



41мес

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Редорова Дарини Николаевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«13» апреля 2025 года

Подпись участника
Д Ред

[illegible][illegible]

$$\sqrt{(2x+3)^2} + \sqrt{(x+3)^2} + (\sqrt{x+2})^2 = \sqrt{4+12} - \sqrt{4-12}$$

$$a^2 = 4 + \sqrt{12} + 4 - \sqrt{12} - 2\sqrt{16-12}$$

$$a^2 = 4 \quad a = 2$$

$$b_1 = \frac{4}{3}a_1 + b_2$$

$$x+2 \quad x > -2$$

$$\sqrt{(2x+3)^2} + 2x+5 = 2$$

$$2x+3 + 2x+5 = 2$$

$$4x+8 = 2$$

$$x = -1,5$$

$$a_1 \cdot 6 = a_2 \cdot 14 = a_3 \cdot 21$$

$$a_2 = \frac{7}{3}a_1 \quad a_3 = \frac{7}{2}a_1$$

$$x^3 + x^2 \cdot (a_1 + b_1) + x \cdot (a_1 b_1 + 6) + 6a_1$$

$$x^3 + x^2 \cdot (a_2 + b_2)$$

$$a_1 + b_1 = \frac{7}{3}a_1 + b_2 = \frac{7}{2}a_1 + b_2$$

$$\frac{7}{3}a_1 b_2 + 14 = \frac{7}{2}a_1 b_2 + 21$$

$$\frac{a_1 b_2}{3} + 2 = \frac{a_1 b_2}{2} + 3$$

$$a_1 b_1 + 6 = \frac{7}{3}a_1 b_2 +$$

$$a_1 b_1 + 6 = \frac{7}{3}a_1$$

уштовик

$$\sqrt{4x^2+12x+9} + \sqrt{x^2+6x+9} + \left(-\sqrt{x+2} \right)^2 \stackrel{N1}{=} \sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}}$$

пусть $a = \sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}}$ $a > 0$ так как

$$4+\sqrt{12} > 4-\sqrt{12}$$

$$a^2 = \left(\sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}} \right)^2 = 4+\sqrt{12} + 4-\sqrt{12} - 2\sqrt{(4+\sqrt{12})(4-\sqrt{12})} =$$

$$= 8 - 2\sqrt{16-12} = 4$$

$a^2 = 4$ и $a > 0$ значит $a = 2$

$$\sqrt{(2x+3)^2} + \sqrt{(x+3)^2} + \left(\sqrt{x+2} \right)^2 = 2$$

$x+2 \geq 0$ значит $x \geq -2$ значит $(x+3) > 0$

если $(2x+3) < 0$ то есть $x \in [-2; 1,5]$

$$-2x-3 + x+3 + x+2 = 2 \text{ верно}$$

если $(2x+3) \geq 0$ то есть $x \in [1,5; +\infty)$

$$2x+3 + x+3 + x+2 = 2$$

$$4x+6=0 \quad x=-1,5 \text{ подходит}$$

Ответ: $[-2; 1,5]$

N 2

$$a=126$$

Докажу что оно подходит

$$5^{3-\frac{1}{x}} \geq 126 + \sin^3 x$$

Допустим оно не подходит и неравенство верно при $x > 0$

$$5^{3-\frac{1}{x}} - \sin^3 x \geq 126$$

но $5^{3-\frac{1}{x}} \leq 125$ и $\sin^3 x \geq -1$ значит

$$5^{3-\frac{1}{x}} - \sin^3 x < 126 \text{ противоречие значит}$$

$$\forall a=126 \text{ подходит}$$

$$5^{3-\frac{1}{2}} < a + \sin^3 x \quad \text{чирковик}$$

125

$$5^{3-\frac{1}{2}} < 125 + \sin^3 x$$

$$5^{3-\frac{1}{2}} = 125 - \varepsilon + \varepsilon'$$

$$a^3 + b^3 - c^3 = (a + b - c)^3$$

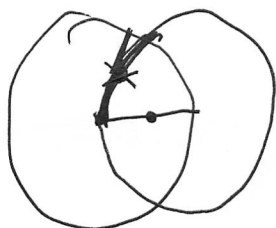
$$(a + b - c)^3 = (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc) \cdot (a + b - c)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + 2a^2b - 2a^2c - 2abc$$

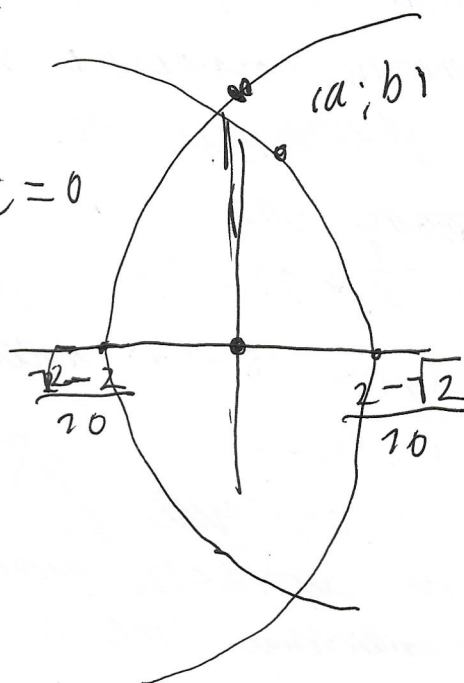
$$a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c$$

