

Выход 14-45 — 14-47

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10

Место проведения Ульяновск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносова по математике
наименование олимпиады

2024-2025 г.

по математике
профиль олимпиады

Карылова Айратх Рифатовича

фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Кар

Исходник

КИБЕРАТ

в Сети

3. Значения под знаком корней неотрицательны, поэтому

$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x \leq 0 \\ \sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x} \geq 0 \end{cases}$$

возведем обе части в квадрат

$$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x} \geq 4\sqrt{\cos x} - 4\sqrt{-3\sin x}$$

$$6\sqrt{-3\sin x} \geq 3\sqrt{\cos x}$$

$$2^2(-3\sin x) \geq \cos x$$

$$12 \frac{\sin x}{\cos x} \leq -1$$

$$\operatorname{tg} x \leq -\frac{1}{12}$$

~~sin x~~Применяем $\sin x \leftarrow \cos x \Rightarrow$ Но в то же время $\sqrt{\cos x} \geq \sqrt{-3\sin x}$

$$\cos x \geq -3\sin x$$

$$1 \geq -3\operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg} x \geq -\frac{1}{3}$$

$$\text{И.е. } \operatorname{tg} x \in \left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{12}\right]$$

$$\text{Найдем } x \in \left\{ \left[-\arctg \frac{1}{3} + 2\pi n; -\arctg \frac{1}{12} + 2\pi n \right] \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

2.

Условие

Пусть N - точка пересечения AD и BC .По теореме биссектр. $BN:CN = AB:AC = 3:1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow CN = \frac{1}{1+3} \cdot BC = \frac{1}{4} \cdot 6 = 1,5.$$

По т. косин. $AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \angle BAC = BC^2$

$$AC^2 + 9AC^2 - 2AC \cdot 3AC \cdot \frac{1}{2} = 6^2$$

$$7AC^2 = 6^2$$

$$AC = \frac{6}{\sqrt{7}}$$

Получим, по т. косин. $AC^2 + AN^2 - 2AC \cdot AN \cdot \cos \angle CAN = CN^2$

$$\frac{36}{7} + AN^2 - 2 \cdot \frac{6}{\sqrt{7}} \cdot AN \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4}$$

$$AN^2 - \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot AN + \frac{144 - 63}{28} = 0$$

$$AN = \frac{\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}} + \sqrt{\frac{3 \cdot 36}{7} - \frac{81}{7}}}{2} = \frac{\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}} + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

CO - биссектр. $\Rightarrow NO:AO = CN:AC = 1,5 : \frac{6}{\sqrt{7}} = \sqrt{7} : 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow NO = \frac{\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}} \cdot AN = \frac{\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{9\sqrt{3}}{(4+\sqrt{7})^2}$$

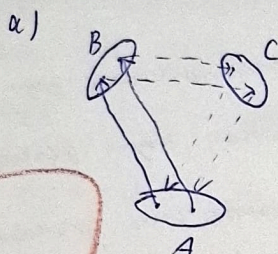
Поскольку OM и BC - хорды, пересекающиеся в т. N ,

$$ON \cdot MN = BN \cdot CN \Rightarrow MN = \frac{BN \cdot CN}{ON} = \frac{\frac{9}{2} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{(4+\sqrt{7})^2}} = \frac{\sqrt{3}(4+\sqrt{7})}{2}$$

$$\text{и наконец, } OM = ON + MN = \frac{9\sqrt{3}}{(4+\sqrt{7})^2} + \frac{\sqrt{3}(4+\sqrt{7})}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{9}{4+\sqrt{7}} + 4+\sqrt{7} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{9+16+4+8\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{32+8\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8 = \sqrt{3} \cdot 4$$

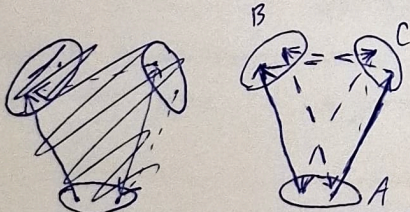
5. Заметим, что куб не может перевернуться на противоположную грань, а значит кубик можно представить в виде ориентированного трёхгранного графа, состоящего из трёх дуг A, B и C , каждая из которых содержит две вершины, обозначающие пару противоположных сторон куба. Из каждой вершины исходит ровно одно ребро* и в каждую входит ровно одно ребро. Рассмотрим дугу A . С вероятностью 0,5 рёбра из A исходят в разные дуги, с вероятностью 0,25 в одну вершину и с вероятностью 0,25 в разные вершины одной дуги. Рассмотрим последний случай



