



58-70-84-72
(161.38)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов 2025
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Удбина Вячеслав Олегович
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

ВУ

№1. 65 (шестьдесят пять)

Истовик

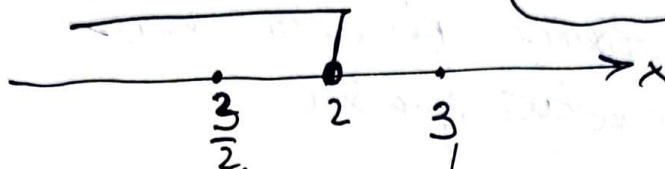
$$\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2} + (\sqrt{-(x-2)^2})^2 = \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$-(x-2) \geq 0.$$

$$-x+2 \geq 0.$$

$$x \leq 2.$$

$$|2x-3| + |x-3| - (x-2) = \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}} = A$$



$$2x-3$$

$$x-3$$

$$1. x \leq \frac{3}{2}.$$

$$-2x+3 - x+3 - x+2 = A$$

$$-4x+8 = A.$$

$$3. x > 3.$$

$$2x-3 + x-3 - x+2 = A.$$

$$2x-4 = A.$$

$$A^2 = 3+\sqrt{8} + 3-\sqrt{8} - 2\sqrt{(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})} = 6 - 2\sqrt{9-8} = 4.$$

$$A = \pm 2, \text{ но } A > 0, \text{ т.к. } \sqrt{3+\sqrt{8}} > \sqrt{3-\sqrt{8}} \Rightarrow A = 2.$$

$$1. x \leq \frac{3}{2}.$$

$$-4x+8 = 2.$$

$$6 = 4x.$$

$$x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$2. \frac{3}{2} < x \leq 3.$$

$$2 = 2.$$

$$x \in \left(\frac{3}{2}; 3\right].$$

$$3. x > 3.$$

$$2x-4 = 2.$$

$$2x = 6.$$

$$x = 3. \text{ не удовн. } x > 3.$$

$$x \in [1.5; 3], \text{ но } x \leq 2.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$$

N2.

$$3^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 4^x$$

чистовик

$$0 \leq 4^x \leq 1$$

$$|4^x| \leq 1$$

$$x \leq 0$$

$$x < 0$$

$$\log_4 x \leq \log_4 1$$

$$x \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$x \leq 0$$

Нужно найти, когда нет решений $x > 0$, но $x \leq 0 \Rightarrow$
единств. возможное решение $x = 0$.
неравенство выполняется при $x < 0$.

$$x \neq 0$$

При $x > 0$.

$$\sin 4^x > 1$$

$$0 < \frac{1}{x} < \infty$$

$$-\infty < -\frac{1}{x} < 0$$

$$-\infty < 5 - \frac{1}{x} < 5$$

$$0 < 3^{5-\frac{1}{x}} < 3^5 = 243$$

$$-1 \leq \sin 4^x \leq 1$$

$$a-1 \leq a + \sin 4^x \leq a+1$$

Чтобы неравенство не имело решений при $x > 0$, то $g(x) < \min f(x)$.

$$g(x) = 3^{5-\frac{1}{x}}$$

$$f(x) = a + \sin 4^x$$

$g(x)$ не достигает 243.

