0 841639 830008

84-16-39-83
(162.5)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Флегонтова Владимира Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
84-16-39-83		+	0	+	+	+	∓	0	0

84-16-39-83 (162.5)

Белоглазки фрешу

Черновик

65 (шестьдесят пять)

№1) [1,5; 2]

$$\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2} + \left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2 = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

$(\sqrt{2}+1)^2$ $(\sqrt{2}-1)^2$

$(1+\sqrt{2})^2 = 1+2\sqrt{2}+2 = 3+2\sqrt{2}$

D_f: $-(x-2) \geq 0$

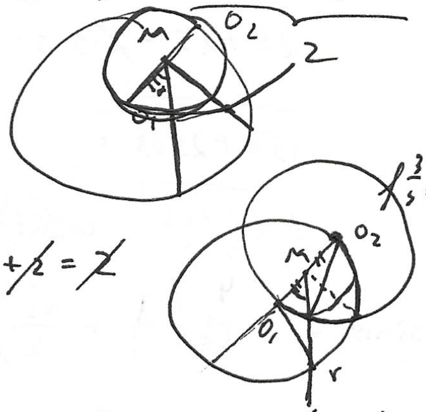
$x-2 \leq 0$

$x \leq 2$

$$|2x-3| + |x-3| + -(x-2) = \sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)$$

$x_0 = 1,5$ $x_0 = 3$ $|x-3| = 3-x$

$\underbrace{\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)}_{2}$



$f\downarrow$ $S\downarrow$

$|x-3| = x-3$, $x \geq 3$

$3-x$, $x<3$

$\frac{3}{5}$ $\frac{7}{4}$.

$|2x-3| + 3 - x - x + \cancel{2} = \cancel{2}$

$r + \frac{r}{2} = \frac{3r}{2}$

$|2x-3| = 2x-3.$

$\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}$

1) $x \leq 1,5$ $|2x-3| = 3-2x \iff -(2x-3) = 2x-3.$ $\frac{2-\sqrt{2}}{4-2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

$6=4x$ $(2x-3)\cdot 2 = 0$ $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \frac{3}{2}.$ $x = 1,5$ $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$

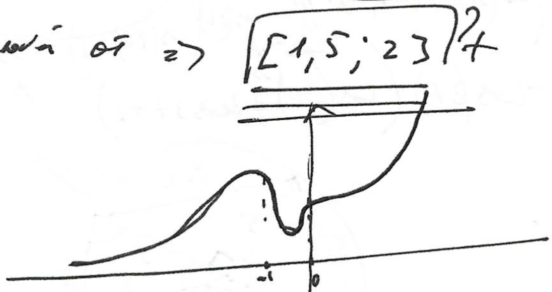
2) $x \geq 1,5$ $x \leq 2.$

$2x-3 = 2x-3$ x - любой от $\Rightarrow$ [1,5; 2] +

$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 2$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} + \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2$?? ++.



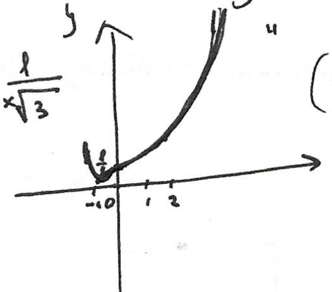
№2) $\min (a>0)$ нет решений $x>0$.

$3^{5-\frac{1}{x}} = \frac{3^5}{3^{\frac{1}{x}}}$.

$-\frac{1}{x}$ $x\uparrow$ $\frac{1}{x}\downarrow$ $-\frac{1}{x}\uparrow$ $3^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 4^x$

$\in[-1;1].$

$y = 3^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[x]{3}}$



$\left(-\frac{1}{x}\right)'$ $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{1}{3}$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$

$\ln(a)$ $\ln e = 1.$

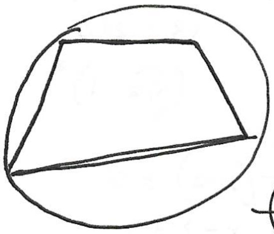
$y' =$

$(e^x)' = e^x$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

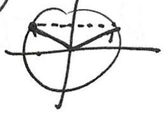
$3^{-\frac{1}{x}} \cdot \ln 3 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$ $\left(-1\cdot\frac{1}{x}\right)' =$ $x^{-1} =$

