07-00-78-86
(159.5)

+1 лист

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Федоренко Арсения Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата «13» апреля 2025 года

Подпись участника

07-00-78-86
(159.5)

Задача 2 Чистовик № 1

$x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13$

$x^3 - |(x+1)(x-2)| = 12x - 13 \Rightarrow$ при $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ модуль раскроется с „+", а при $(-1; 2)$ – с „–".

1) $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

$x^3 - x^2 + x + 2 - 12x + 13 = 0$

$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$

При $x = 3$: $27 - 9 - 33 + 15 = 0 \Rightarrow x = 3$ – корень.

Методом неопределенных коэф. определим разложение на множители.

$(x-3)(x^2+2x-5) = 0 \Rightarrow x = 3$ или $x^2 + 2x - 5 = 0$.

$D = 4 + 4 \cdot 5 = 4 \cdot 6 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -1 \pm \sqrt{6}$.

Заметим, что $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ 3 – прин.

$-1 - \sqrt{6}$ – очевидно, принадлежит. А вот $-1 + \sqrt{6}$.

$-1 + \sqrt{6} > 0 \Rightarrow -1 + \sqrt{6} \vee 2$

$\sqrt{6} \vee 3 \Rightarrow \sqrt{6} - 1 < 2 \Rightarrow$ этот корень не подходит

2) $x \in (-1; 2)$.

$x^3 + x^2 - x - 2 - 12x + 13 = 0$

$x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0$.

Сумма коэф. $= 0 \Rightarrow x = 1$ – корень. По методу неопр. коэф:

$x^3 + x^2 - 13x + 11 = (x-1)(x^2+2x-11) = 0 \Rightarrow x = 1$ или

$x^2 + 2x - 11 = 0$

$D = 4 + 4 \cdot 11 = 4 \cdot 12$.

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{3}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{3}$. Но $-1 - 2\sqrt{3} < -1 \Rightarrow$ не входит в $(-1; 2)$. $-1 + 2\sqrt{3} \vee 2$

$2\sqrt{3} \vee 3$

$4 \cdot 3 \vee 9 \Rightarrow -1 + 2\sqrt{3} > 2 \Rightarrow$ также не подходит

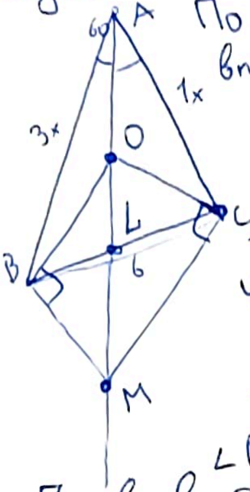
Таким образом, $x = 3, 1, -1 - \sqrt{6}$.

Ответ: $1; 3; -1 - \sqrt{6}$.

65 (шестьдесят пять)

Чистовик №2

Задача №4



По лемме отрезубце, точки B, O, C и центр вне-вписанной окр-ти лежат на одной окр-ти. Заметим, что тогда опис. окр-ть $\triangle BOC$ пересекает ~~AO только~~ в центре вневписанной окр-ти, ведь он лежит на бис-се $\angle A \Rightarrow M$ — центр вневп. окр-ти $\triangle ABC$ со ст. $\angle A \Rightarrow$ со ст. A.

$\angle OBM = \angle OCM = 90°$. $\angle BOC = 90° + \frac{\angle BAC}{2} =$
$= 90° + 30° = 120° \Rightarrow$ из вписанности
$\angle BMC = 180° - 120° = 60°$.

По св-ву бис-сы. $\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{1}$

$BL = x \Rightarrow LC = 6 - x$

$\frac{x}{6-x} = 3$

$x = 18 - 3x$

$4x = 18$

$x = \frac{9}{2} = 4,5 \Rightarrow BL = 4,5,\ LC = 1,5$

По т. синусов для BOCM: $\frac{BC}{\sin BMC} = 2R$.

$\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R = OM$, т.к. $\angle OBM = 90°$.

$\frac{12}{\sqrt{3}} = OM$.

Ответ: ~~OM~~ $\frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$

Задача №3

$mn = 2(m+n)$

Без огр. общ. $m \geq n$.