В этом случае рёбра из дуги B , тогда из дуги C рёбра ~~исходят~~ направлены в разные вершины C , так как в вершине дуги C уже входит по одному ребру. Вероятность этого равна $0,25 \cdot 0,5 = 0,125$. Рёбра из B ~~направлены~~ направлены в разные вершины дуги C , вероятность того также равна $0,25 \cdot 0,5 = 0,125$.

Таким образом ~~в этом~~ этот случай возможен с вероятностью $0,25 \cdot 0,125 \cdot 0,125 = 2^{-2} \cdot 2^{-3} \cdot 2^{-3} = 2^{-8}$

б) Рассмотрим ситуацию, когда рёбра из дуги A выходят



в этом случае в дуге B останется одна вершина, ребро в которое должно входить из дуги C . Ребро, входящее из второй вершины C , должно входить в вершину дуги A .

* обозначающее перемещение кубика из этой грани
 **...необходимо найти вероятность того, что...

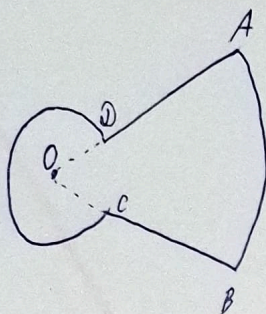
Условие. Таким образом одно ребро из грани C идёт в конкретную вершину грани C , а второе идёт в грань A . Вероятность этого равна $0,25 \cdot 0,5 \cdot 2 = 0,25$.

В итоге остаётся одна вершина грани C и одна вершина в грани A . Вероятность того, что ребра из грани C будут идти в обе равна $0,25 \cdot 0,25 \cdot 2 = 0,125$.

Таким образом вероятность этого случая равна $0,5 \cdot 0,25 \cdot 0,125 = 2^{-1} \cdot 2^{-2} \cdot 2^{-3} = 2^{-6}$.

В итоге, ~~на каждой~~ чтобы на каждой стороне куба остались по паре, либо любые два "противоположных" ребра должны перенести на противоположные друг другу грани, либо любая противоположная пара должна перенести на соседние грани. Вероятность успеха в первом случае равна 2^{-8} , а во втором — 2^{-6} , а значит ~~два~~ кубик не примет первоначального вида с вероятностью $2^{-6} + 2^{-8} = \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} = \frac{2^2 + 1}{2^8} = \frac{5}{2^8} = \frac{5}{256}$.

Установки



П. е. центры AB и CD лежат в одной точке. Заметим, что*

~~Вспомогательная дуга (D) и хорда дуги АВ, равная радиусу, образуют равнобедренный треугольник. Следовательно, дуга (D) больше АВ, а значит, и хорда дуги (D) больше АВ.~~

меря AB равна d , а радиус ~~маленькой~~ окружности R . Тогда $d \cdot R = 6\pi$.

$$\Leftrightarrow 3 \lambda R = 2 \pi R \Leftrightarrow \lambda = \frac{2 \pi}{3}$$

Площади образованных радиальных мер дуг равны

$$\frac{2\pi}{3} \text{ и } 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

* радианные меры меньших дуг AB и CD равны $\angle AOB$ (см. рис), но радианная мера дуги CD в заданной дуге AB больше, чем у AB , а значит ~~на дуге~~ радианная мера дуг CD в кривой $ABCD$ больше соответственной радианной мере ~~меньшей~~ дуги AB . А значит она даст в сумме 2π .