$$a^2b + a^2c +$$

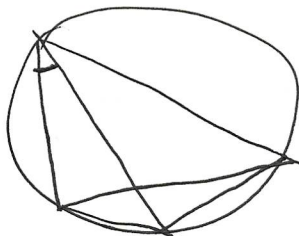
$$a^2b - a^2c - b^2c + 2abc = 0$$



$$\angle \cos 2\pi x$$



$$\left(x + \frac{2-\sqrt{2}}{10}\right)^2 + y^2 = \frac{6-2\sqrt{2}}{250}$$



числовик

допустим что $a = 126$ не наименьшее

и есть число $a = 126 - \varepsilon$ $\varepsilon \in (0; 126)$

такое что неравенство

$$5^{3-\frac{1}{x}} < 126 - \varepsilon + \sin 3^x$$

верно при любых x

при увеличении x бесконечности можно
сделать $5^{3-\frac{1}{x}}$ сколь угодно близкой 5^3

найду такой y что

$$5^{3-\frac{1}{y}} > 126 - \varepsilon + \varepsilon' \quad \varepsilon' \in (0; 126 - \varepsilon)$$

при увеличении y величина $5^{3-\frac{1}{y}}$ будет

возрастать, а $\sin$ -период. функция

3^x - монотонно возрастает до сколь угодно
большого значения значит есть

$y' > y$ такое что $\sin 3^{y'} = -1$

тогда $5^{3-\frac{1}{y'}} > 126 - \varepsilon + \varepsilon'$ значит

$$5^{3-\frac{1}{y'}} - \sin(3^{y'}) < 126 - \varepsilon + \varepsilon'$$

$$126 - \varepsilon + \varepsilon' + 1 < 126 - \varepsilon$$

$\varepsilon' < 0$ противоречие

значит ~~то~~ при $a < 126$ есть решение

значит наименьшее это 126

Ответ: 126

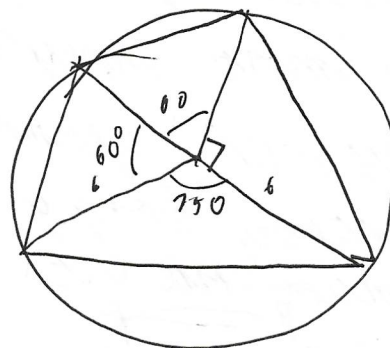
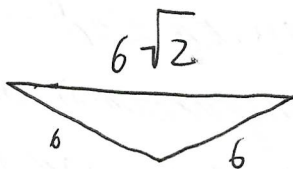
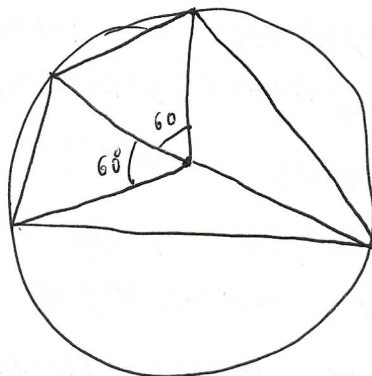
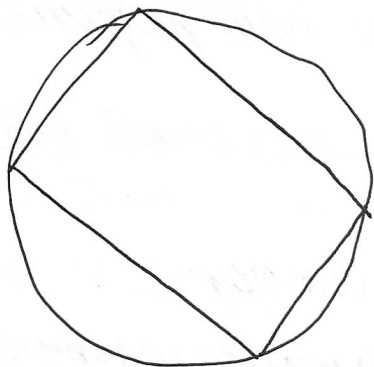
Черновик

$$2\cos^2 2\pi x - 1$$

$$(2\cos^2 2\pi x - 1)^2 = 4\cos^4 2\pi x - 4\cos^2 2\pi x$$

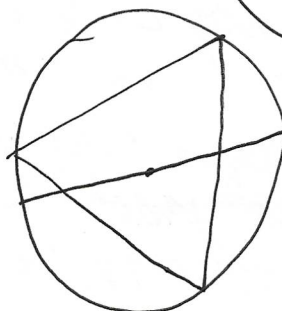
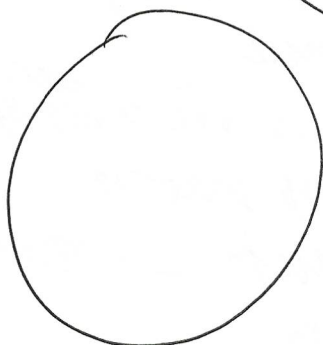
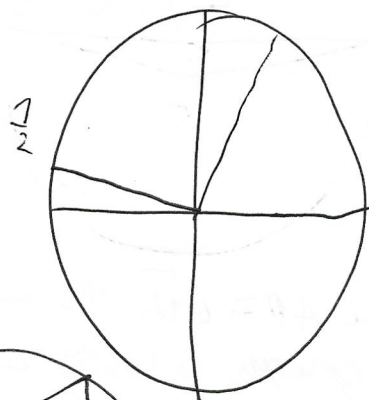
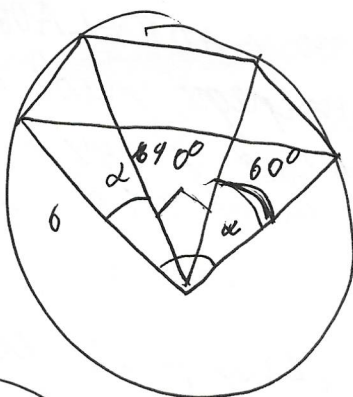
$$a = \frac{b}{k} \quad b = 2y^2 - 1 \quad c = 4y^4 - 4$$

