+1

0 171562 770004

17-15-62-77
(162.16)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9

Место проведения Ульяновск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Федюкова Андрея Юрьевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Беловик
№2

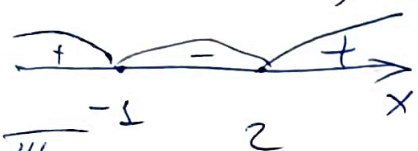
7

$x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13$

Рассмотрим, когда модуль нужно раскрыть с плюсом, а когда с минусом:

$x^2 - x - 2 \geq 0$

$(x-2)(x+1) \geq 0$



Т.е при $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ модуль ≥ 0,
при $x \in [-1; 2]$ модуль ≤ 0.

1) $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

$x^3 - x^2 + x + 2 = 12x - 13$

$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$

Найдём корень $x = 3$ подбором:

$3^3 - 3^2 - 3 \cdot 11 + 15 = 27 - 9 - 33 + 15 = 0$.

$$\begin{array}{l|l} x^3 - x^2 - 11x + 15 & x - 3 \\ \underline{x^3 - 3x^2} & x^2 + 2x - 5 \\ \quad 2x^2 - 11x & \\ \quad \underline{2x^2 - 6x} & \\ \qquad -5x + 15 & \\ \qquad \underline{-5x + 15} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Получим:

$(x-3)(x^2 + 2x - 5) = 0$

$x^2 + 2x - 5 = 0$

Беловик

$D = 4+20=24$

$x_1 = \frac{-2+2\sqrt{6}}{2} = -1+\sqrt{6}$, $x_2 = -1-\sqrt{6}$

$\Uparrow$

-1 - подходит

$-1 < -1+\sqrt{6} < -1+\sqrt{9} = 2 \Rightarrow -1 < -1+\sqrt{6} < 2 \Rightarrow$

этот корень не подх.

2) $x \in [-1;2]$

$x^3+x^2-x-2 = 12x-13$

$x^3+x^2-13x+11=0$

Подбором находим корень $x=1$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+x^2-13x+11 & x-1 \\
\underline{x^3-x^2} \qquad\qquad\quad & x^2+2x-11 \\
2x^2-13x \qquad & \\
\underline{2x^2-2x} \qquad & \\
-11x+11 & \\
\underline{-11x+11} & \\
0 &
\end{array}
$$

Получим:

$(x-1)(x^2+2x-11)=0$

$x^2+2x-11=0$

$D = 4+4\cdot 11 = 48$

$x_1 = \frac{-2+4\sqrt{3}}{2} = -1+2\sqrt{3}$, $x_2 = -1-2\sqrt{3}$

$\Uparrow$

-1

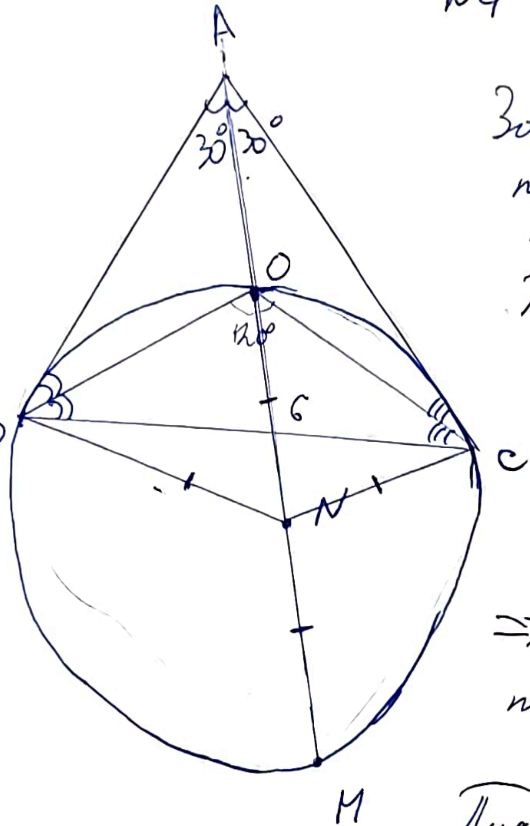
$-1+2\sqrt{3} > -1+2\sqrt{2,25} = -1+2\cdot 1,5 = 2 \Rightarrow$ не подходит

$\Rightarrow$ этот корень тоже не подходит.