$mn = 2m + 2n$

$2m + 2n \leq 2m + 2m = 4m$

При $n > 4$ $mn > 4m \Rightarrow mn > 2(m+n)$

при $n \leq 4$, т.к. $n \in \mathbb{N}$:

$n = 1$ $m = 2m + 2$ ⊖ $m < 0$

$n = 2$ $2m = 2m + 4$ ⊖ ~~m~~ «так не бывает»

$n = 3$ $3m = 2m + 6$ $m = 6$

$n = 4$ $4m = 2m + 8$ $m = 4$

$\Rightarrow$ возможные прямоугольники — 3×6 и 4×4, но по условию они разные $\Rightarrow$

=) это и есть 3×6 и 4×4. Тогда без огр. общ. будем считать, что на столе стороны $=3$ вертикальны, а $=6$ — горизонтальны

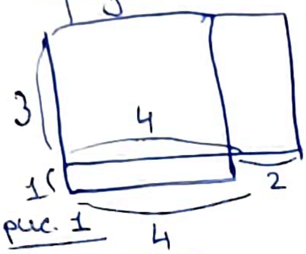
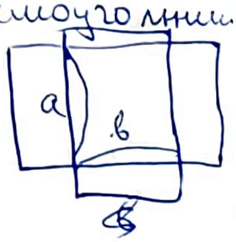


рис. 1

Понятно, что min площадь, покрытая одним слоем достигается тогда, когда max площадь покрытая двумя. Понятно, что пересечение 2 прямоуг — прямоугольник, пусть со ст. $a\times b$



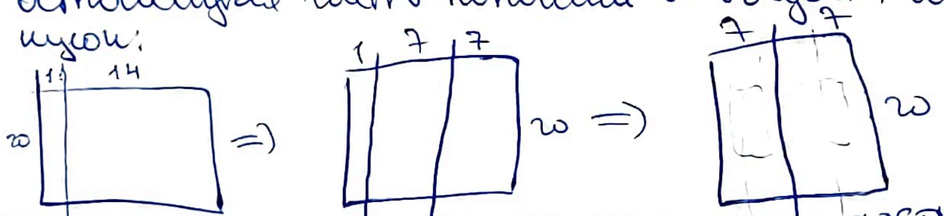
Заметим, что $b \leq$ горизонтальных сторон обоих прямоуг $\Rightarrow \leq 4$ и $\leq 6 \Rightarrow \leq 4$. А $a \leq$ вертик. сторон обоих прямоуг $\Rightarrow \leq 3$ и $\leq 4 \Rightarrow \leq 3 \Rightarrow ab \leq 12$

Пример на 12 нарисован на рис. 1. Тогда нужная площадь равна $1\times 4 + 2\times 3 = 10$, и это min

Ответ: 10

Задача №1

Выиграет Аня. 1ым ходом она отрезает вертикальной полосой $\frac{1}{15}$ часть пирога, затем делит оставшуюся часть пополам и съедает левый кусок:



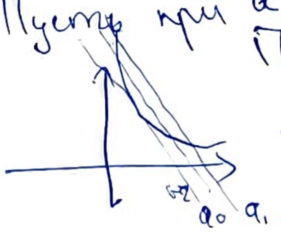
Теперь она будет ходить симметрично ходам Вали относительно того разреза Ани в том ходу. (Если Валя проводит разрез, такой, что ему после хода Вали симметричный уже проведен, то Аня просто не делает разрез). Тогда, она всегда сможет съесть кусок, ведь до этого могла Валя, а картинка симметрична; и Валя не может помешать своим ходом

Шиповник №3

Задача №5.

Рассмотрим $a > 0$.

Пусть при a_0 условие выполняется. Тогда



При всех $a_1 > a_0$ отрезок, заключённый внутри гиперболы увел., а вне — уменьш. $\Rightarrow$ все числа $\in (a_0; +\infty)$ — не подходят

При всех $a_2 < a_0$ наоборот, отрезок внутри гиперболы уменьшается, за него — увелич $\Rightarrow$ они тоже по-

подойдут => при помощи а будет верно ≤ для 1ого числа, и для другого также => из симметрии, если и будет a_0 подходить под условие => $-a_0$ тоже подойдут, и никакие другие не подойдут. Осталось их подобрать
(Продолжение ниже)

№ 7

При $n=33$, не будет задачи, решённой ≥ половиной
Пусть люди от 1 до 9 решат все задачи от 1 до 33, и люди от 10 до 18 — все задачи от 34 до 66. Остались 2 человека — Петя и Вася, решившие 33 и 34, и они решили оставшиеся 34 задачи.
Докажем, что при $n \geq 45$ всегда найдётся задача, которую решили ≥ 10 человек. Пусть нет => каждую задачу решило ≤ 9 человек => всего ≤ 900 задач сделано. Но их $\geq 19 \cdot 45 + 46 = 901$. Противоречие.

№ 5 — продолжение.