$$18\sin 2 + 18 + 9\sqrt{3}$$



$$36\sin(18\sin 2 + 18 + 9\sqrt{3}) - 18\sin 2$$

$$\sin 120$$



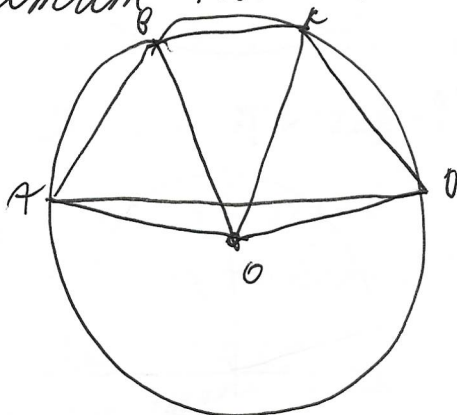
Чистовик

N 3

Рассмотрю два треугольника
у которых сторона на дуге равна 6
а третья вершина это центр
тогда они равносторонние, так как
оба стороны = 6 тогда угол при радиусе
этих треугольников $= 60^\circ$

Рассмотрю треугольник с стороной $6\sqrt{2}$
и вершиной в центре по обратной
теореме Пифагора он прямоугольный
значит угол при вершине центре
у этого треугольника $= 90^\circ$

допустим центр окружности ~~треугольника~~
описанной вокруг четырех углов $ABCO$
лежит на его стороне или за ней



если $AD = 6$
то $\angle AOD = 60^\circ$
то $\angle AOD = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD$
посреди углов AOB, BOC, COD
есть углы 60° и 90° их
сумма $> 60^\circ$ противоречие

если $AD = 6\sqrt{2}$ то $\angle AOD = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD$
но среди углов $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD$ есть два по 60°
их сумма $> 90^\circ$ противоречие
значит AB, BC, CD имеют длины 6, 6, $6\sqrt{2}$ в порядке
значит сумма углов AOB, BOC, COD равна
 $60^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 210^\circ > 180^\circ$ значит $\angle AOD > 180^\circ$
противоречие

4

50-28-85-70

(161.23)

записи получив треугольники чистовик

1 13 13 2 13 12
2 12 13 3 12 12
3 11 13 4 11 12
4 10 13 5 10 12
5 9 13 6 9 12
6 8 13 7 8 12
7 7 13 8 7 12
8 6 13 9 6 12
9 5 13 10 5 12
10 4 13 11 4 12
11 3 13 12 3 12
12 2 13 13 2 12
13 1 13 14 1 12

a b c
a - раст в улам от
верх до стор от 1-14
b - раст от 1-14 до след
сраст от след до вер

замечу что в каждом из случаев часть повторяется
отражением удеру эти случаи

1 13 13 2 12 13 3 11 13 4 10 13 5 9 13 6 8 13 7 7 13 8 6 13 9 5 13 10 4 13 11 3 13 12 2 13 13 1 13
2 12 13 3 12 12 4 11 12 5 10 12 6 9 12 7 8 12 8 7 12 9 6 12 10 5 12 11 4 12 12 3 12 13 2 12 14 1 12
3 11 13 4 11 12 5 10 12 6 9 12 7 8 12 8 7 12 9 6 12 10 5 12 11 4 12 12 3 12 13 2 12 14 1 12
4 10 13 5 10 12 6 9 12 7 8 12 8 7 12 9 6 12 10 5 12 11 4 12 12 3 12 13 2 12 14 1 12
5 9 13 6 8 13 7 7 13 8 6 13 9 5 13 10 4 13 11 3 13 12 2 13 13 1 13
6 8 13 7 7 13 8 6 13 9 5 13 10 4 13 11 3 13 12 2 13 13 1 13
7 7 13 8 6 13 9 5 13 10 4 13 11 3 13 12 2 13 13 1 13
8 6 13 9 5 13 10 4 13 11 3 13 12 2 13 13 1 13
9 5 13 10 4 13 11 3 13 12 2 13 13 1 13
10 4 13 11 3 13 12 2 13 13 1 13
11 3 13 12 2 13 13 1 13
12 2 13 13 1 13
13 1 13 14 1 12

Отметку повторяющиеся случаи

1 13 13 2 12 13 3 11 13 4 10 13 5 9 13 6 8 13 7 7 13 8 6 13 9 5 13 10 4 13 11 3 13 12 2 13 13 1 13