Ответ: $1; 3; -1-\sqrt{6}$

Беловик

№4



Заметим, что точка O - центр пересечения биссектрис. Пусть опис. окр. $\triangle ABC \cap AM = N$. Тогда по лемме о куриной лапке $BN = NC = ON$.

$\Rightarrow N$ - центр окружности $BOCM \Rightarrow$

$\Rightarrow NM = NC = BN = ON$.

Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, тогда

$$\angle BOC = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 180 - \frac{\beta+\gamma}{2} = 180 - \frac{180-\alpha}{2} = 180 - 90 + \frac{\alpha}{2} = 90 + \frac{\alpha}{2} = 120^\circ.$$

Из условия $BC = 6$. Пусть R - радиус окр. $OCMB$. Тогда $OM = 2R$. Из т. синусов:

$$R = \frac{BC}{2\sin\angle BOC} = \frac{6}{2\sin 120^\circ} = \frac{6}{2\sin 60^\circ} = \frac{6}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} =$$

$$= 2\sqrt{3} \Rightarrow OM = 4\sqrt{3}.$$

Ответ: $4\sqrt{3}$

~~№7~~ №3

Пусть стороны этих прямоугольников a, b и x, y. Тогда из условия:

$a \cdot b = 2(a+b)$, $x \cdot y = 2(x+y)$

Найдём все пары таких чисел

$x \cdot y = 2x + 2y$

$x \cdot y - 2y = 2x$

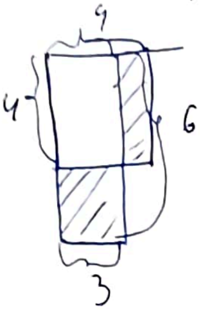
$y = \frac{2x}{x-2} = \frac{2x-4+4}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2} \Rightarrow$

$x=3, y=6; x=4, y=4; x=6, y=3.$

Т.е. всего существует 2 различных прямоугольника (прямоугольники со сторонами 3 и 6 и сторонами 6 и 3 - равные) это прямоугольники со сторонами 3,6; 4,4.

Нам нужно найти площадь, которая покрыта одним слоем, сделав её минимальной. Тогда нужно максимизировать площадь, которая покрыта 2-мя прямоугольниками. Т.к. стороны прямоугольников параллельны, то максимизируемая область - прямоугольник, который должен „помещаться" в оба прямоугольника. Т.е. если его стороны это A и B, то

$A \leq 3; B \leq 6 \mid A \leq 4; B \leq 4$ - это условие ~~нужно~~ необходимо для того чтобы данный прямоугольник поместился в оба $\Rightarrow$ его максимальные размеры 3 на 4. Итого площадь минимальная покрытая одним слоем будет $4\cdot4+3\cdot6-3\cdot4\cdot2=16+18-24=$ $=10$. Пример:



$S_{1см}=1\cdot\cancel{6}4+3\cdot2=10.$

7

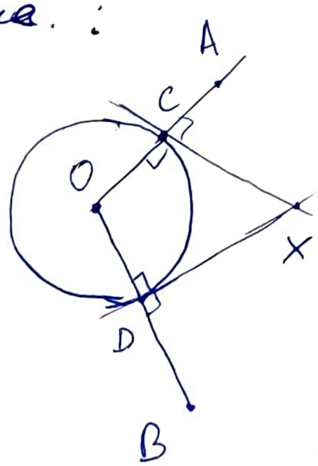
№7.

Заметим, что в условии сказано, что один ученик решил задач больше другого. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ один ученик решил хотя бы $n+1$ задачу. Тогда всего задач решено не менее $20n+1$. Чтобы какую-л. задачу решило ~~больше по~~ не менее половины класса по принципу Дирихле необходимо $100\cdot9+1$ решенных задач. $\Rightarrow$

$100\cdot9+1\le20n+1\Rightarrow \cancel{100}n\geq\frac{100\cdot9}{20}=45$ задач, т.е при $n=45$ найдётся хотя бы 1 задача, которую решило не менее половины класса.