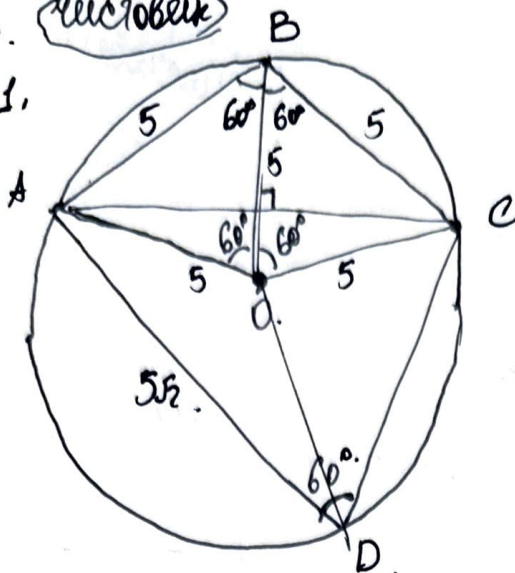
$$243 \leq a-1$$

$$a \geq 244$$

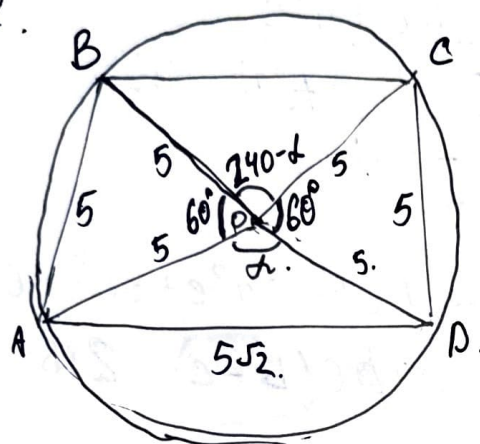
Ответ: $a = 244$.

№3. Число

1.



2.



1.

 $R=5.$

$$AO=BO=CO=R=5. \Rightarrow$$

 $\triangle AOB - \text{p.c.}$
 $\triangle BOC - \text{p.c.}$

$$\Rightarrow \angle ABC = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$$

(вписанный четырехугольник)

$$\angle ACD = 180^\circ - \angle ABC = 60^\circ$$

 По т. косинусов в $\triangle ABC$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ$$

$$AC^2 = 25 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 75.$$

$$AC = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}.$$

 По т. косинусов в $\triangle ACD$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \frac{1}{2}$$

$$75 = 50 + CD^2 - 5\sqrt{2} \cdot CD \cdot \frac{1}{2}$$

$$CD^2 - 5\sqrt{2} \cdot CD - 25 = 0.$$

$$D = 50 + 4 \cdot 25 = 150 = 25 \cdot 6.$$

$$CD = 5\sqrt{2} \pm 5\sqrt{6}.$$

$$CD = \frac{5\sqrt{2} + 5\sqrt{6}}{2} = \frac{5\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3}}{4 \cdot 5} = \frac{25\sqrt{3}}{4}.$$

$$S_{ACD} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot \frac{5\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2}}{4 \cdot 5} = \frac{25 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}+3)}{4} = \frac{50\sqrt{3}}{4} + \frac{150}{4}.$$

$$S_1 = \frac{75\sqrt{3}}{4} + \frac{150}{4} = \frac{75(\sqrt{3}+2)}{4}.$$

$$2. S_{ABO} = \frac{25\sqrt{3}}{4} = S_{COD}.$$

 По т. косинусов в $\triangle AOD$

$$\cos \alpha = \frac{50 - 25 - 25}{2 \cdot 5 \cdot 5} = 0. \Rightarrow \alpha = 90^\circ.$$

$$S_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OD \cdot \sin \alpha = \frac{25}{2} = \frac{50}{4}.$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot OC \cdot \sin(240^\circ - \alpha) = \frac{25}{2} \cdot \sin 150^\circ = \frac{25}{4}.$$

$$S_2 = \frac{50\sqrt{3}}{4} + \frac{75}{4}$$

$$S_1 > S_2.$$

$$\text{ответ: } \frac{75(53+2)}{4}.$$

числовик

N4

$$\sin(\pi x) = a$$

$$|a| \leq 1$$

$$\sin(2\pi x) = b$$

$$|b| \leq 1$$

$$\sin(4\pi x) = c$$

$$|c| \leq 1$$

$$\begin{aligned} (a-b+c)^3 &= (a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc)(a-b+c) = \\ &= \underbrace{a^3 + ab^2 + ac^2 - 2a^2b + 2a^2c - 2ab^2c - ba^2 - b^3 - bc^2}_{+2abc + 2ab^2 - 2ab^2c + 2b^2c + a^2c + b^2c + c^3 - 2abc + 2ac^2 - 2bc^2} = \underbrace{a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 - 3ba^2 - 3bc^2}_{+3a^2c + 3b^2c - 6abc}. \end{aligned}$$