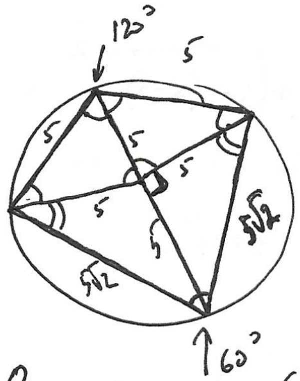
$-\frac{3^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \cdot \ln 3$

Черновик

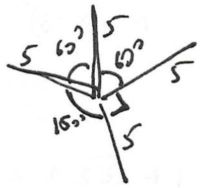


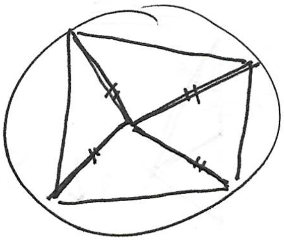
$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$





$12+90=210$





$x^3-y^3 =$

$(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$25+25-2\cdot 5\cdot 5\cdot \cos 150^\circ$

$-\cos 30^\circ$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{50+25\sqrt{3}} =$

$5\sqrt{2+\sqrt{3}}$ $\quad \cos(6t)=\cos(3t)-1$

Вер.

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2\sin 150^\circ =$ $\quad \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}$

$= \frac{25\sqrt{3}}{2}+\frac{25}{2}+\frac{25}{2}\cdot\frac{1}{2} =$ $\quad = \frac{\cos 3t+1}{2}$ $\quad \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{3t}{2}\right)^2-\cos\left(\frac{5t}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{3t}{2}\right)-$

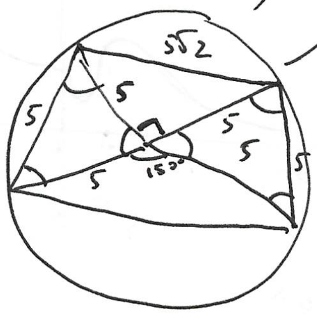
$\frac{50}{4}+\frac{25}{4}=\frac{75}{4}$ $\quad -\cos\left(\frac{13t}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{3t}{2}\right)$

$\frac{75}{4}+\frac{25\sqrt{3}}{2}$

$(\cos(3t)+1)(\cos(6t)+1))-\cos(2t)(\cos(3t)+1)-\cos(2t)(\cos(6t)+\cos(3t))$. $\quad \sin^3 x - \frac{\cos 4t+\cos t}{2}-\frac{\cos 5t+\cos t}{2}$

$\cos^2 3t$

$-\cos(2t)(\cos(6t)+2\cos 3t+1)$



~~$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$~~ ?

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

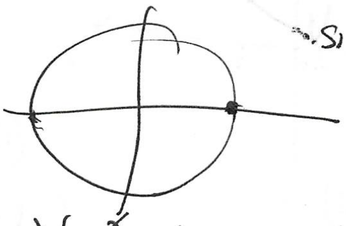
$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}$

$\frac{3\sin(\pi x)-\sin(3\pi x)}{4}-\frac{3\sin(2\pi x)-\sin(6\pi x)}{4}$

$$\frac{3\sin(\pi x)-3\sin(2\pi x)-\sin(3\pi x)+3\sin(4\pi x)+\sin(6\pi x)-\sin(8\pi x)}{4}$$

$\sin\alpha=0$

πk



$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3 =$

$a^3-b^3+c^3=(a-b+c)^3$

$(a-b+c)(a-b+c)(a-b+c)=(a-b+c)(a^2-ab+ac-ab+b^2-bc+ac-bc+c^2) =$

$=(a-b+c)(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac) =$

84-16-39-83 (162.5)

Черновик

$\cancel{a^3}+\cancel{ab^2}+\cancel{ac^2}-\cancel{2a^2b}-2abc+\cancel{2a^2c}-\cancel{a^2b}-\cancel{b^3}-\cancel{bc^2}+\cancel{2ab^2}+\cancel{2b^2c}-2abc+$
$+\cancel{a^2c}+\cancel{b^2c}+\cancel{c^3}-2abc-\cancel{2bc^2}+\cancel{2ac^2}=$

$= a^3-b^3+c^3+3ab^2+3ac^2-3bc^2-3a^2b+3a^2c+3b^2c-6abc=$

$=a^3-b^3+c^3$

$\sin\alpha+\sin\beta=$

$ab^2+ac^2-bc^2-a^2b+a^2c+b^2c=2abc.$

$\cos t+\cos 5t=$
$2\cos 3t\cdot\cos 2t+2\cos 6t\cdot\cos 2t.$

$\cos(x-y)+\cos(x+y)=\cos x\cos y.$

$\sin x+\sin y=$

$\sin(x-y)=\sin\cos y-\cos x\sin y.$

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$
$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\cdot\sin y.$
$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