№8

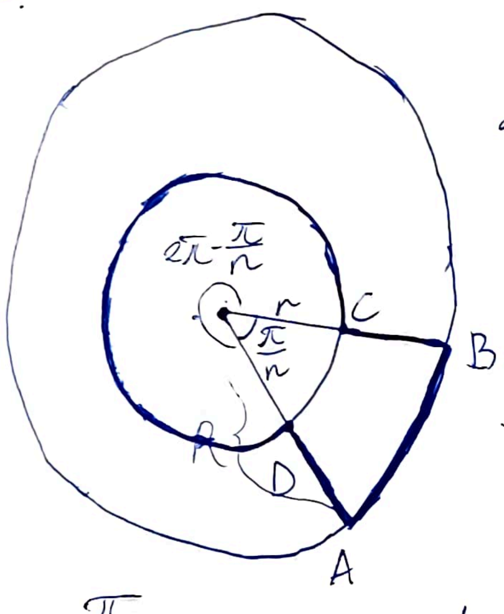
Рассмотрим, то, как прямая ~~касается~~ перпендик. дуга.:



Тогда $CA\perp CX$ и $DB\perp DX$, т.е прямые перпендикулярны касательным как сказано в примечании. Но мы замечаем, что эти прямые - есть секущие, которые содер-

Беловик

жат диаметр. Т.е это просто продолжения ~~рад~~ диаметров. Но тогда если достроить окружности с дуг AB и CD, то прямые BC и DA содержат одновременно ~~ра~~ диаметры обеих окружностей. Но это значит, что окружности центричиские и т.к. AB < половины окружности, а CD – больше половины окр., то радиус окр. от дуги AB > радиус окр. от дуги CD. Получим рисунок:



Пусть радиус меньшей из окр. r, большей R, тогда:

$$R-r=\frac{\pi}{n}\cdot R=$$

$$=\left(2\pi-\frac{\pi}{n}\right)r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{n}\cdot R=\pi\left(2-\frac{1}{n}\right)r$$

$$\frac{R}{n}=\frac{2n-1}{n}\cdot r, \quad n\neq 0 \Rightarrow$$

$$R=(2n-1)r.$$

$$R-r=\frac{\pi}{n}\cdot R$$

$$R\left(1-\frac{\pi}{n}\right)=r$$

Беловик

$$R=(2n-1)R\left(1-\frac{\pi}{n}\right)$$

$$(2n-1)\left(1-\frac{\pi}{n}\right)=1$$

$$\Rightarrow \quad 2n-2\pi-1+\frac{\pi}{n}=1$$

$$2n-2\pi-2+\frac{\pi}{n}=0, \quad n\neq 0$$

$$2n^2-2\pi n-2n+\pi=0$$

$$2n^2-n(2\pi+2)+\pi=0$$

$$D=(2\pi+2)^2-4\cdot 2\cdot \pi=4\pi^2+8\pi+4-8\pi=$$

$$=4(\pi^2+1).$$

$$\Rightarrow n_1=\frac{2\pi+2+2\sqrt{\pi^2+1}}{4}=\frac{1}{2}+\frac{\pi+\sqrt{\pi^2+1}}{2}$$

$$n_2=\frac{1}{2}+\frac{\pi-\sqrt{\pi^2+1}}{2}, \text{ не подх, т.к.}$$

$$\cancel{\frac{\pi}{n}} \quad n\geq 1. \Rightarrow$$

$$\cancel{\smile BA=\frac{1}{2}+\frac{\pi+\sqrt{\pi^2+1}}{2}, \smile CD=2\pi}$$

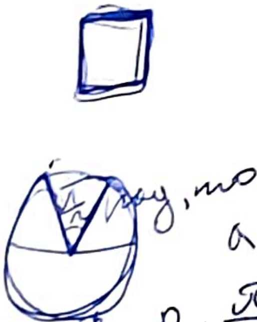
Ответ:

$$\smile BA=\frac{\pi}{\frac{\pi+1+\sqrt{\pi^2+1}}{2}}=\frac{2\pi}{1+\pi+\sqrt{\pi^2+1}}$$