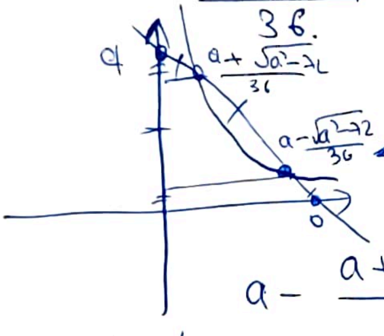
Чистовик № 4

Найдём $a>0$.

$$\frac{1}{x} = -18x + a$$

$$18x^2 - ax + 1 = 0,$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2-72}}{36}$$



Заметим, что если эти отрезки равны, то по т. Фалеса равны их проекции на Oy. =>

$$a - \frac{a+\sqrt{a^2-72}}{36} = \frac{\sqrt{a^2-72}}{18} = a - \frac{\sqrt{a^2-72}}{36}$$

$$2\sqrt{a^2-72} = a - \sqrt{a^2-72}$$

$$3\sqrt{a^2-72} = a$$

$$9a^2 - 9 \cdot 72 = a^2$$

$$8a^2 = 9 \cdot 72$$

$$8a^2 = 9 \cdot 72$$

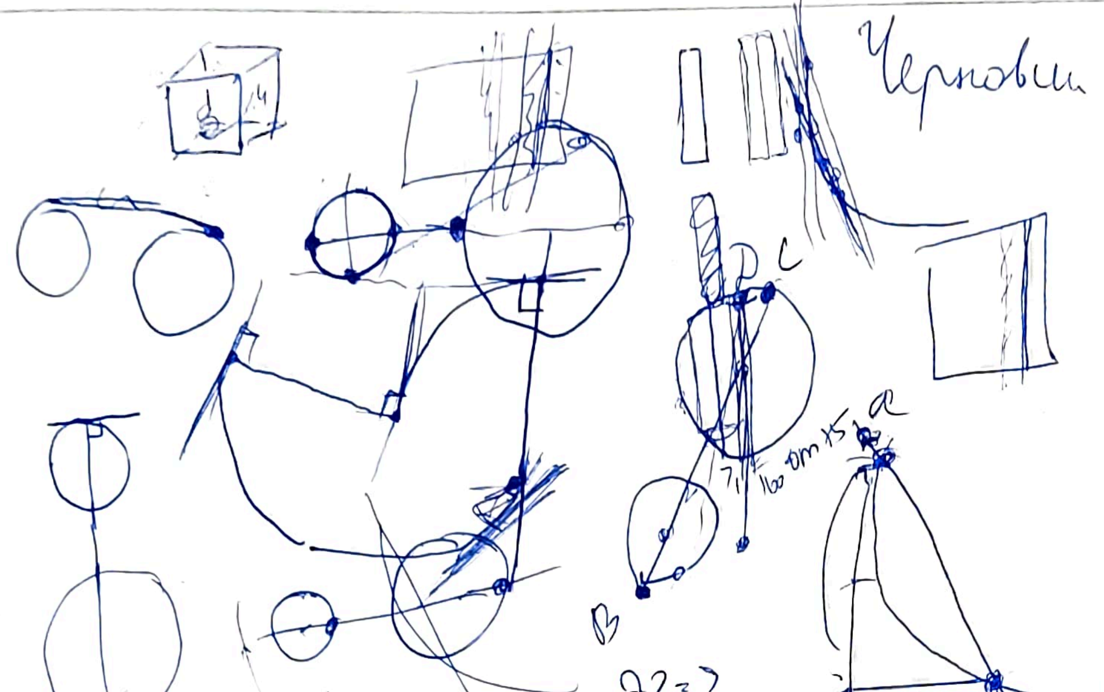
$a = 9$. Проверка: $9 - \frac{9+\sqrt{81-72}}{36} \vee \frac{\sqrt{81-72}}{18}$

$9 - \frac{1}{3} \vee \frac{1}{6}$ Это неверно => такого a нет

Ответ: ∅

07-00-78-86
(159,5)

Черновик



$-18x^2+9x=1$

$18x^2-9x+1=0$

$D=81-72=9$

$x_{1,2}=\frac{9\pm3}{36}=\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$