$$a^3 - b^3 + c^3 = (a-b+c)^3.$$

$$3ab^2 + 3ac^2 - 3ba^2 - 3bc^2 + 3a^2c + 3b^2c - 6abc = 0.$$

$$ab(b-a) + ac(c+a) + bc(b-c) = 2abc.$$

$$\frac{b-a}{c} + \frac{c+a}{b} + \frac{b-c}{a} = 2.$$

числовик

похо
на 1

$$\begin{aligned} 1. \quad &b=1 \\ &a=-1 \\ &c=1. \end{aligned}$$

$$1+0+0 \neq 2.$$

$$\begin{aligned} 2. \quad &a=1 \\ &b=-1 \\ &c=1. \end{aligned}$$

$$-\frac{1-1}{1} + \frac{1+1}{1} + \frac{-1-1}{1} = -2+2-2 = -2.$$

$$\begin{aligned} 3. \quad &a=1 \\ &b=1 \\ &c=-1. \end{aligned}$$

$$\frac{1-1}{-1} + \frac{-1+1}{1} + \frac{1+1}{1} = 2.$$

$$\begin{cases} \sin(\pi x) = 1 \\ \sin(2\pi x) = 1 \\ \sin(4\pi x) = -1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \\ 2\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \\ 4\pi x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{1}{4} + k, k \in \mathbb{Z}. \\ x = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}t, t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$0,5; 2,5; 4,5$$

$$0,25; 1,25; 2,25; 3,25; 4,25.$$

черновик
чистовик

все 1. $0 + 2 + 0 = 2.$

$a=b=c=1$

$x = \frac{1}{2} + 2n$

$x = \frac{1}{4} + k$

$x = \frac{1}{8} + \frac{k}{2}$

разный остаток при делении на $\frac{1}{2}$.

N5.

черновик

черновик

$f_1(x) = f_2(x) = f_3(x).$

~~$27a_1 = 6a_2 = 3a_3$~~

При $x=0.$

$6a_1 = 8a_2 = 12a_3.$

$a_2 = \frac{3a_1}{4}, \quad a_3 = \frac{a_1}{2}.$

$3a_1 = 4a_2 = 6a_3.$

При $x=1.$

$(a_1+1)(1+b_1+6) = (a_2+1)(1+b_2+8) = (a_3+1)(1+b_3+4)$

$7a_1 + 7 \neq a_1b_1 + b_1 = 9a_2 + 9 + a_2b_2 + b_2.$

$7a_1 + a_1b_1 + b_1 + 7 = \frac{27a_2}{4} + 9 + \frac{3a_1b_2}{4} + b_2.$

$\frac{a_1}{4} = a_1 \left(\frac{28-27}{4} \right) = 2 + \frac{3a_1b_2}{4} + b_2 - a_1b_1$

$x_1 = -a_1, \quad x_2 \cdot x_3 = 6, \quad x_2 + x_3 = -b_1.$

$-a_1, -a_2, -a_3. \quad a_2 \cdot a_3 = 6.$

$x = \frac{\pi}{2}$

$a=1$

$-\frac{1}{1}$ черновик

$2x = \frac{\pi}{2}$

$b=0$

$4x = 2\pi$

$c=1$

N# (продолжение)

Если $q=0.$

$bc(b-c) = 0.$

$b=0$

$c=0.$

$b-c=0.$

$x = n, n \in \mathbb{Z}.$

$x = \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

$x = \frac{k}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

$x = \frac{1}{6} + \frac{k}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

$\sin \pi x = 0$

$\sin 2\pi x = 0.$

$\sin 4\pi x = 0.$

$\sin 2\pi x = \sin 4\pi x.$

$2\pi x = 4\pi x + 2\pi n \Rightarrow x = \frac{n}{2}.$

$2\pi x = \pi - 4\pi x + 2\pi n.$

$6\pi x = \pi + 2\pi n$

$x = \frac{1}{6} + \frac{n}{3}.$

$\Rightarrow x = n, n \in \mathbb{Z}$ решение.

чистовик

N5

Если $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$. В каждой точке, то совпадают и все корни. $\Rightarrow f_1, f_2, f_3$ имеют корни $-a_1, -a_2, -a_3$. истинно

Для f_1 : $(x + a_1)(x^2 + b_1x + 6)$.