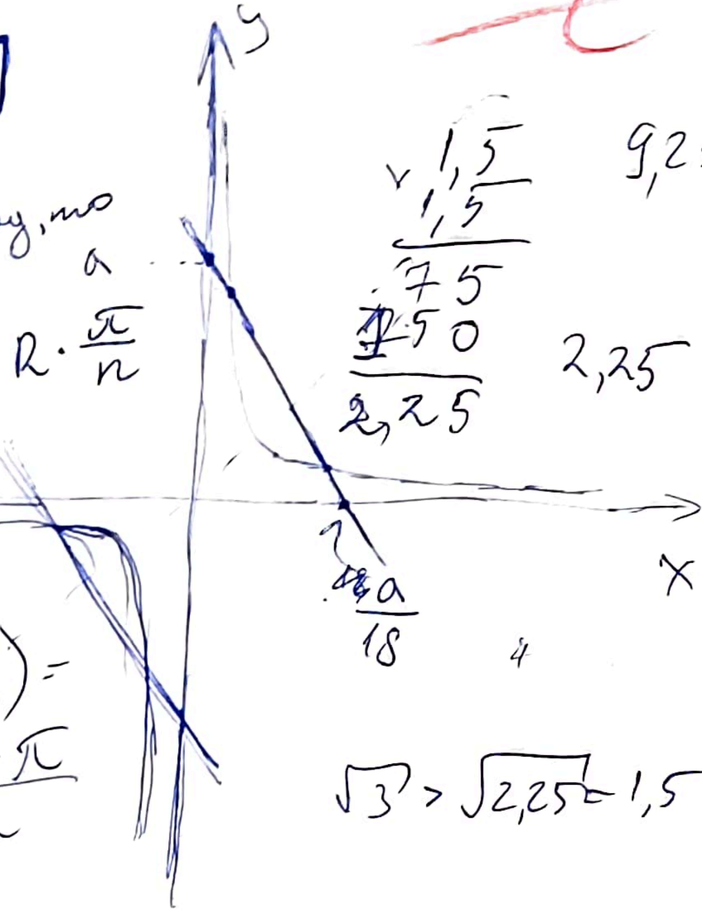
$$\smile CD=2\pi-\frac{\pi}{\frac{\pi+1+\sqrt{\pi^2+1}}{2}}=\frac{2\pi+2\pi^2+2\pi\sqrt{\pi^2+1}-2\pi}{1+\pi+\sqrt{\pi^2+1}}=$$

$$=\frac{2\pi^2+2\pi\sqrt{\pi^2+1}}{1+\pi+\sqrt{\pi^2+1}}$$

Черновик



2π рад $\quad R\cdot\frac{\pi}{n}$



$$\begin{array}{r} \times\ 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ \hline 75 \\ 150 \\ \hline 2{,}25 \end{array}$$