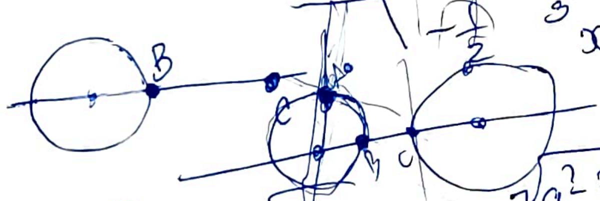
$y=-18x+9$

$\frac{1}{x}=-18x+a$

$18x^2-ax+1=0$

$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-72}}{36}$

$a=9$



$a-\frac{a+\sqrt{a^2-72}}{36}$

$=\frac{\sqrt{a^2-72}}{18}=\frac{a-\sqrt{a^2-72}}{36}$

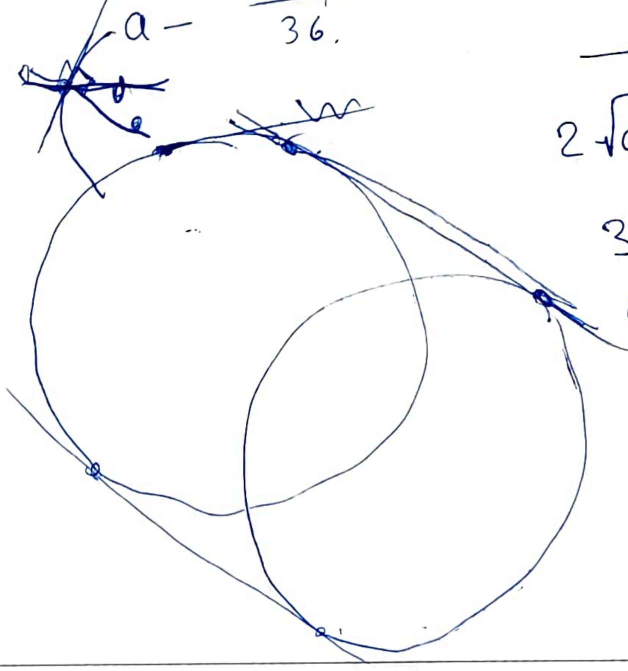
$2\sqrt{a^2-72}=a-\sqrt{a^2-72}$

$3\sqrt{a^2-72}=a$

$9a^2-9\cdot72=a^2$

$8a^2=9\cdot72$

$a^2=\frac{9\cdot72}{8}=9$



$n=44$ $44{,}44\ldots$ $44,\ 45$ Черновик

72 36 $(19-17)(17+17)$ 72

9 общих

$\dfrac{a \pm \sqrt{a^2-4\cdot 18}}{36}$

$-18x+a=\frac{1}{x}$

$18x^2-ax+1=0$

$a^2 \geq 4\cdot 18$

45 55 зон

44

9

$y=-18x+a$ $1;1$

$\boxed{a=19}$

$1=-18+a$

$k+k+2=72$

$2k=70$ $k=37$

55

$\dfrac{19 \pm 17}{36}$ $\dfrac{1}{18}$ $a=\sqrt{73}$ $\dfrac{\sqrt{73}\pm 1}{36}$

17 2 3 $\ldots$

$2x+1=35$

$x=17$

$a=19$

$\dfrac{19 \pm \sqrt{19^2-72}}{2}$

$\dfrac{19+17}{36}$

$(0;19)$

$\left(\frac{1}{18};18\right)$

x^2 35 $(x+1)$ 37 $(x+2)^2$

$\dfrac{19+17}{36}$

3 4 5 6 7 8 9 10 $11\ldots 44$

$a=19$ $-18x+19$

$(1;1)$

$a=1$

$\dfrac{1}{18}$ $\dfrac{1}{9}$

$\dfrac{a^2}{18^2+a^2}$

$a\sqrt{\dfrac{1+18^2}{18^2}}$

$-18x+a=\dfrac{1}{x}$

$18x^2-xa+1=0$

$a^2-4\cdot 18=1$

$a=\sqrt{4\cdot 18+1}$

$\dfrac{1}{18^2}+1$

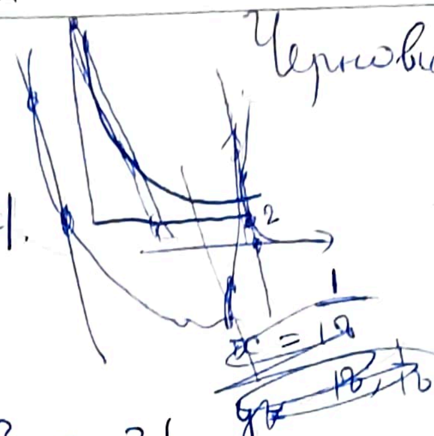
$\left(\dfrac{17}{18}\right)^2+17^2$

$x_{1,2}=\dfrac{\sqrt{4\cdot 18+1}\pm 1}{36}$

$x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13$

$(x+1)(x-2)$

Черновик



$\underline{x^3 - 12x + 13} = |x^2 - x - 2|.$

~~8 − 24 + 13~~

~~27 − 36 + 13.~~

$x^3 - 12x + 13 = |x^2 - x - 2.|$

$x = \frac{1}{18}$

$y = 18$

При $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$:

$\underline{x = 18}.$

$y = \frac{1}{18}$

$x^3 - 12x + 13 = x^2 - x - 2$

$\frac{1}{18} = -18^2 + a$

$18 = -1 + a$

$x^3 - x^2 - 11x + \underline{15} = 0.$

$a = \frac{1 + 18^3}{18}.$

$x = 3$

$\underline{27} - \underline{9 - 33} + \underline{15}$

-42

42

$\frac{1}{x} = -18x + \frac{1+18^3}{18}.$

$1 - |1 - 1 - 2| = 12 - 13$

$18x^2 - \frac{1+18^3}{18}x + 1 = 0$

$x = 3$ — корень

$1 - 2 = 12 - 13$

~~$(x-3)(x^2 - 6x - 5) = 0$~~

$D = \frac{(1+18)^3}{18}$

~~$(x-1)($~~

$27 - |9 - 3 - 2| =$

$x^2 - 6x - 5 = 0$

$= 36 - 13$

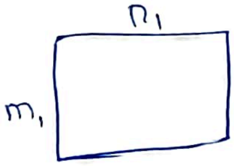
$D = 36 + 5 \cdot 4 = 56.$

$\underline{23 = 23}$

$(x-3)(x^2 + 2x - 5) = 0$

~~$x_1 + x_2 = -2$~~

~~$x_1 x_2 = -5$~~

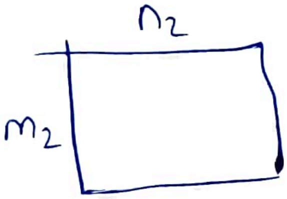


$m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

$D = 4 + 4 \cdot 5 = 24$

$2(m_1 + n_1) = m_1 n_1$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \cancel{4}\sqrt{2}\sqrt{6}}{2} =$