Черновик

$$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{3}\sin x > 4\sqrt{\cos x} - 4\sqrt{3}\sin x$$

$$6\sqrt{3}\sin x > 3\sqrt{\cos x}$$

$$4\sqrt{3}\sin x$$

$$4(-3\sin x)^2 > \cos^2 x$$

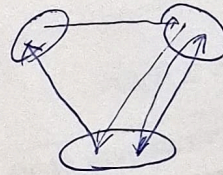
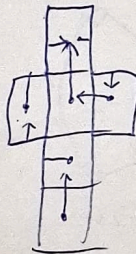
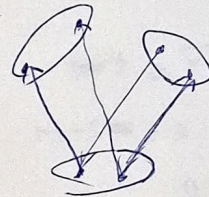
$$+36\sin^2 x > 1 - \sin^2 x$$

$$+37\sin^2 x > 1$$

$$\sin x \in [-1; 37^{-0.5}]$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \cdot 4 \\ \hline 24 \\ + 12 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$108 - 81 = 27$$



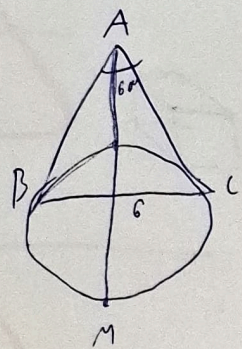
Черновики

$$14\sqrt{-3\sin x} > 9\sqrt{\cos x}$$

$$1 + 4 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 7$$

$$x = \frac{2\pi r(1-d)}{2\pi(d-1)+1}$$

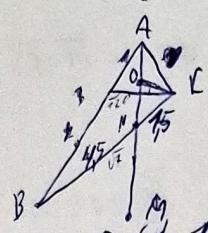
$$\frac{6}{\sqrt{7}} : \frac{1}{\sqrt{7}} = AO:NO = 4:\sqrt{7}$$



$$AB:AC = 3:1$$

$$-193 \sin^2 x > 3$$

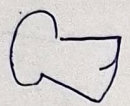
$$\sin^2 x < \frac{-3}{193}$$



$$x + x 2\pi(d-1) = 2\pi r(1-d)$$

$$x(2\pi(d-1)+1) = 2\pi r(1-d)$$

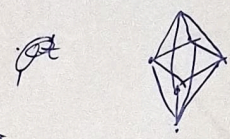
$$t = \log_a x$$



$$(t-1)(t+4)$$

$$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x} > 4\sqrt{\cos x} - 12\sqrt{\sin x}$$

$$\sqrt{t^2+3t-4} - \sqrt{t^2+3t-4} \geq t+1$$

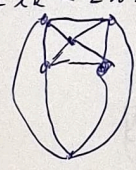


$$\sqrt{t^2+3t-4}$$

$$2\pi r d + 2\pi r d + 2\pi x d = 12\pi r d$$

$$2x + 2\pi x d = 2\pi r + x 2\pi$$

$$t^2+3t - \sqrt{t^2+3t-4} \geq t^2+2t+1$$



$$\sqrt{t^2+3t-4} \leq t+1$$

$$t^2+3t-4 \leq t^2+2t+1$$

$$t^2+3t - \sqrt{t^2+3t-4} \leq t^2+2t+1; t < -1$$

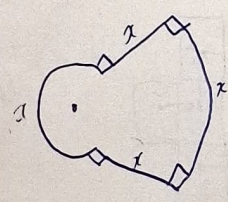
$$5t-5 \leq 0$$

$$t=1$$

$$\sqrt{t^2+3t-4} \geq t-1$$

$$x = r_1 \cdot 2\pi d = (r_1 + x) 2\pi(r_1 d)$$

$$x = x \left(\frac{\pi+1-d}{\pi} \right) \cdot 2\pi d$$



$$2\pi r_1 + x 2\pi = x$$

$$(\pi+1-d) \cdot 2\pi d = 1$$

$$t^2+3t-4 \geq t^2-2t+1$$

$$5t \geq 5$$

$$t \geq 1$$

$$d^2 - d - \pi d + 0.5 = 0$$

$$d = \frac{1+\pi \pm \sqrt{1+2\pi+\pi^2-2}}{2}$$

$$= 1+\pi$$

$$(1-d)r_1 \cdot 2\pi + (1-d)x \cdot 2\pi =$$

$$= r_1 2\pi - x + (1-d)x 2\pi = x$$

$$r_1 = \frac{2x + (1-d)x 2\pi}{2\pi} = \frac{2x}{2\pi} + (1-d)x =$$

$$= \frac{x}{\pi} + (1-d)x = x \left(\frac{1}{\pi} + 1-d \right) = x \left(\frac{\pi+1-d}{\pi} \right)$$

$$-196 \cdot 3 \sin^2 x > 9 \cos^2 x$$

$$-193 \sin^2 x > 3$$

$$-193 \cdot 3 \sin^2 x > 9$$