^2 - \frac{R^2}{2}$$

$$(MN)^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{O_2N^2}{2}$$

$$O_2N^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{R^2}{4} + \frac{O_2N^2}{2} - 2\cos\alpha\, MN \cdot R$$

$$\frac{O_2N^2}{4} - \frac{3R^2}{8} = -\cos\alpha\, MN \cdot R$$

Значит $NR + 2MN > RO_2 + 2O_2M \Rightarrow$

$\frac{O_2N^2}{4}$

~~значит, что отношение~~ $=$

$\Rightarrow$ Самый наименьший значение будет или чуть больше $\frac{RM}{MN}$

$$\Rightarrow \frac{RN}{V_M} \cdot V_1 + \frac{\cdot 2V}{V_M} =$$

$$= \frac{V\left(RN + 2MN\right)}{V_M}$$

Значит, что длина AB не меньше или меньше всех значений это AM т.е.: $\frac{3\sqrt{3}}{4+2\sqrt{2}}$

ааа

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{3\sqrt{3}}{4+2\sqrt{2}}}$

Ответ неверен

Значит необходимо сравнить $2AM$ с $RN + 2MN$

то есть $RM + MN$ сравнить с AB

$RM + MN = RM + MN' > RN' > AB$ (хорда концов)

+/-

2) $m = 2$: $x = 2 \notin \left[\frac{3}{10}; \frac{9}{5}\right]$

чиовик

б) $x = \frac{1+2r}{6}$, $r \in \mathbb{Z}$

1) $r \le 0$
$x \le \frac{1}{6} \notin \left[\frac{3}{10}; \frac{9}{5}\right]$

2) $r = 1$: $x = \frac{1}{2} \in \left[\frac{3}{10}; \frac{9}{5}\right]$

3) $r = 2$: $x = \frac{5}{6} \in \left[\frac{3}{10}; \frac{9}{5}\right]$ – подходит

4) $r = 3$: $x = \frac{7}{6} \in \left[\frac{3}{10}; \frac{9}{5}\right]$ – подходит

5) $r = 4$; $x = \frac{3}{2} \in \left[\frac{3}{10}; \frac{9}{5}\right]$ – подходит

6) $r = 5$. $x = \frac{11}{6} \notin \left[\frac{3}{10}; \frac{9}{5}\right]$?

Ответ: $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$; 1; $\frac{3}{5}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{9}{5}$; $\frac{11}{5}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{3}{2}$

№2

$4^{5-\frac{1}{x}} \ge a + \sin 2^x$ – не выполнено ни для какого $x > 0$
$a > 0$
a – ?

Значит при $\forall x > 0$ $4^{5-\frac{1}{x}} < a + \sin 2^x$

$4^{5-\frac{1}{x}} - \sin 2^x < a$

$\frac{\pi}{2} + 2\pi k > 0$

$-1 \le -\sin 2^x \le 1$ причем равенство достиг при $\log_2\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$

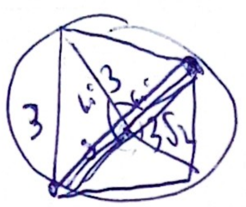
$\Rightarrow 4^{5-\frac{1}{x}} - \sin 2^x \le 4^{5-\frac{1}{x}} + 1$

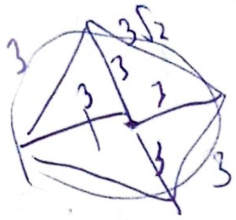
Рассмотрим функцию $f(x) = 4^{5-\frac{1}{x}}$

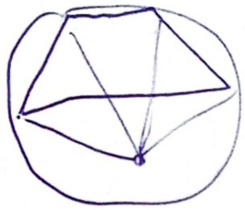
$f'(x) =$

$= \left(e^{\ln 4^{5-\frac{1}{x}}}\right)' = \left(e^{(5-\frac{1}{x})\ln 4}\right)' = \left(\ln 4 \cdot (5 - \frac{1}{x})\right)' \cdot 4^{(5-\frac{1}{x})} =$

черновик

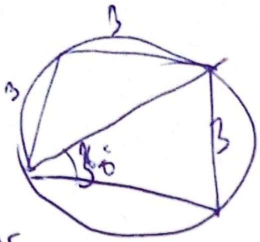




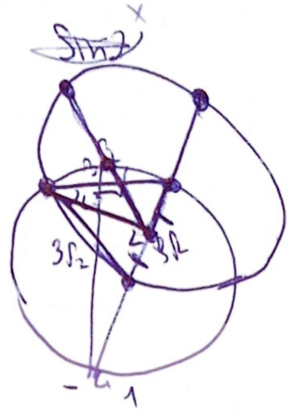


$x>0$

$2^{10-\frac{3}{x}} - \sin 2^x \geq 0$



a



$2V_3\frac{3\sqrt{6}}{2}/V$

$\frac{(3\sqrt{2})\sqrt{3}}{2}$

$2^{10-\frac{2}{x}}$

$2\cdot V_3\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{V}$

0

$12a_1 = 18a_2 = 24a_3$

$a_1 = 2a_3$ $\quad x+a_1$

$a_1 = \frac{3}{2}a_2$ $\quad x+\frac{3}{2}a_1$

$V_3\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{V}$

$3\sqrt{2}\,V\,3\sqrt{6}$

54 $\quad \sqrt{a_1 = 1}$ $\quad \cancel{\frac{1}{2}a_1}\cdot(x^2 \ldots$

72

b_1 $\quad -a_1$ $\quad \cancel{\frac{1}{2}a_1}\cdot(a_1^2 - b_2a_1 + 18) = 0$

$a_1^2 - b_3a_1 + 24 = 0$

a_3

$a_1 = 3$ $\quad 4a_1^2 + 2b_2a_1 + 18 = 0$

$a_1^2 = 9$ $\quad 2a_1^2 - b_2a_1 + 9 = 0$

$(a_1^2 = 18)$