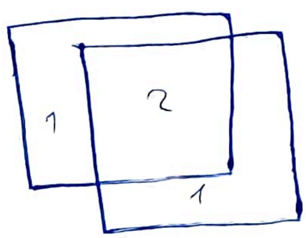


$2(m_2 + n_2) = m_2 n_2$

$= -1 \pm \sqrt{6}.$

~~$2m_1 + 2n_1$~~

$-1 + \sqrt{6} \vee 2$



$\underline{2m} + 2n = \underline{mn}.$

~~$3 \vee$~~ $\sqrt{6} \vee 3$

$\underline{2n \vdots m}$

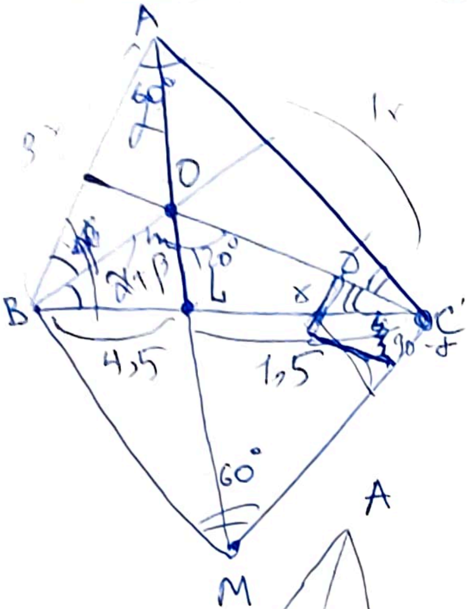
$\sqrt{6} < 3$

$2m \vdots n.$

$\frac{2}{n} + \frac{2}{m} = 1.$

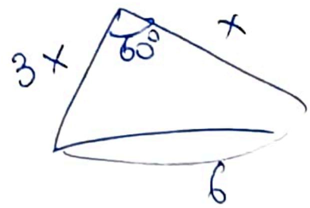
$\frac{2m + 2n}{mn} = 1$

Черновик



$180-120-2\gamma$ $90-\gamma$

$60-2\gamma$



$36 = x^2+9x^2-6x\cdot\frac{1}{2}.$

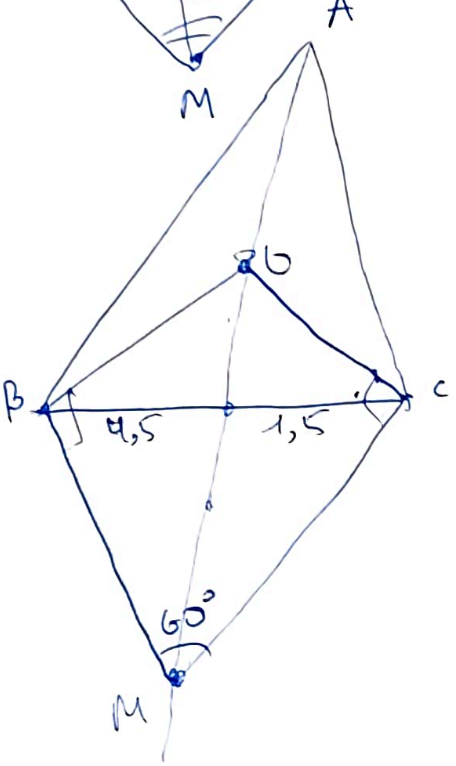
$10x^2-3x-36=0$

$D = 9+4\cdot10\cdot36 =$

$= 9(1+4\cdot10\cdot4) =$

$= 9\cdot\underline{161}$

199 141



6 кусков.

20 человек каждый 100 задач

все решили $\geq n$ задач $n-\min$: есть задача которую решили $\geq\frac{1}{2}$ человек

$П > В \Rightarrow$ есть ребро

1 2 3 4 100

≤9ч ≤9ч ≤9ч ...... ≤9ч

$<\frac{1}{2}$

~~n=44 задачи~~

n=45?

Нужно для 44!

≤ 900 з

половина

$\leq \cancel{90}\ \frac{900}{20} = 45$ задач

Черновик

1 + + + + + ... 45
2 + + + + + ... +
3 +
4 92
...
20

$-18x + a = 0$

$x = \frac{a}{18}$

15, 20

1 2 3 4 5 ... 100

≤ 2 11 разрезов

55. 11 человек и есть кусок

кусок $\le \frac{1}{10}$

нельзя резать, чтобы был $< \frac{1}{100}$

45

n, m

$\frac{1}{x} = -18x + a$

$18x^2 - ax + 1 = 0$

$D = a^2 - 4 \cdot 18$

$2(m+n) = mn$

$\cancel{2(m+n) \geq 2\sqrt{mn}}$

$\cancel{4\sqrt{mn} \le mn}$

$\cancel{mn \geq 4}$

$2m + 2n \;\cancel{\geq}\; m \cdot n$

$m \geq n$. $4m$ $4m$

при $n > 4$:

меньшее из них ≤ 4!

$n = 1$ $2m + 2 = m$ ⊖

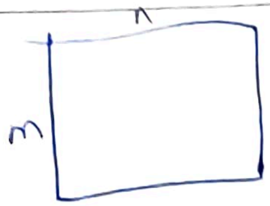
$n = 2$ $2m + 4 = 2m$.

$n = 3$ $2m + 6 = 3m$

$m = 6$

x, 2x.