9,25

2,25

$R\frac{\pi}{n}$

$\frac{a}{18}$

$R\left(2\pi-\frac{\pi}{n}\right)=$

$=R\frac{2\pi n-\pi}{n}$

$\sqrt{3}>\sqrt{2{,}25}=1{,}5$

$$\sqrt{a^2+\frac{a^2}{18^2}}=\frac{(18^2+1)a^2}{18^2}=$$

$a+\sqrt{a^2-72}$

$$\frac{1}{x}=-18x+a$$

$$18x+\frac{1}{x}-a=0 \qquad x\neq0$$

$$18x^2-ax+1=0$$

$$D=a^2-4\cdot18=a^2-72$$

$$x_1=\frac{a+\sqrt{a^2-72}}{36} \qquad x_2=\frac{a-\sqrt{a^2-72}}{36}$$

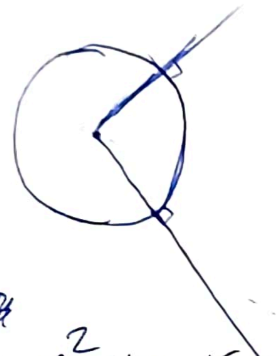
$$y=4\cdot\frac{a+\sqrt{a^2-72}}{2}+a$$

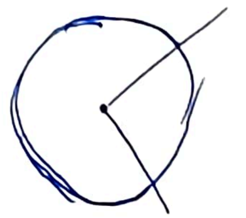
Черновик

$\sin(180-\alpha) = \sin 180^\circ \cos\alpha - \cos 180^\circ \sin\alpha$

$\sin(90-\alpha)$

$\alpha^2\pi + (360-360\pi)\alpha - 360\cdot 180 = 0$





$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$

$1 \quad 1 - 1 - 11 + 15 = 0$

$8 - 4 - 22 + 15$

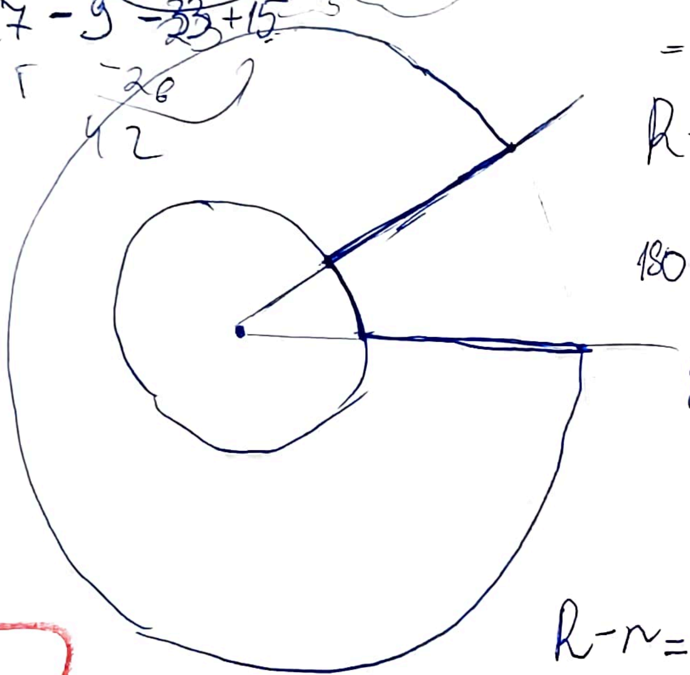
$3 \quad 27 - 9 - 33 + 15$

1,5

$360 - \alpha = \frac{180\alpha}{180+\alpha\pi}$

$(360-\alpha)(180+\alpha\pi) =$
$= 180\alpha$

$360\cdot 180 - 180\alpha + 360\alpha\pi - \alpha^2\pi =$
$= 180\alpha$



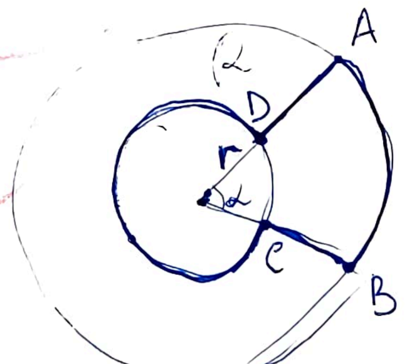
$R - r = \frac{\alpha\pi R}{180^\circ}$

$180R - 180r = \alpha\pi R$

$R = \frac{180r}{180+\alpha\pi}$

$R - r = \frac{\alpha\pi R}{180^\circ} =$

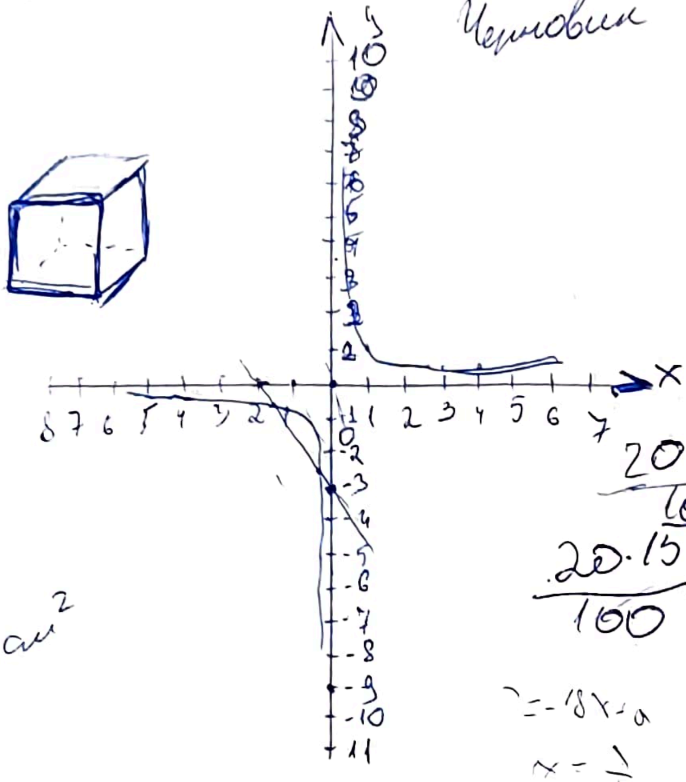