$x+y=\alpha$
$x-y=\beta$
$2x=\alpha+\beta$
$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$
$y=\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\underset{\beta}{\cos(x-y)}-\underset{\alpha}{\cos(x+y)}=2\sin x\cdot\sin y$

$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y.$
$\alpha \qquad \beta \qquad 2\cos x\sin y.$

$2\cdot\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right)\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$
$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$

$\pi x=t$

$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\alpha\sin\beta$

$ab(b-a)+ac(a+c)-bc(c-b)=2abc$

$\pi x \quad 4\pi x$

$\sin 2\pi x-\sin\pi x$

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$
$\cos^2\alpha=\frac{\cos 2x+1}{2}$

$\sin(\pi x)\sin(2\pi x)\cdot\cancel{2}\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right)\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)+\sin(\pi x)\cdot\sin(4\pi x)\cdot\cancel{2}\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)-$

$-\sin(2\pi x)\sin(4\pi x)\cdot\cancel{2}\cos(3\pi x)\cdot\sin(\pi x).=\cancel{2}\sin(\pi x)\sin(2\pi x)\sin(4\pi x).$

$\sin(\pi x)\left(\sin(2\pi x)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)+\sin(4\pi x)\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)-\sin(2\pi x)\sin(4\pi x)\cdot\cos(3\pi x)-\right.$

$\left.-\sin(2\pi x)\cdot\sin(4\pi x)\right)=0.$

$\underbrace{\sin(2t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{3t}{2}\right)}+\sin(4t)\sin\left(\frac{5t}{2}\right)\cos\left(\frac{3t}{2}\right)-\underbrace{\sin(2t)\sin(4t)\cos(3t)-\sin(2t)\sin(4t)}$

$\frac{\cos\left(\frac{3t}{2}\right)-\cos\left(\frac{5t}{2}\right)}{2}\cdot\cos\frac{3t}{2}+\frac{\cos\frac{3t}{2}-\cos\left(\frac{13}{2}t\right)}{2}\cos\frac{3t}{2}$

$\sin(2t)\sin(4t)(\cos(3t)+1).$
$\frac{\cos 2t-\cos 6t}{2}$

Чистовик

№1) $\sqrt{4x^2-12x+9} + \sqrt{x^2-6x+9} + \left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2 = \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}$.

$\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2} + \left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2 = \sqrt{3+2\sqrt2} - \sqrt{3-2\sqrt2}$.

Данное выражение определено тогда и только тогда, когда выполняется следующая система:

$\begin{cases} (2x-3)^2 \geq 0 \to И. \\ (x-3)^2 \geq 0 \to И \\ -(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x \leq 2.}$

$|2x-3| + |x-3| + (-(x-2)) = \sqrt{(\sqrt2+1)^2} - \sqrt{(\sqrt2-1)^2}$

При $x \leq 2$: $|x-3| = 3-x$.

Получаем: $|2x-3| + 3 - x - x + \cancel{2} = \cancel{\sqrt2} + \cancel{1} - \cancel{\sqrt2} + \cancel{1}$

$|2x-3| - (2x-3) = 0 \Leftrightarrow 2x-3 = |2x-3|$.

1) $x < 1,5$: $|2x-3| = 3-2x$. Получаем $2x-3 = 3-2x \Leftrightarrow x = 1,5$. не уд $x < 1,5$.

2) $x \geq 1,5$ (но $x \leq 2$). $|2x-3| = 2x-3$.
Отсюда: $2x-3 = 2x-3 \to$ Истина. $0=0$.

Значит $x \in [1,5; 2]$.

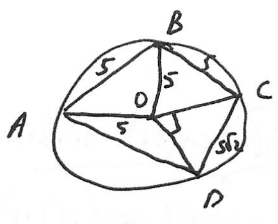
Ответ: $\underline{[1,5; 2]}$.

№3) Рассмотрим два случая:

#1) Когда известные стороны 5 и 5 находятся рядом;

#2) Когда известные стороны 5 и 5 противоположны;

①



Пусть $|AB| = |BC| = |AO| = r = 5$

$|CD| = 5\sqrt2$.