3, 3, 6



$mn = 2m + 2n$ Условие

$m > n \Rightarrow 2m + 2n < 4m$

$mn \quad 4m$

При $n > 4$ $mn > 4m$

$n \le 4$

$n = 1 \quad m = 2m + 2$

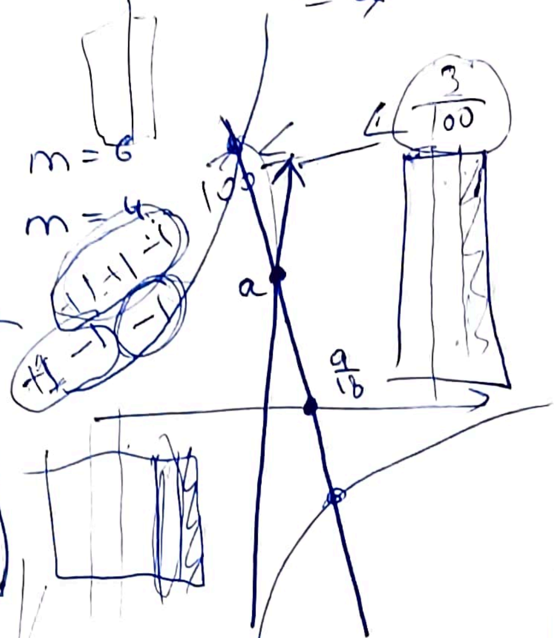
$n = 2 \quad 2m = 2m + 4$

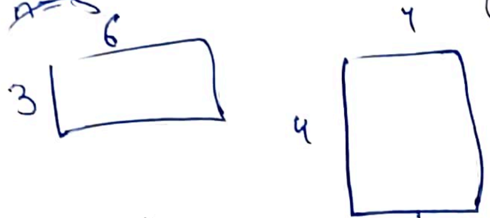
$n = 3 \quad 3m = 2m + 6 \quad m = 6$

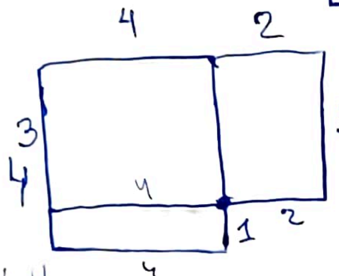
$n = 4 \quad 4m = 2m + 8 \quad m = 4$

~~$n = 5$~~ $5m = 2m + 10$

$\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{16}} =$







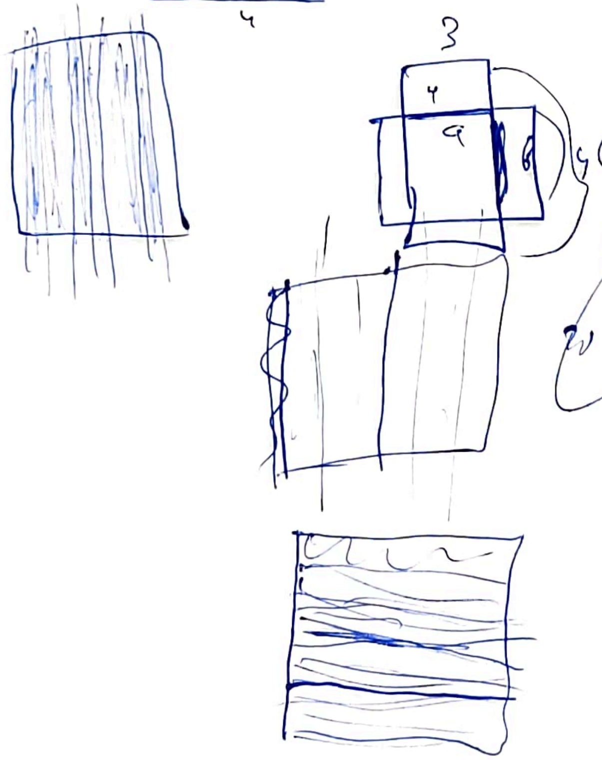
$4 + 6 = 10$

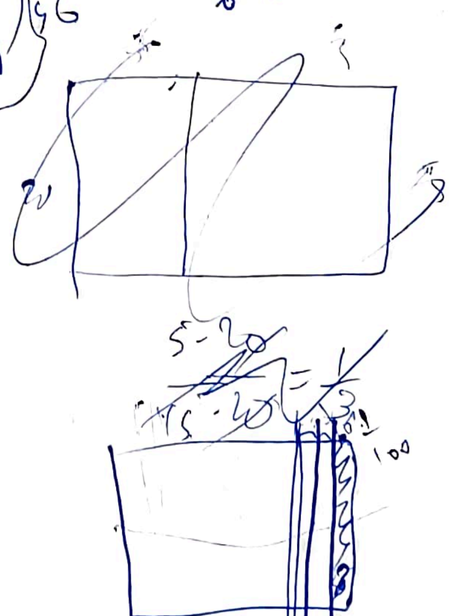
max пересечение $= 12$

Пусть можно.