$\uparrow$
 $-a_1$

$\uparrow$
 $-a_2$ и $-a_3$.

~~Итого:~~

$$\begin{cases} -b_1 = -a_2 - a_3 \\ 6 = a_2 a_3 \end{cases}$$

Аналогично для f_2 и f_3 .

$$\begin{cases} -b_2 = -a_1 + a_3 \\ 8 = a_1 a_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b_3 = -a_1 - a_2 \\ 12 = a_1 a_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 = a_2 a_3 \\ 8 = a_1 a_3 \\ 12 = a_1 a_2 \\ b_1 = a_2 + a_3 \\ b_2 = a_1 + a_3 \\ b_3 = a_1 + a_2 \end{cases}$$

$$2(a_1 + a_2 + a_3) = b_1 + b_2 + b_3$$

$$\frac{12}{8} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{3}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{3}{2} a_3$$

$$6 = \frac{3}{2} a_3^2 \Rightarrow a_3^2 = 4$$

$$a_3 - \text{полож} \Rightarrow a_3 = \pm 2$$

При $a_3 = 2$.

$$a_2 = 3$$

$$a_1 = \frac{8}{2} = 4$$

$$12 = a_1 a_2 \text{ верно}$$

При $a_3 = -2$.

$$a_2 = -3$$

$$a_1 = -4$$

$$a_1 a_2 = 12 \text{ верно}$$

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = 3$$

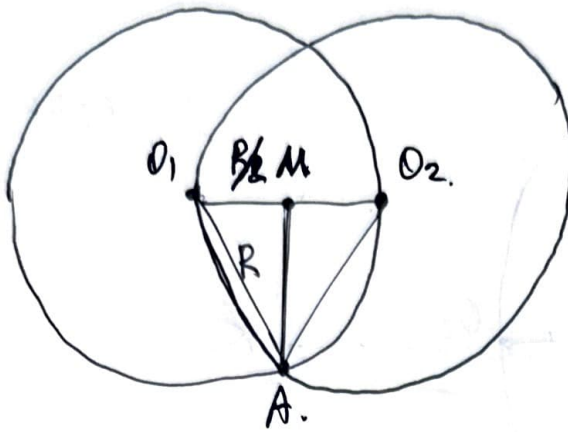
$$a_3 = 2$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = 2 \cdot 9 = 18$$

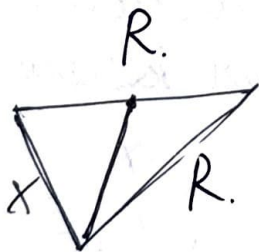
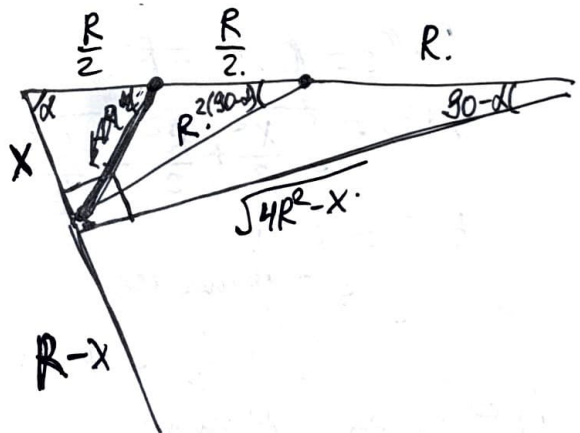
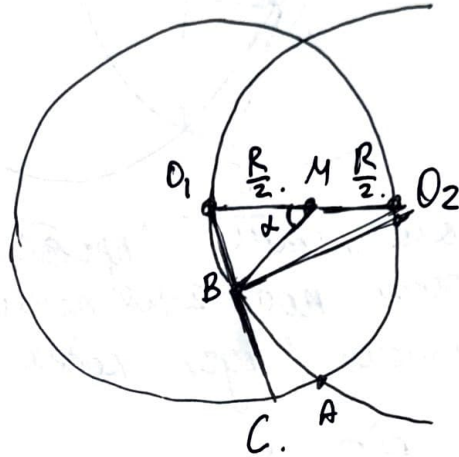
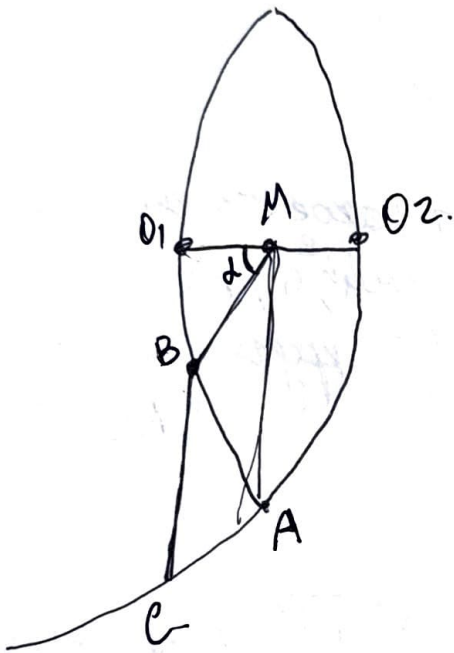
$$a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 = 9 + 18 = 27$$