Тогда $\triangle AOB = \triangle COD$ и они равносторонние.

А $\triangle COD$ - прямоугольный тк $|CO|^2 + |OD|^2 = |CD|^2$.

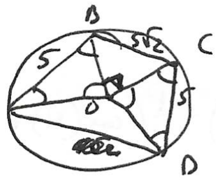
Тогда $\overset{\frown}{AOD} = 360° - 90° - 60° - 60° = 150°$ (тк $\overset{\frown}{AOB} = \overset{\frown}{BOC} = 60°$ и $\overset{\frown}{COD} = 90°$)

Чистовик

Откуда: $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} =$

$= \frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5 + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \underbrace{\sin(150^\circ)}_{\frac{1}{2}} = \frac{25\sqrt{3}}{2} + \frac{75}{4}.$

Либо #2:



Пусть $|AB| = |CD| = |AO| = r = 5$. $|BC| = 5\sqrt{2}$.

Аналогично п. 1: $\overset{\frown}{AOB} = \overset{\frown}{COD} = 60^\circ$ и $\overset{\frown}{BOC} = 90^\circ$. Тогда $\overset{\frown}{AOD} = 150^\circ$.

$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} = \frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5 + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \sin(150^\circ) =$

$= \frac{25\sqrt{3}}{2} + \frac{75}{4}.$

Ответ: $\frac{25\sqrt{3}}{2} + \frac{75}{4}$.

№4) $\sin^3(\pi x) - \sin^3(2\pi x) + \sin^3(4\pi x) = (\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x))^3.$

Пусть $\pi x = t$. $\sin(t) = a$
$\sin(2t) = b$
$\sin(4t) = c$.

Рассмотрим: $(a-b+c)^3 = a^3 - b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 - 3bc^2 - 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c - 6abc$. Это, в свою очередь, равно $a^3 - b^3 + c^3$.

Получаем: $ab^2 + ac^2 - bc^2 - a^2b + a^2c + b^2c - 2abc = 0$. (сократили на 3)

$ab(b-a) + ac(a+c) - bc(c-b) - 2abc = 0.$

$\sin(2t) - \sin(t) = 2\cos\left(\frac{3}{2}t\right)\sin\left(\frac{1}{2}t\right)$

$\sin(t) + \sin(4t) = 2\sin\left(\frac{5t}{2}\right)\cos\left(\frac{3t}{2}\right)$

$\sin(4t) - \sin(2t) = 2\cos(3t)\sin(t).$

Тогда получаем: $\sin(t)\sin(2t)\cdot\cancel{2}\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) + \sin(t)\sin(4t)\cdot\cancel{2}\sin\left(\frac{5t}{2}\right)\cos\left(\frac{3t}{2}\right)$
$- \sin(2t)\sin(4t)\cancel{2}\cos(3t)\sin(t) - \cancel{2}\sin(t)\sin(2t)\sin(4t) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(t)\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin(2t)\cos\left(\frac{3t}{2}\right) + \sin\left(\frac{5t}{2}\right)\sin(4t)\cos\left(\frac{3t}{2}\right) - \sin(2t)\sin(4t)\cos(3t) -\right.$
$\left.- \sin(2t)\cdot\sin(4t)\right) = 0.$

$\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\sin(2t) = \frac{\cos\left(\frac{3t}{2}\right) - \cos\left(\frac{5t}{2}\right)}{2}$; $\sin\left(\frac{5t}{2}\right)\cdot\sin(4t) = \frac{\cos\left(\frac{3t}{2}\right) - \cos\left(\frac{13}{2}t\right)}{2}$

Чистовик

$$\sin(2t)\cdot\sin(4t)=\frac{\cos(2t)-\cos(6t)}{2};$$

Получаем: $\sin(t)\left(\left(\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right)^2-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{5t}{2}\right)-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{13t}{2}\right)-\right.$

$\left.-\frac{1}{2}(\cos(2t)-\cos(6t))(\cos(3t)+1)\right)=0.$

$$\cos^2\left(\frac{3t}{2}\right)=\frac{\cos(3t)+1}{2}.$$

Получаем $\sin(t)\left(\cos(3t)+1-\frac{1}{2}(\cos(4t)+\cos(t))-\frac{1}{2}(\cos(8t)+\cos(5t))-\right.$