$a \le 3$

$b \le 4$



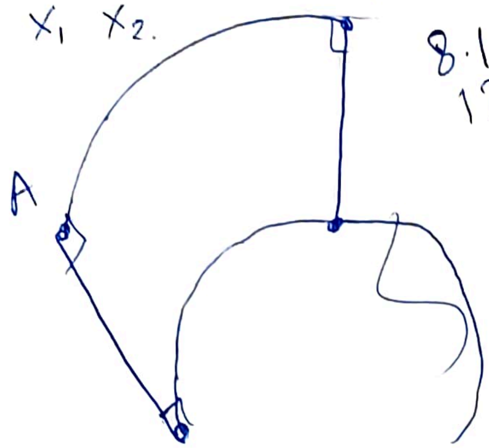


Черновик

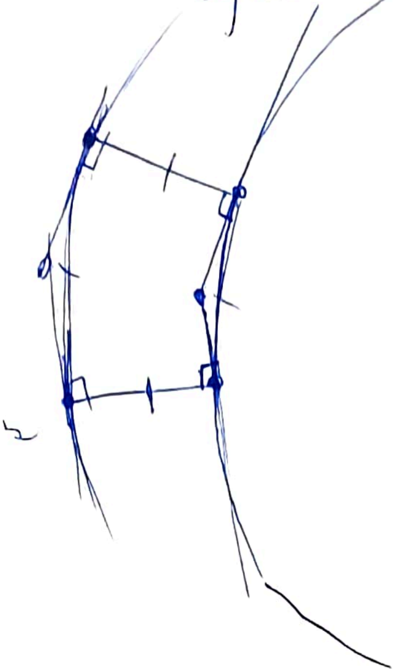
$$\frac{1}{x} = -18x + a$$

$$\boxed{18x^2 - ax + 1 = 0}$$

x_1 x_2.



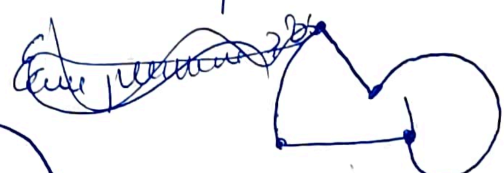
8·15
120
80
40
-32

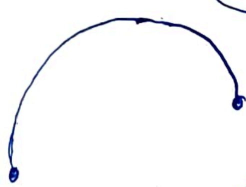


Если решение ≥ 9 задач это будет

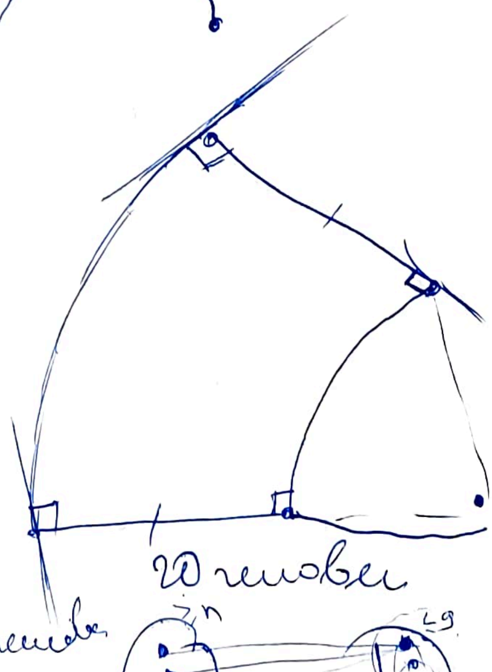
годы

n +





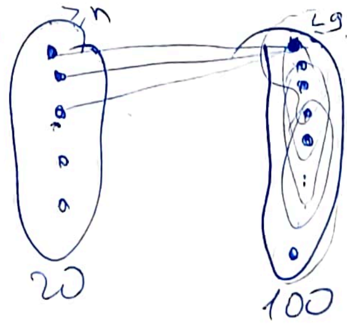
по 9 задач



20 человек

100 задач

≤ 9 человек



Черновик

$\geq n$

$\geq n$

$\geq n$

$\geq n$

$\geq n+1$

≤ 9

≤ 9

≤ 9

9 n

9 n

$100-2n$.

~~19n~~

$20n+1$

≤ 900

$\boxed{n=44}$

$\cancel{20n+1=900}$

$\boxed{n \geq 45}$

$a = b \leq$

$20 \cdot 45 + 1$

$100-2n \geq n+1$

900

$3n \leq 99$

$n \leq 33$

$n = 33$

$n=33$ (+)

$n \geq 34$?

$20n+1 \leq 900$

$20n \leq 899$

$n \leq \frac{899}{20} = \frac{900}{20} - \frac{1}{20}$

9 33

9 33

100 задач

$n \leq \frac{880}{20} = 44$

При $n=44$?

44

44

44

100 задач

44

45

33

34

$\cancel{20 \cdot 44 + 1}$ 900

(+) 34

~~881~~

$n=34$

$n+1$

600 − 9

$34 \cdot 20 + 1$

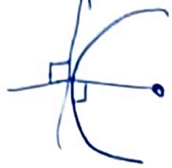
$n+1$.

$5,3,34$

07-00-78-86 (159.5)

Чистовик №5

Заметим, что прямая, ⊥ дуге окр-ти, проходит через ее центр. Это верно, т.к. радиус в точку касания проведенный ⊥ касательной => это 1 прямая.



Тогда, прямая BC содержит в себе центры этих 2 окр-тей. Но и прямая AD также содержит центры окр-тей =>

Возможные градусные меры дуг — это 0°, 180° и 360°, но т.к. все дуги либо < 180°, либо > 180° =>

Ответ: AB = 0°; CD = 360°.