$= \frac{(360-\alpha)}{180}\pi r$



$(360-\alpha)r = \alpha R$

$(360-\alpha)r = \alpha\frac{180r}{180+\alpha\pi}$

Черновик



$$\frac{20 \cdot 15}{10} = 30$$

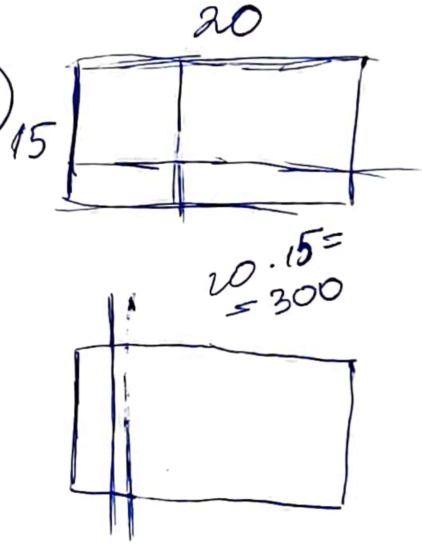
$$\frac{20 \cdot 15}{100} = 3$$

$33см^2$

$y = -18x + a$

$x = \frac{1}{18}$

Si



$(0; a)$; $\left(\frac{a}{18}; 0\right)$

$$\frac{1}{x} = -18x + a$$

$20 \cdot 15 = 300$

$$\frac{1}{x} + 18x - a = 0$$

$$\frac{18x^2 - ax + 1}{x} = 0$$

$$\frac{300}{33} =$$

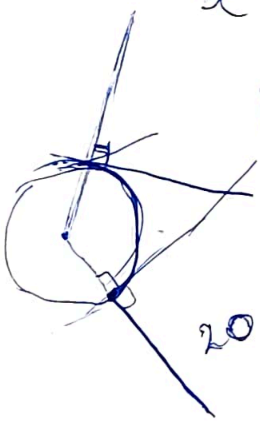
$18x^2 - ax + 1 = 0$

$D = a^2 - 4$

n

20

$20n + 1$



$20 \cdot 19 + 1$

19

Черновик

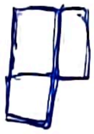
a, b

$2(a+b)=ab$

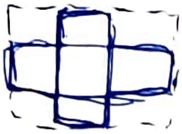
x, y $\quad 2(x+2)=2x$

$2=0$

$2(x+y)=xy$



$2x+2y=xy$ $\quad 3\cdot 2$



β $\quad 2y=xy-2x$

$4, 4$
$6, 3$

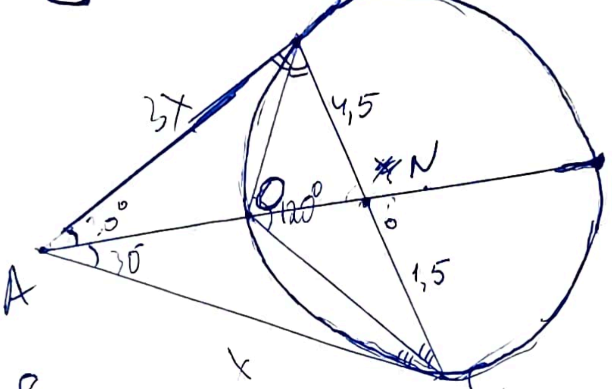
$\alpha \quad \gamma$

$x=\frac{2y}{y-2}$

$180-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}=180-\frac{\beta+\gamma}{2}=$

$=180-\frac{180-\alpha}{2}=$ $\quad 2y : y-2$

$=90+\frac{\alpha}{2}$



$R=\frac{6}{2\sin 120°}=$

$=\frac{6}{2\sin 60°}=\frac{6}{\sqrt{3}}=$

$=2\sqrt{3}$

$OM=4\sqrt{3}$

$S \geq \min(ab-xy)$

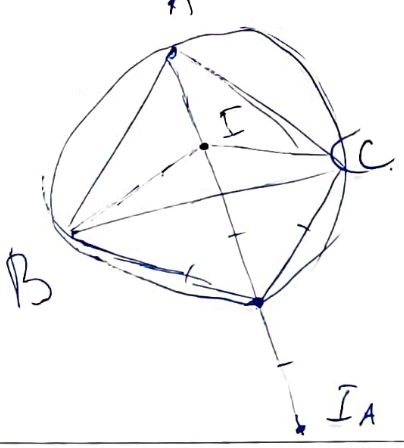
$\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1,5$