$\left.-(\cos(2t)-\cos(6t))(\cos(3t)+1)\right)=0.$

$$\sin(t)\left((\cos(3t)+1)(1-\cos(2t)+\cos(6t))-\frac{1}{2}(\cos(t)+\cos(4t)+\cos(5t)+\cos(8t))\right)=0$$

$$\sin(t)\left((\cos(3t)+1)(1-\cos(2t)+\cos(6t))-\frac{1}{2}(2\cos(2t)\cdot\cos(3t)+2\cos(6t)\cos(2t))\right)=0.$$

$$\sin(t)\left(\cos(3t)-\cos(3t)\cos(2t)+\cos(3t)\cdot\cos(6t)+1-\cos(2t)+\cos(6t)-\cos(2t)\cdot\cos(3t)-\cos(2t)\cdot\cos(6t)\right)=0.$$

$$\sin(t)\left((\cos(3t)+1)(\cos(6t)+1)-\cos(2t)(\underbrace{\cos(6t)}_{2\cos^2(3t)-1}+2\cos(3t)+1)\right)=0.$$

$$\sin(t)\left((\cos(3t)+1)(\cos(6t)+1)-\cos(2t)(\underbrace{2\cos^2(3t)+2\cos(3t)}_{2\cos(3t)(\cos(3t)+1)})\right)=0.$$

(*)

$$\sin(t)(\cos(3t)+1)(\underbrace{\cos(6t)+1}_{2\cos^2(3t)-1}-2\underbrace{\cos(2t)\cos(3t)}_{\cancel{\frac{1}{2}(\cos(t)+\cos(5t))}})=0.$$

$\cancel{(*)\Leftrightarrow\cos(6t)-\cos(5t)-\cos(t)+1=0}.$

Получаем: $\sin(t)(\cos(3t)+1)\cdot 2\cos(3t)(\underbrace{\cos(3t)-\cos(2t)}_{2\sin\left(\frac{5t}{2}\right)\cdot\sin\left(-\frac{t}{2}\right)})=0$

Итого: $-4\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin(t)\cdot\sin\left(\frac{5t}{2}\right)\cos(3t)\cdot(\cos(3t)+1)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0\\ \sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)=0\\ \sin(\pi x)=0\\ \cos(3\pi x)=0\\ \cos(3\pi x)=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{\pi x}{2}=\pi k_1,\ k_1\in\mathbb{Z}\\ \frac{5\pi x}{2}=\pi k_2,\ k_2\in\mathbb{Z}\\ \pi x=\pi k_3,\ k_3\in\mathbb{Z}\\ 3\pi x=\frac{\pi}{2}+\pi k_4,\ k_4\in\mathbb{Z}\\ 3\pi x=\pi+2\pi k_5,\ k_5\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик;

$$\left[\begin{array}{ll} x = 2k_1, \ k_1 \in \mathbb{Z} & (1) \\ x = \frac{2}{5}k_2, \ k_2 \in \mathbb{Z} & (2) \\ x = k_3, \ k_3 \in \mathbb{Z} & (3) \\ x = \frac{1}{6} + \frac{k_4}{3}, \ k_4 \in \mathbb{Z} & (4) \\ x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}k_5, \ k_5 \in \mathbb{Z} & (5) \end{array}\right.$$

Ищем на отрезке $[\frac{3}{10}; 1,6]$.

(1) нет таких k_1

(2) $x \in \{0,4; 0,8; 1,2; 1,6\}$;

(3) $x \in \{1\}$;

(4) $x \in \{\frac{1}{2}; \frac{5}{6}; \frac{7}{6}; 1,5\}$

(5) $x \in \{\frac{1}{3}; 1\}$.

уже есть

Ответ: $\{\frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; 1; \frac{7}{6}; 1\frac{1}{5}; 1\frac{1}{2}; 1\frac{3}{5}\}$;

№5

Так как $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$ при любых x, то можем записать следующую систему:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3, \\ a_1b_1 + 6 = a_2b_2 + 8 = a_3b_3 + 12, \\ 6a_1 = 8a_2 = 12a_3 \quad ; \quad (3) \end{cases}$$

Из (3): $a_1 = \frac{4}{3}a_2 = 2a_3$.

(1) Рассмотрим $a_1 + b_1 = a_3 + b_3 \Leftrightarrow 2a_3 + b_1 = a_3 + b_3 \Leftrightarrow b_3 - b_1 = a_3$.