Ответ: 27.

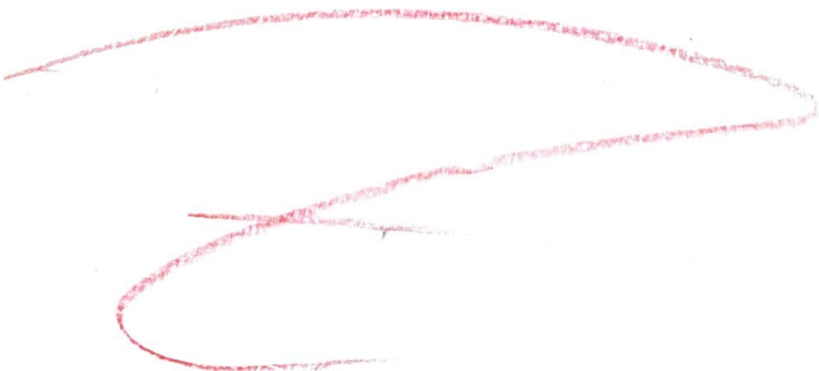
№6. кертовина



$$AM = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

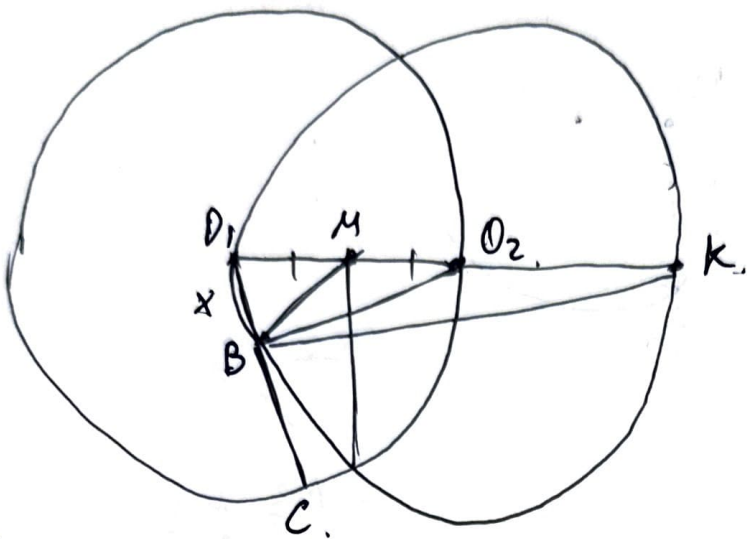


$$\sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{R^2}{4}}$$



$$N6 \quad R = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}$$

Пустовик



М-корка.

Сначала мышь пробежит какое-то расстояние из норки под 2-м ^{и В} паче ~~валом~~ ^{и В} ~~и В~~, а потом по кратчайшему пути пробежит из круга (по радиусу) BC .

Пусть $BO_1 = x$.