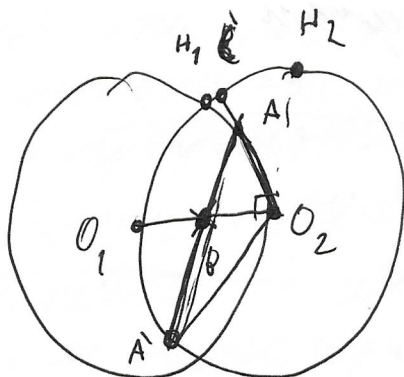
Отметку возможные комбинации
игр. отсор. по возрастанию

Всего 16 случаев если вторая сторона
летит на 1-14 если она летит на
15-28 я могу получить возможные случаи
отражение вокруг прямой и другим
они повторялись

значит всего есть 16 случаев шифровки
ответ: 16

Ombem: 16

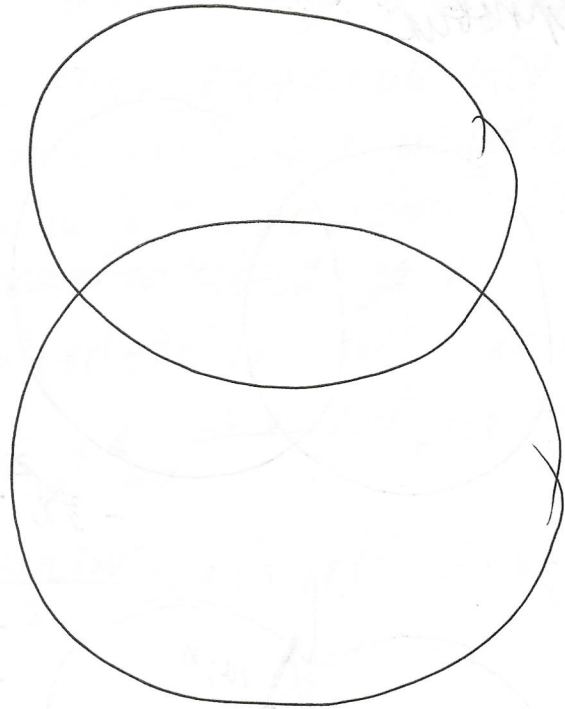
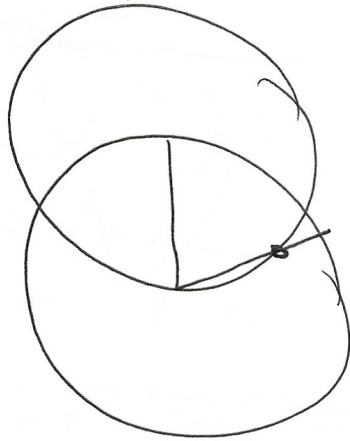
N5



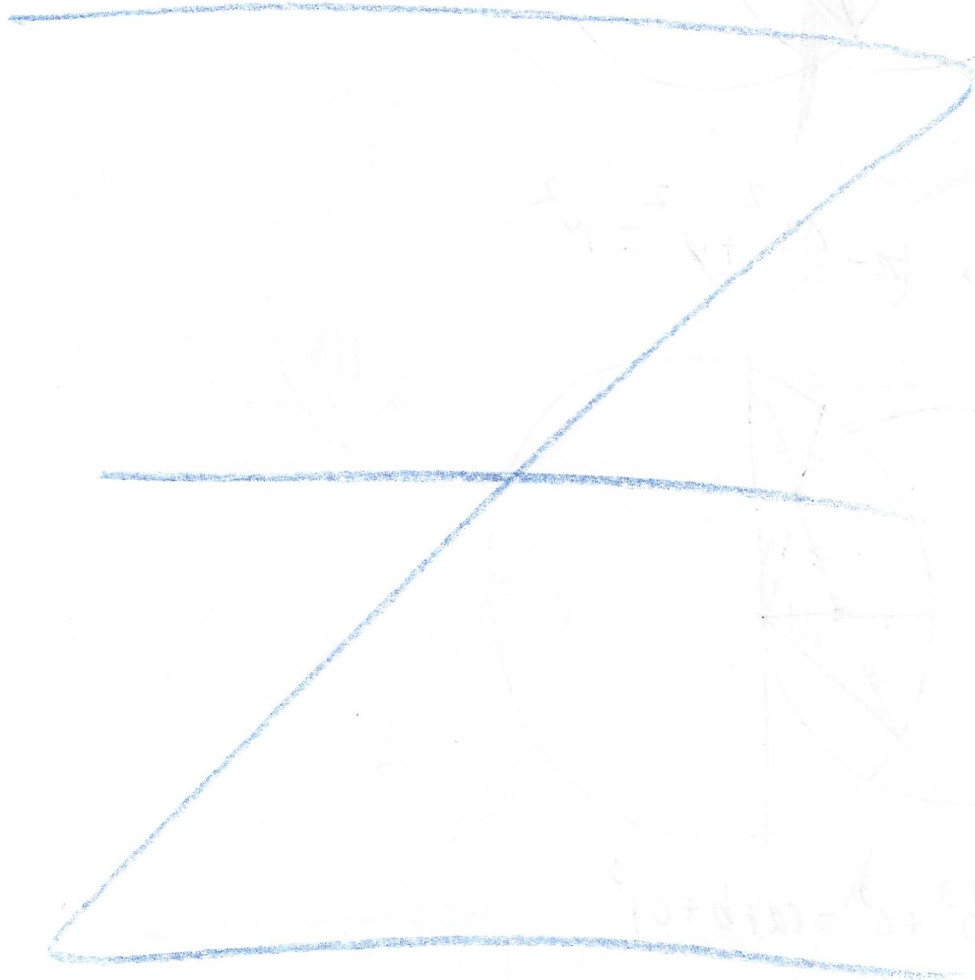
пусть мышь попала в двойную
зону в точке А тогда ей самый короткий
путь это АВ а кратчайший из зон
А в зону без газа такая прямая что
 AO_2 - радиус и $\angle A$ лежит на AO_2
то что в двойной зоне мышь находится
в два раза быстрее значит можно
представить что она проходила
путь AA' A' - отражение А относительно
В A' - лежит на окружности O
 $A'C$ - весь путь тогда который надо
минимизировать $\angle CA'$ миним
при минимальном угле $\angle O_2 A' \angle CA A$
но при движении по окружности O_2
от точки H_2 к $H_2 \angle CA A'$ уменьшается
значит мин при $C=H_2$ и весь путь равен
2 радиуса окружности $= \frac{4-2\sqrt{2}}{5}$
Ответ: $\frac{4-2\sqrt{2}}{5}$