$a_1b_1 + 6 = a_3b_3 + 12 \Leftrightarrow 2a_3b_1 - a_3b_3 - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_3^2 - a_3b_1 + 6 = 0$.

$D = b_1^2 - 24$. $\Leftrightarrow a_3 = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 24}}{2}$.

$D \geq 0$.

(2) Рассмотрим $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 \Leftrightarrow \frac{4}{3}a_2 + b_1 = a_2 + b_2 \Leftrightarrow b_2 - b_1 = \frac{1}{3}a_2$.

$a_1b_1 + 6 = a_2b_2 + 8 \Leftrightarrow \frac{4}{3}a_2b_1 - a_2b_2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}a_2^2 - \frac{1}{3}a_2b_1 + 2 = 0 \Leftrightarrow a_2^2 - a_2b_1 + 6 = 0$.

$a_2 = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 24}}{2}$.

По условию все a и b положительные, а также видим, что $a_2 > a_3$. (из (3))

Значит $a_3 = \frac{b_1 - \sqrt{b_1^2 - 24}}{2}$, а $a_2 = \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 24}}{2}$.

Чистовик

$a_2 = \frac{3}{2}a_3 \Leftrightarrow \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 24}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{b_1 - \sqrt{b_1^2-24}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2b_1 + 2\sqrt{b_1^2-24} = 3b_1 - 3\sqrt{b_1^2-24} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{b_1^2-24} = b_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1}{5} \geq 0, \\ b_1^2 - 24 = \frac{b_1^2}{25}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \geq 0, \\ 25b_1^2 - b_1^2 = 24 \cdot 25; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \geq 0, \\ 24b_1^2 = 24 \cdot 25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} b_1 = 5 \\ b_1 = -5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow b_1 = 5.$

Отсюда: $a_2 = 3$; $a_3 = 2$; $a_1 = 4$

$b_2 = 6$; $b_3 = 7$; $b_1 = 5$

Проверка: $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 \to$ И.

$\underbrace{a_1 b_1}_{20} + 6 = \underbrace{a_2 b_2}_{18} + 8 = \underbrace{a_3 b_3}_{14} + 12 \to$ И.

$a_1 = \frac{4}{3}a_2 = 2a_3 \to$ И.

Значит искомая сумма $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 = \underline{27}$.

Ответ: $\underline{\underline{27}}$.

84-16-39-53 (162.5)

$\frac{243}{x\sqrt{3}} \geq a+\sin 4^x$

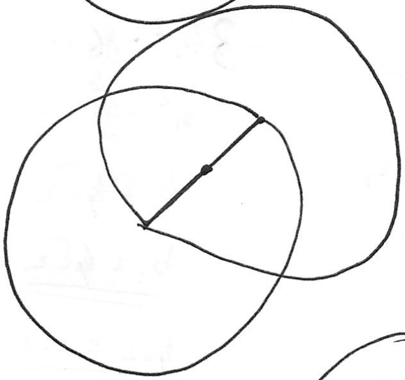
Черновик

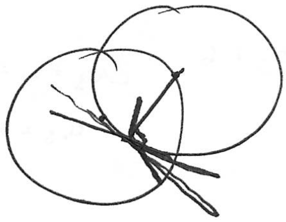
$\sqrt{r^2-\frac{r^2}{4}} = \frac{r\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = r\sqrt{3}$