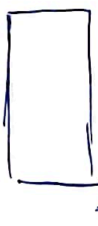
$\frac{BN}{NC}=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{1}$

$\frac{2y-4+4}{y-2}=2+\frac{4}{y-2}$

$1,5$

$ON\cdot OM=4,5\cdot 1,5$





$x=\frac{2y}{y-2}=$

$=\frac{2y-4+4}{y-2}=$

$=2+\frac{4}{y-2}$ $\quad y=3, y=4, y=6$

Черновик

$x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13$

$x^2 - x - 2 \geq 0$

$(x-2)(x+1) \geq 0$

$+ \quad -1 \quad - \quad 2 \quad +$

$x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

$x^3 - (x^2 - x - 2) = 12x - 13$

$x^3 - x^2 + x + 2 - 12x + 13 = 0$

$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$

$5 \quad 9$

$-1 \quad 1 \quad 11$

$-27 + 9 + 33 + 15$

$5 \quad 125 + 25 + 55 + 15$

$x^3 + x^2 - x - 2 - 12x + 13 = 0$

$x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0$

$x = 1$

$(x-1)(x^2 + 2x - 11) = 0$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + x^2 - 13x + 11 & x - 1 \\ \hline x^3 - x^2 & x^2 + 2x - 11 \\ \hline 2x^2 - 13x & \\ 2x^2 - 2x & \\ \hline -11x + 11 & \end{array}$$

$D = 4 + 44 = 48 = 4 \cdot 12 = 4 \cdot 4 \cdot 3$

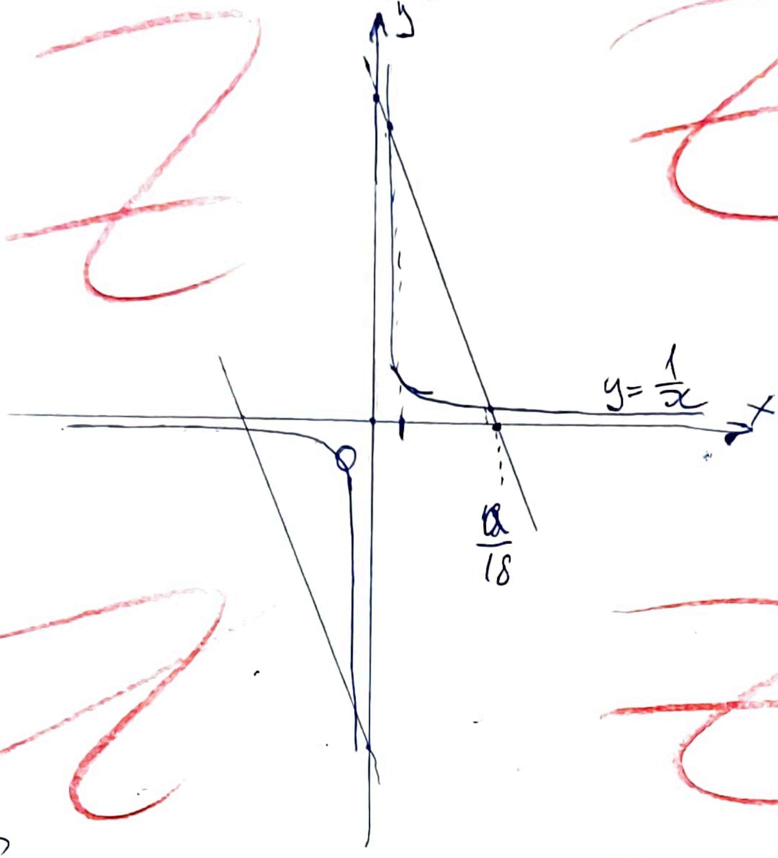
$x_1 = \frac{-2 + 4\sqrt{3}}{2} = -1 + 2\sqrt{3}$

$1 + 2\sqrt{3}$

17-15-62-77 (162.16)

Беловик:

№5



Решим для $a \geq 0$, для $a \leq 0$ будут корни (в силу симм. гиперболы) противоположные $a \geq 0$. ~~Т.к.~~ Мы можем легко найти точки пересечения ~~на~~ с х Оу. Это $(0;a)$ и $(\frac{a}{18};0)$. Т.к. нам нужно, чтобы были равны отрезки на одной ~~п~~ прямой, достаточно, чтобы их проекции на Ох были равны. Тогда точки пересечения с гиперболой должны быть в координатах $\frac{a}{6}, \frac{a}{12}, \frac{a}{18}$. Точки пересечения ~~их~~ найдём из уравнения:

$\frac{1}{x} = -18x + a$, $x \neq 0 \Rightarrow$

$18x^2 - ax + 1 = 0$.