Assim: $\frac{4-2\sqrt{2}}{5}$

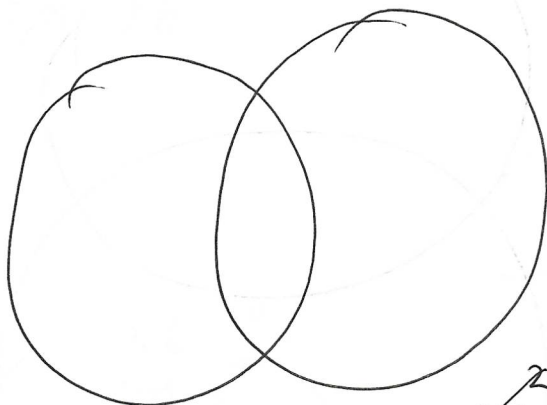
перевод



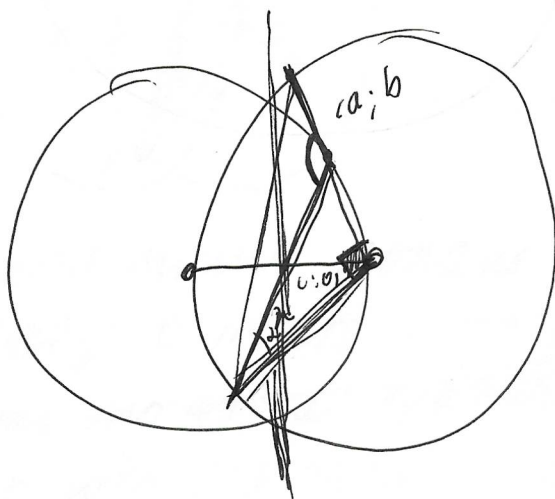
$$a^3 + b^3 + (c + \Delta x)^3$$



чертёвник.

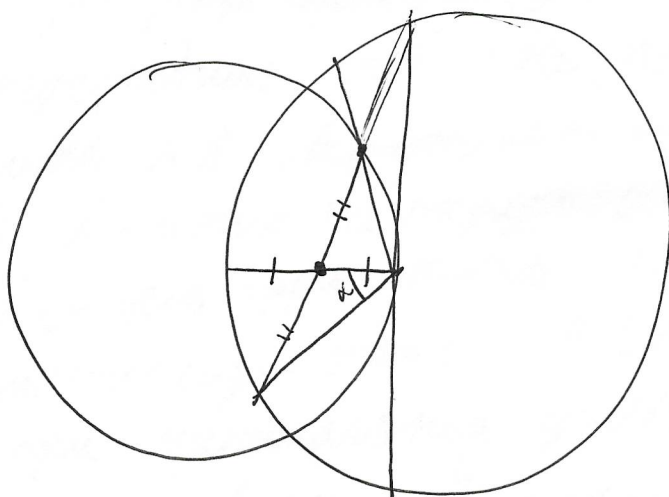


$$-3x^2$$



$$\begin{aligned} & -3\cos^2 x \sin x \\ & -3\cos^2 2x \sin 2x \\ & +3\cos^4 x \sin 4x \end{aligned}$$

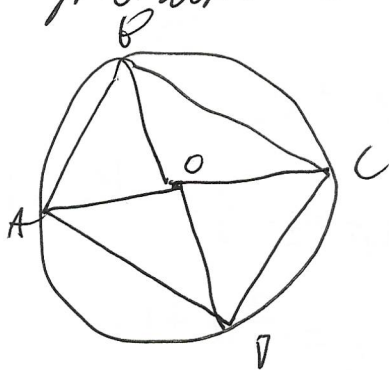
$$\frac{r}{2} \rightarrow \left(\pi - \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 = r^2$$