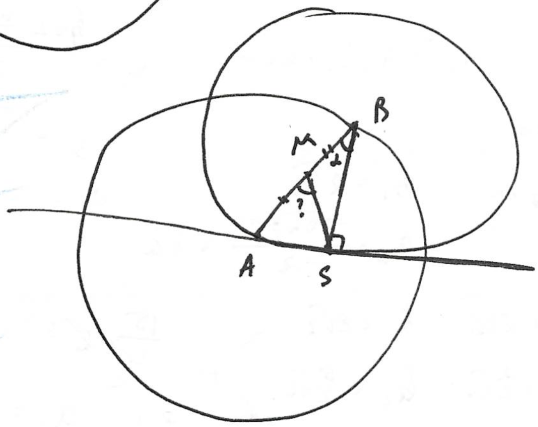
$\frac{3r}{2} \vee r\sqrt{3}$

$3 \vee 2\sqrt{3}$

$9 < 12$







a

$2a_3(b_3-a_3)+6 = a_3b_3+12$

$a_3b_3-2a_3^2-6=0$

$2a_3^2-a_3b_3+6=0.$

$a_3 =$

$(x+a)(x^2+bx+c) = x^3+bx^2+cx+ax^2+abx+ac$

$x^3+(a+b)x^2+x(ab+c)+ac = \quad S = 3(a_1+b_1)$

Получим: $a_1+b_1 = a_2+b_2 = a_3+b_3$

$a_1b_1+6 = a_2b_2+8 = a_3b_3+12$

$a_1+b_1 = S_1 \quad ab_{1,2} = p_1$

$6a_1 = 8a_2$

$a_1 =$

$(f_1-f_2)x^2+a_1b_1$

$(S_1-S_2)x^2+(p_1-p_2-2)x+6a_1-8a_2=0.$

Для любого x.

$a_1+b_1 =$

$6a_1 = 8a_2$

$a_1 = \frac{4}{3}a_2$

$6a_1 = 12a_3 \quad a_1 = 2a_3$

$a_1 = \frac{4}{3}a_2 = 2a_3$

$8a_2 = 12a_3$

$a_2 = \frac{3}{2}a_3$

$2a_3+b_1 = a_3+b_3$

$a_3+b_1 = b_3.$

$b_1 = b_3-a_3.$

Черновик

$a_1+b_1=a_2+b_2=a_3+b_3$

$a_1b_1+6=a_2b_2+8=a_3b_3+12$

$a_1=\frac{4}{3}a_2=2a_3.$

$a_2=\frac{3}{2}a_3.$

$2a_3b_1+6=\frac{3}{2}a_3b_2+8$

$a_1b_1=a_2b_2+2=a_3b_3+6$

$2a_3b_1=a_3b_3+6$

$(2b_1-b_3)\cdot a_3=6.$

$(b_1-(b_3-b_1))a_3=6$

$-a_3^2+a_3b_1-6=0$

$D=b_1^2-24=0$

$b_3=1$

$b_1=1.$

$2a_3b_1=a_3+12$

$a_3(2b_1-1)=12$

$a_3=12$

$a_1=2\cdot a_3=24$

$2a_3+b_1=a_3+b_3$

$a_3=b_3-b_1$

$a_3^2-a_3b_1+6=0.$

$b_1=2\sqrt6$

$a_3=\frac{-2\sqrt6\pm0}{-2}=\sqrt6$

$\sqrt{b_1^2-24}=\frac{b_1}{2}<=1$

$\begin{cases} b_1\geq0 \\ b_1^2-24=\frac{b_1^2}{4}\end{cases}$

$3b_1^2-96=0$

$b_1^2-32=0$

$b_1=\pm4\sqrt2$

$b_1=4\sqrt2$

$a_3=\frac{4\sqrt2\pm2\sqrt2}{2}$

$a_3=\sqrt2$

$a_2=3\sqrt2$

$a_1b_1=24$

$30=$

$a_1=2\sqrt6.\quad b_1=2\sqrt6$

$a_2=\frac{3}{2}\sqrt6\quad b_2=\frac{5}{2}\sqrt6.$

$a_3=\sqrt6\quad b_3=3\sqrt6$

$+\ \frac{15}{2}$

$+8\quad a_1=$

$18+12$

$a_3=\frac{b_1\pm\sqrt{b_1^2-24}}{2}$

$a_3\geq0$

$\cancel{2}a_3+b_1=\cancel{a_3}+b_3$

$b_3=\frac{b_1+\sqrt{b_1^2-24}}{2}$ или $\frac{3b_1+\sqrt{b_1^2-24}}{2}.$

$a_1b_1=a_2b_2+2$

$\frac{4}{3}a_2+b_1=a_2+b_2$

$\frac{1}{3}a_2+b_1=b_2$

$a_2(\frac{4}{3}b_1-b_2)=2.$

$a_2(\frac{1}{3}b_1+(b_1-b_2))=2$

$-\frac{1}{3}a_2$

$-\frac{1}{3}a_2^2+\frac{1}{3}b_1a_2-2=0$

$\frac{1}{3}a_2^2-\frac{1}{3}b_1a_2+2=0$

$a_2^2-b_1a_2+6=0$

a_2

$a_3=\frac{b_1-\sqrt{b_1^2-24}}{2}$

$a_2=\frac{b_1+\sqrt{b_1^2-24}}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{b_1-\sqrt{b_1^2-24}}{2}$