Чистовик

$x^2+\frac{a}{18}x+\frac{1}{18}=0.$

Корни $x=\frac{a}{6}$, ~~a~~ и $\frac{a}{12}$. Тогда по теореме Виета:

$x_1\cdot x_2=9$

$\frac{a}{6}\cdot\frac{a}{12}=\frac{1}{18}$

$a\cdot a=\frac{6\cdot 12^{4}}{18^{3}}\Rightarrow$

$\Rightarrow a^2=4$, т.к. $a\geq 0$, то $a=2$.

при $a\leq 0$, $a=-2$.

Таким образом $a=\pm 2$.

Ответ: ± 2

№6.

Найдём кол-во всевозможных перестановок жуков после ~~броска~~, считая, что ~~бруклино~~ жуки разные. Получим:

$C_4^1\cdot C_4^1\cdot C_4^1\cdot C_4^1\cdot C_4^1\cdot C_4^1=\left(C_4^1\right)^6=4^6.$

Теперь рассмотрим сколько существует комбинаций, которые подходят. ~~Аналог~~

Все эти способы получаются одинаковыми, если мы отзеркалим или перевернём куб на другое ребро. Т.е всего удвоится кол способов:

$2\cdot 6=12$.

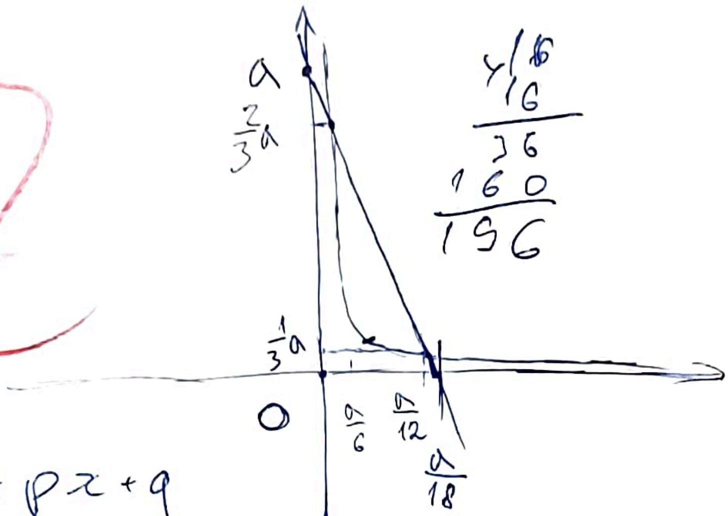
Чистовик:

$\Rightarrow P = \frac{12}{4^6} = \frac{3}{4^5} = \frac{3}{196}$

Ответ: $\frac{3}{196}$.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик



$\times\frac{16}{16}$

96

160

196

x^2+px+q

$x_1+x_2=\frac{-p+\sqrt{D}}{2}+\frac{p-\sqrt{D}}{2}=$

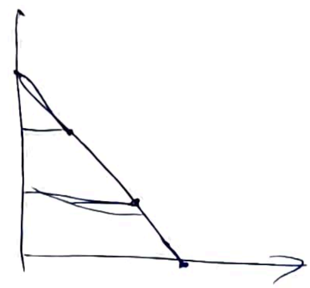
$=-p$

$\frac{1}{x}=-18x+a \quad x\neq 0$

$\cancel{x}1=-18x^2+ax$

$18x^2+\cancel{ax}-ax+1=0$

$D=a^2-4\cdot 18=a^2-72$ $\qquad a\geq 0$



$x_1=\frac{a+\sqrt{a^2-72}}{2}$

2

$x_2=\frac{a-\sqrt{a^2-72}}{2}$

$\frac{a-\sqrt{a^2-72}}{2}=\frac{a}{6} \quad |\cdot 6$

$\times\frac{18}{18}$

$3a-\sqrt{a^2-72}=a$

144 · 2

~~256~~

288

$2a=\sqrt{a^2-72}$

$a^2-4a-72=0$

$D=16+288=294$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!