$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3$$



значит ^{чертовик} точка O лежит внутри ABCD



$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle AOD = 360^\circ$$

по среди этих углов есть
2 по 60° и 90 обозначу
оставшийся за α

$$60^\circ + 60^\circ + 90^\circ + \alpha = 360^\circ \quad \alpha = 150^\circ$$

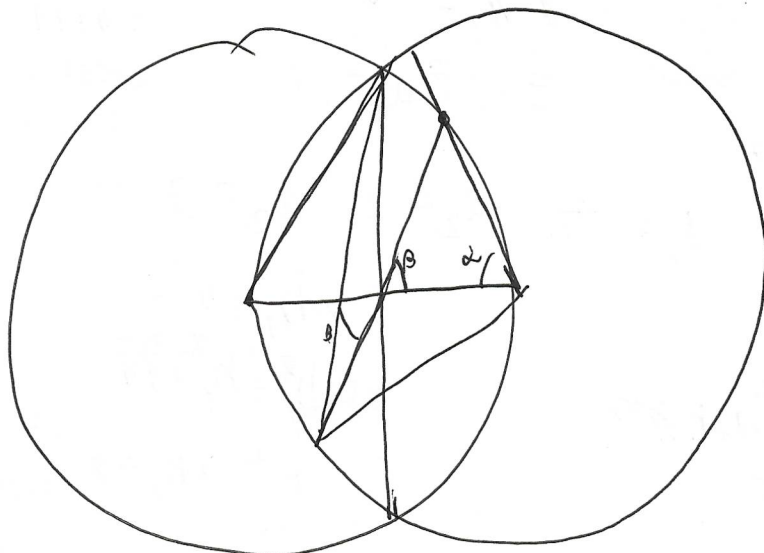
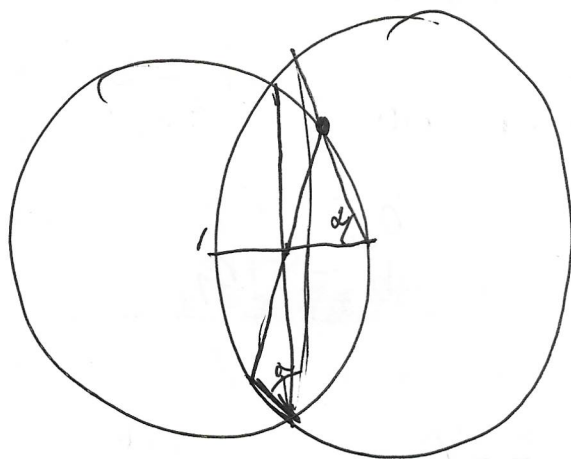
$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} = \frac{6 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ}{2} + \frac{6 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ}{2} +$$

$$+ \frac{6 \cdot 6 \cdot \sin 90^\circ}{2} + \frac{6 \cdot 6 \cdot \sin 150^\circ}{2} = 9\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 18 + 9 = 27 + 18\sqrt{3}$$

Ответ: $18 + 27\sqrt{3}$

5

чертовик



$$a_2 = \frac{7}{3}a_1 \quad a_3 = \frac{7}{2}a_1$$

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3$$

$$b_1 = \frac{4}{3}a_1 + b_2$$

$$x^3 + (a_1 b_1 - 6) \cdot x + 6a_1 = 0$$

$$\frac{7}{3}a_1 + b_2 = \frac{7}{2}a_1 + b_3$$

$$a_1 b_1 + 6 = a_2 b_2 + 14 = a_3 b_3 + 21$$

$$b_2 = \frac{7}{6}a_1 + b_3$$

$$(a_1 + b_1)^2 - 2a_1 b_1 - 12$$

$$\frac{41}{3}a_1^2 + a_1 b_2 = \frac{7}{3}a_1 b_2 + 198$$

$$4a_1^2 - 4a_1 b_2 - 24 = 0$$

$$a_1^2 - a_1 b_2 - 6 = 0$$

$$a_1^2 - b_2 a_1 + 14 = 0$$

$$a_1^2 - b_3 a_1 + 21 = 0$$

$$a_3 - b_1 a_3$$

$$b_3 a_1 = b_2 a_1 + 7$$

$$7 + b_1 = 3 + b_2 = 2 + b_3$$

$$b_2 = 4 + b_1$$

$$b_3 = 5 + b_1$$

$$(x + a_1) \cdot (x + a_2) \cdot (x + a_3)$$

$$-a_1 a_2 a_3 = 6a_1$$

$$a_2 a_3 = -6$$

$$\frac{7}{3}a_1 \cdot \frac{7}{2}a_1 = -6$$

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 5 + 6 \\ 3 \cdot 4 + 14 \\ 2 \cdot 10 + 21 \end{array}$$