$b_1+\sqrt{\ }=3b_1-3\sqrt{\ }$

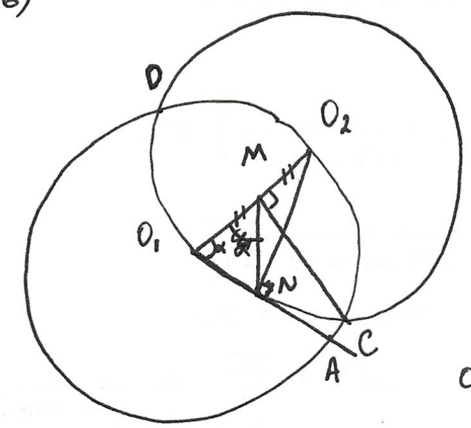
$4\sqrt{\ }=2b_1$

$\sqrt{\ }=\frac{b_1}{2}$

84-16-39-83 (162.5)

Чистовик

№6)



Так как мышь бежит с постоянной скоростью, а котенок чуть или немного меньше, необходимо минимизировать путь мышки до норы. (Можно считать, что когда мышь бежит в зоне где действуют обе комнаты расстояние в этой области „увеличивается" (в нашей голове)).

Рассмотрим сначала два крайних случая: 1) мышь бежит до $\cdot C$ в $\cdot M$
2) мышь бежит до $\cdot O_1$ (одна комната), потом от $\cdot O_1$ до M.

1) $|CM| = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, но CM - зона двух комнат, поэтому ~~расстояние~~ будет котенок считать как будто она пробежала $r\sqrt{3}$.

2) Здесь путь равен $r + \frac{r}{2} \cdot \underset{\text{т.к. 2 комнаты}}{2} = 2r$.

То есть минимальный путь уже $\frac{r\sqrt{3}}{2}$ (котенок считает, как за $r\sqrt{3}$).

Возьмем какую-то точку N на дуге O_1C. Пусть наш путь проходит через эту точку. Тогда расстояние S, которое пройдет мышка будет $S = |AN| + |NM|$. А котенок считает, как за $S_{кот} = |AN| + 2 \cdot |NM|$.

Где $|AN|$ - отрезок прямой (AO_1). ~~касательной к окружности $\omega_2(O_2; r)$ в точку N.~~

Необходимо минимизировать $S(N)$.

Введем угол α, ~~$\alpha = O_1AN$~~, так она однозначно задает $\cdot N$. $\alpha = \angle MO_1N$, $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$\triangle O_1O_2N$ - р/б, т.к. O_2O_1 и O_2N - радиусы. Тогда $\angle O_1O_2N = 180^\circ - 2\alpha$.

$|O_1N| = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha)} = \sqrt{2r^2 + 2r^2 \cos 2\alpha} = \sqrt{2r^2 + 4r^2\cos^2\alpha - 2r^2} = 2r\cos\alpha$.

($\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$)

$|MN| = \sqrt{4r^2\cos^2\alpha + \frac{r^2}{4} + 2 \cdot \frac{r}{2} \cdot 2r\cos\alpha \cdot \cos\alpha} = \sqrt{6r^2\cos^2\alpha + \frac{r^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{24\cos^2\alpha + 1}$

$|AN| = r - |O_1N| = r - 2r\cos\alpha$.

Тогда $S(\alpha) = |AN| + |MN| = r - 2r\cos\alpha + \frac{r}{2}\sqrt{24\cos^2\alpha + 1}$.

Чистовик

$$S'(\alpha) = 2r\sin\alpha + \frac{r}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{24\cos^2\alpha+1}}\cdot 24\cdot\cancel{2}\cdot(-\sin\alpha) =$$

$$= 2r\sin\alpha - \frac{12r\sin\alpha}{\sqrt{24\cos^2\alpha+1}} = 2r\sin\alpha\left(1-\frac{6}{\sqrt{24\cos^2\alpha+1}}\right) = 0.$$

Корень $\sin\alpha = 0$ (т.е. $\alpha = 0$) либо $\sqrt{24\cos^2\alpha+1} = 6$

$24\cos^2\alpha + 1 = 36$

$\cos^2\alpha = \frac{35}{24}$. Т.к. $\cos\alpha > 0$. угол острый.

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{35}{24}}$ ($\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$)

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{35}\cdot\sqrt{6}}{12}.$$

Тогда $|MN| = 3r$; $|AN| = r - 2r\cdot\frac{\sqrt{35}\cdot\sqrt{6}}{12}$.

$S = |MN| + |AN|$.