Пусть $BO_1 = x$.

$$O_1 O_2 = O_2 B = R.$$

$$MB = \sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{R^2}{4}} - \text{ф-не радиусов}$$

$$BC = R - x.$$

$f(x) = 2\sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{R^2}{4}} + R - x$ - расстояние, которое
проделает мячик, с учетом качения.

$$g'(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x}{2 \sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{R^2}{4}}} - 1 = \frac{x}{\sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{R^2}{4}}} - 1 =$$

$$= X - \sqrt{\frac{X^2}{2} + \frac{R^2}{4}}$$

$$f'(x) = 0.$$

$$f'(x) = 0.$$
$$x = \sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{R^2}{4}}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{R^2}{4} \end{cases}$$

$$\frac{X^2}{2} = \frac{R^2}{4}$$

$$X^2 = \frac{R^2}{2}$$

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{1}{(2+\sqrt{2})\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}+2}$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{R^2}{4}} + R - x - \text{без учета криволинейности}$$

$$g\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{4}} + R - \frac{R}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{R^2}{2}} + R - \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} - \frac{R}{\sqrt{2}} + R$$

т.е. расстояние $\min = R. = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$.

$$0.607: \frac{1}{2+\sqrt{2}}$$

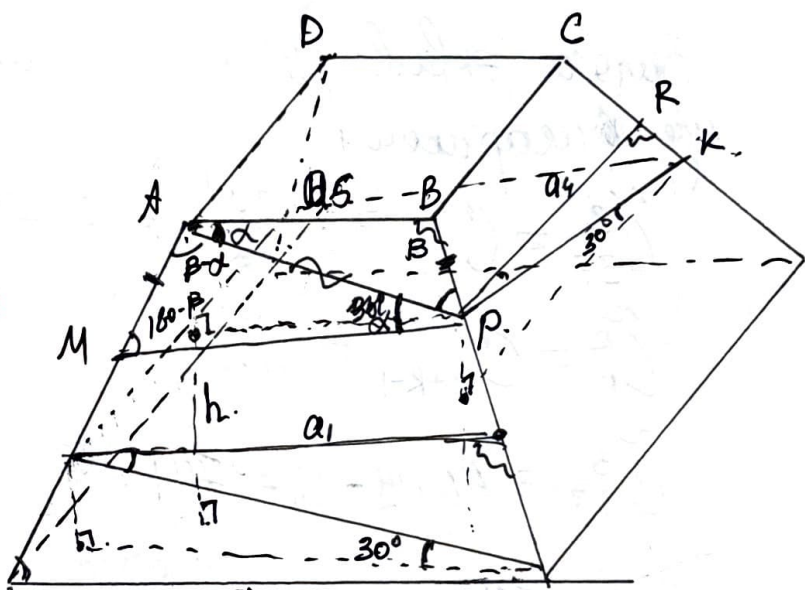
N7.

$q = 6144 \text{ u.e.}$

$$b = a_5 = 1458 \text{ u.e.}$$

$h-?$

истовен



$$\Delta ABP \sim \Delta PRK. \quad c \quad k_5 = \frac{a_5}{a_4}.$$

$\triangle ABP \sim \triangle PRK$. с $k_5 = \frac{a_5}{a_4}$.
на следующей стороне, тоже еств. ^{подобные} треугольники,
и след. за ней $k_4 = \frac{a_4}{a_3}$

$$K_4 = \frac{a_4}{a_3}$$

$$K_3 = \frac{a_3}{a_2}$$

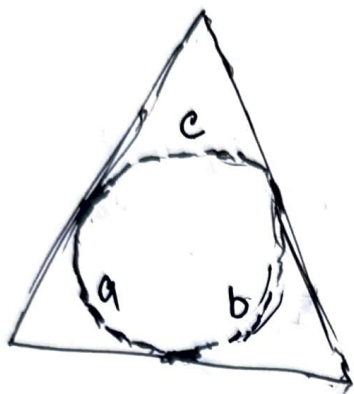
—

$$K_2 = \frac{a_2}{a_1}$$

Все эти д-ки также подожжены
м/ч содей.

№8

Число



$$a+b+c=40-3=37.$$

Треугольник попарно различен,
если $(a;b;c)$ различны.