$$a_1 a_2 a_3 = 6a_1$$

$$\frac{49}{6}a_1^2 = 6 \quad a_1 = \frac{6}{7} \quad a_2 = 2 \quad a_3 = 3$$

$$b_1^2 + 14b_1$$

$$3b_1 + 26 = 7b_1 + 6$$

$$b_1 = 5$$

$$7b_1 + 6 =$$

$$4b_1^2 + b_1^2 + 14$$

$$b_1^2 - 3b_1 - 8$$



чистовик

N 5

$$f_1(-a_1) = (-a_1 + a_1) \cdot (a_1^2 - a_1 b_1 + 6) = 0$$

$$f_2(-a_2) = (-a_2 + a_2) \cdot (a_2^2 - a_2 b_2 + 14) = 0$$

$$f_3(-a_3) = (-a_3 + a_3) \cdot (a_3^2 - a_3 b_3 + 21) = 0$$

$$f_1(-a_2) = f_2(-a_2) = 0 \quad f_1(-a_3) = f_3(-a_3) = 0$$

$f_1(x)$ - кубический многочлен с коэф. перед x^3
и корнями $-a_1, -a_2, -a_3$ значит

$$f_1(x) = (x + a_1) \cdot (x + a_2) \cdot (x + a_3)$$

$$f_1(0) = (0 + a_1) \cdot (0^2 + 0) \cdot (b_1 + 6) = 6a_1$$

$$f_1(0) = (0 + a_1) \cdot (0 + a_2) \cdot (0 + a_3) = a_1 a_2 a_3$$

$$f_2(0) = 14a_2 = f_1(0) = 6a_1 \quad \text{значит } a_2 = \frac{3}{7} a_1$$

$$f_3(0) = 21a_3 = f_1(0) = 6a_1 \quad \text{значит } a_3 = \frac{2}{7} a_1$$

$$6a_1 = a_1 a_2 a_3 \quad a_1 > 0$$

$$6 = \frac{6}{49} a_1^2$$

$$\text{где } a_1 = 7 \quad \text{значит } a_2 = 3 \quad a_3 = 2$$

$$f_1(x) = x^3 + x^2 \cdot (a_1 + b_1) + x \cdot (a_1 b_1 + 6) + 6a_1$$

$$f_2(x) = x^3 + x^2 \cdot (a_2 + b_2) + x \cdot (a_2 b_2 + 14) + 14a_2$$

$$f_3(x) = x^3 + x^2 \cdot (a_3 + b_3) + x \cdot (a_3 b_3 + 21) + 21a_3$$

если $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$ при любых x
то эти многочлены совпадают значит
 $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3$ а $7 + b_1 = 3 + b_2 = 2 + b_3$

$$b_2 = 4 + b_1$$

$$a_1 b_1 + 6 = a_2 b_2 + 14$$

$$7b_1 + 6 = 3b_1 + 12 + 14$$

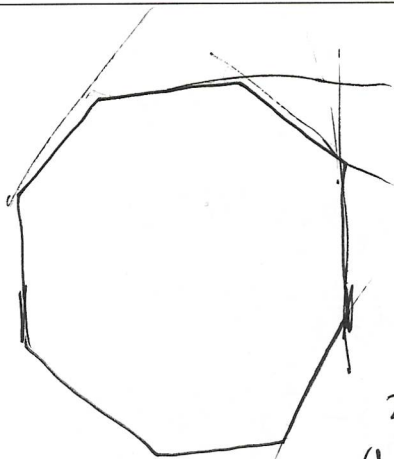
$$4b_1 = 20 \quad b_1 = 5$$

$$\text{тогда } b_2 = 9 \quad b_3 = 10 \quad \text{значит}$$

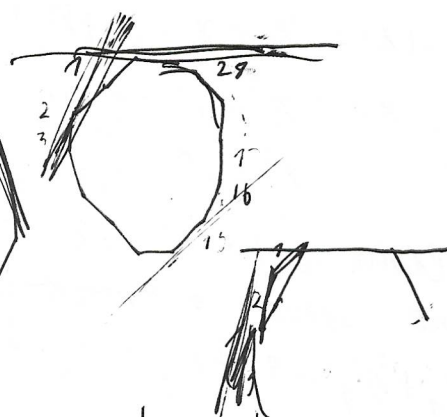
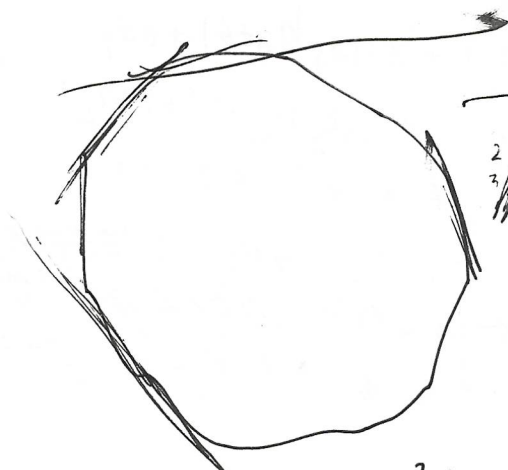
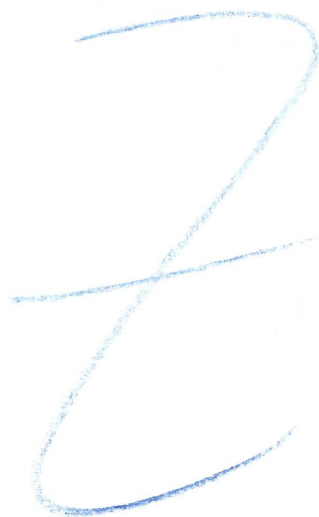
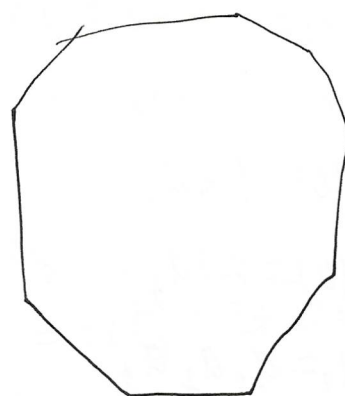
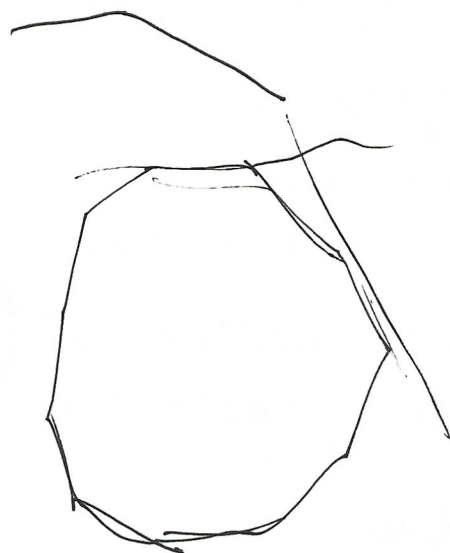
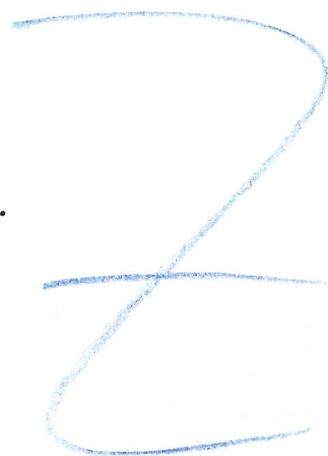
$$a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 = 7 + 5 + 3 + 9 + 2 + 10 = 36$$

Ответ: 36

чернови



$$a^2b + b^2a + c^2.$$



$$a^2b + b^2a + c^2a + a^2c + b^2c + c^2b + 2abc = 0$$

$$\cos^3(4\pi x) + \cos^3(6\pi x) + \cos^3(2\pi x).$$

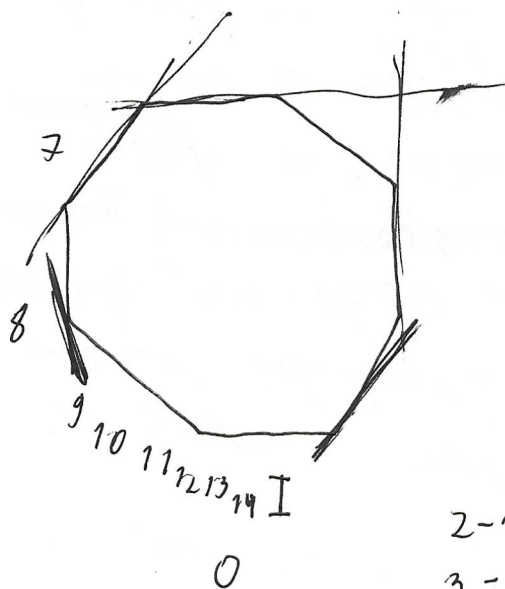
50-28-85-70
(161.23)

переводчик

$$\cos^3(4\pi x) + \cos(105)$$

1

1



2 3 4 5
6 7 8 9
10 11 12 13
14

2-15

3-15-16

4-15-17

5-15-18

6-15-19

7-15-20

8-15-21

7

a-

1 13 16

2 12 16 2 13 15

1 13 16

2 12 16 2 13 15

3 11 16 3 12 15 3 13 14

4 10 16 4 11 15 4 12 13 4 13 12

5 9 16

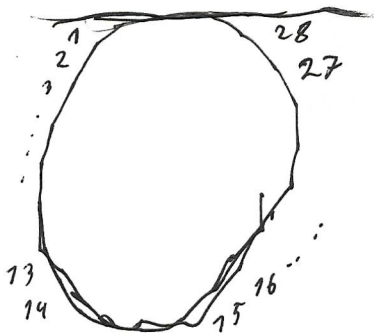
1 13 13

1 13

чистовик

N 8

проведу одну прямую:



яв. одна из других
прямых не может
летать на одной
противоположной вершине
ведь тогда они ^{то} пересекаются
перпендикулярно сторонам
вершин и

по часовой стрелке краем вершин и
идет от 1 до 28 ^{прямая} летит на
прямую следующую сторону летит на
сторону 1 тогда еще третья сторона
летит на 2-14 или 16-28 то ~~и~~ получившийся
треугольник летит вне многоугольника.
еще третья прямая летит на 15 то
две из прямых параллельные
еще вторая прямая летит на 2
то 1, 3-14, 17-28 не подходят так
как многоугольник будет летать снаружи ~~треугольника~~
а 16 и 2 подходит ^{прямая} 15 1 вар
еще вторая сторона на 3 то аналогично
подходит 2 вар, для 4 3 вар... и так
далее до 14

Каждый треугольник можно определить
как количество углов 30 углами
между гранями вдав которых проведены
прямые
то есть в виде 3 чисел