↑
упорядочены.

Каждое кол-во различных
троек $(a;b;c)$, т.с. $a+b+c=37$

$$0 \leq a, b, c \leq 37.$$

a, b, c - кол-во сторон на сторонах Δ .

Задача эквивалентна расстановке перегородок
на шариках.

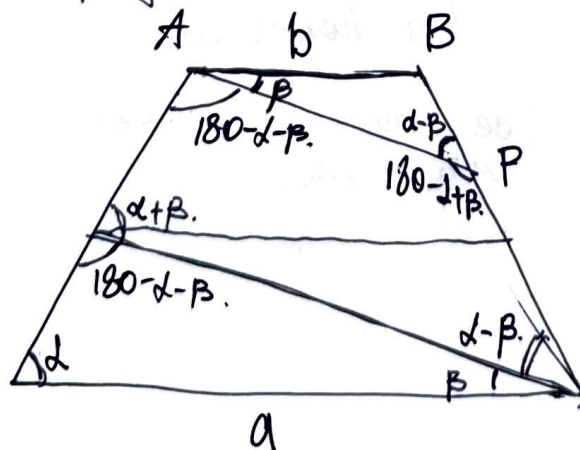
$$\tilde{C}_{37}^3 = C_{39}^2 = \frac{39!}{2! \cdot 37!} = \frac{39 \cdot 38}{2} = 39 \cdot 19.$$

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{k-1}.$$

$$\tilde{C}_{37}^3 = 40 \cdot 19 - 19 = 741.$$

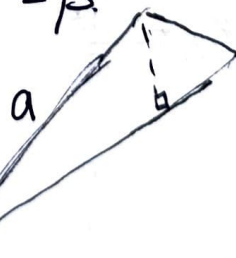
Ответ: 741

№7 (продолжение).



$$\angle BAP = 180 - (180 - \alpha - \beta) = \alpha + \beta.$$

$$\angle BAP = 180 - \alpha - (180 - \alpha - \beta) = \beta.$$



$$\begin{array}{r} 4039 \\ \times 19 \\ \hline 760 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 760 \\ \times 19 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 760 \\ - 19 \\ \hline 741 \end{array}$$

нрновин

$$\begin{array}{r} 39 \\ \times 39 \\ \hline 351 \\ 39 \\ \hline 241 \end{array}$$

0 0

$$\frac{b}{a} = \frac{1458}{6144} =$$

числовик

мч (продолжение).

Аналогично, при $b \neq 0$ и $c \neq 0$.
 $x \neq n, n \in \mathbb{Z}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x \neq n, n \in \mathbb{Z} \\ x \in [0, 3; 1, 6] \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1 \text{ подходит в ответ.}$$

2. при $b = 0$. $x = \frac{\pi n}{2\pi} = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

$a c (c + a) = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \pi x = 0 \\ \sin 4\pi x = 0 \\ \sin \pi x = \sin(4\pi x) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ x \in [0, 3; 1, 6] \end{array} \right\} \text{ в ответ.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{k}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ x = -4x + 2\pi, \pi \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + 4x + 2\pi, \pi \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{k}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{5}, \pi \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{-\pi + 2\pi}{5}, \pi \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x \in \{0, 5; 1; 1, 5\} \text{ в ответ.}$$

3. при $c = 0$. $x = \frac{\pi n}{4\pi} = \frac{n}{4}, n \in \mathbb{Z}$.

$a b (b - a) = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \pi x = 0 \\ \sin 2\pi x = 0 \\ \sin 2\pi x = \sin \pi x \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = \pi x + 2\pi r, r \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = \pi - \pi x + 2\pi r, r \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi, \pi \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{1 + 2\pi}{3}, \pi \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

решения совпадают с группой 1 и 2.

Ответ: $x \in \{0, 5; 1; 1, 5\}$.

8

Шифр	Сума	1	2	3	4	5	6	7	8
58-70-84-72	65	15	10	10	0	15	15	0	0

2. Спрено одбавотена не
3. Овуда нр нахонгем наонга гас ороу иу сугуел. Ортс ведеприс.
4. Ка нростемуму гр-ан не едегено