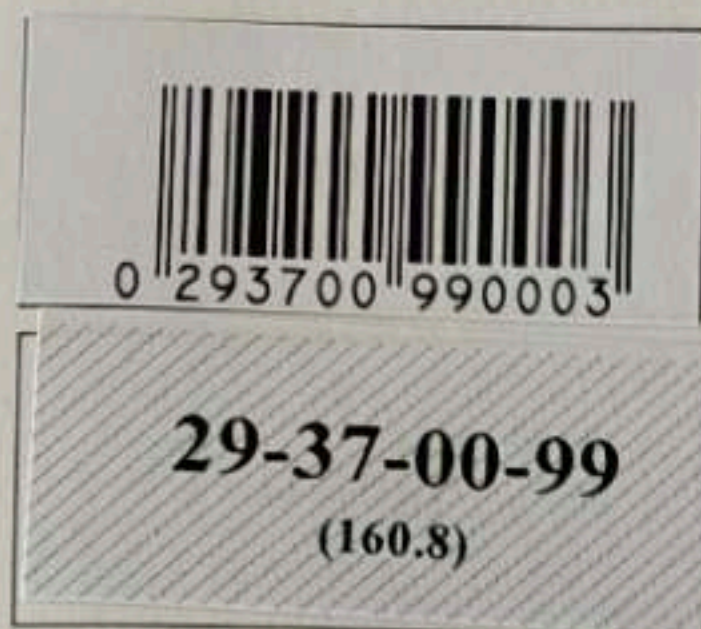




МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Чатуриной Алёны Сергеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«13» апреля 2025 года

Подпись участника
Чатуриной

Стр 3

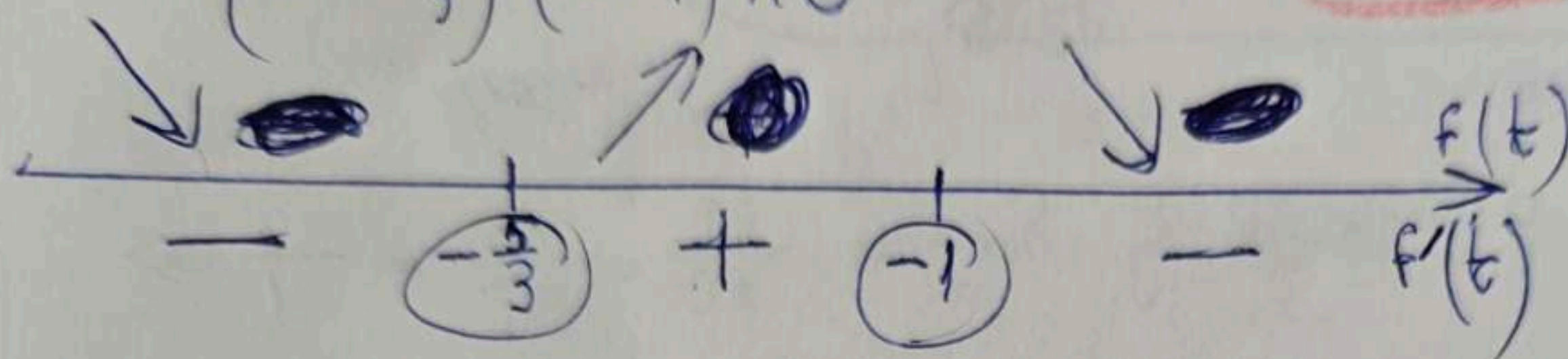
$$f'(t) = -3t^2 - 8t - 5 \geq 0$$

$$3t^2 + 8t + 5 \leq 0$$

$$t_1 = -1, t_2 = -\frac{5}{3}$$

$$(3t + 5)(t + 1) \leq 0$$

$$(t + \frac{5}{3})(t + 1) \leq 0$$



Знач при $t \leq -3$ $-t^3 - 4t^2 - 5t + 10$ монот $\downarrow \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ её min значение при $t = -3$ и оно равно

$$27 - 36 + 15 + 10 \geq 0 \Rightarrow \text{при } t \leq -3$$

$$f(t) > 0 \text{ и } t^3(t+3) \geq 0 \Rightarrow t^4 + 2t^3 - 4t^2 - 5t + 10 \geq 0$$

т.е. (Δ) всегда верно. Из стр. остаётся

$$\begin{cases} t \leq -3 \\ t \geq 2 \\ t^4 + 2t^3 - 4t^2 - 5t + 10 \geq 0 \end{cases}$$

Объединим с $(\star)$:

$$\begin{cases} t \leq 2 \\ 2^4 + 2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 10 \geq 0 - \text{верно} \\ t \leq -3 \end{cases}$$

Когда стр. замена:

$$\begin{cases} \log_2 X + 1 = 2 \\ \log_2 X + 1 \leq -3 \end{cases}$$

$$\log_2 X = 1$$

$$\log_2 X \leq -2$$

$$\log_2 X \leq \log_2 2$$

$$\log_2 X \leq \log_2 2^{-4}$$

$$\begin{cases} X = 2 \\ X \leq 2^{-4} \\ X \geq 0 \text{ (из стр. выше)} \end{cases}$$

Продолжить 1 см
на стр. 10!

(Спр 2)

н/д (прод)

2) Решим систему спр (★ ★):

$$\begin{cases} t \geq 2 \\ t^2 + t - 6 \geq 0 \\ t \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \geq 2 \\ 10 \geq 5t \\ t \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \geq 2 \\ t \leq 2 \\ t \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 2 \quad (\star) \\ t \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 x + 1 \leq 2 \\ \log_2 x + 1 \leq 0 \\ \log_2 x = 1 \end{cases}$$

При $t \leq -3$

$$t^4 + 2t^3 - 4t^2 - 5t + 10$$

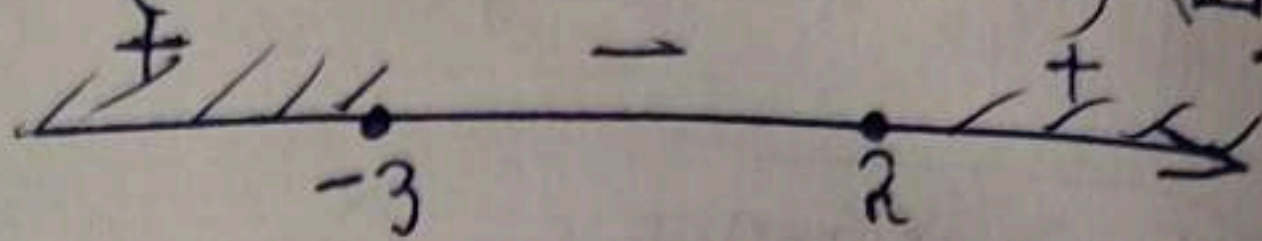
$$= t^3(t+3) - t^3 - 4t^2 - 5t + 10$$

$$= t^3(t+3) - t^3 - 4t^2 - 5t + 10$$

$$= t^3 - 4t^2 - 5t + 10$$

$$f(t) = -t^3 - 4t^2 - 5t + 10$$

$$\begin{cases} (t+3)(t-2) \geq 0 \\ (t-1)(t+2) \geq \sqrt{(t+3)(t-2)} \quad (\square) \end{cases}$$



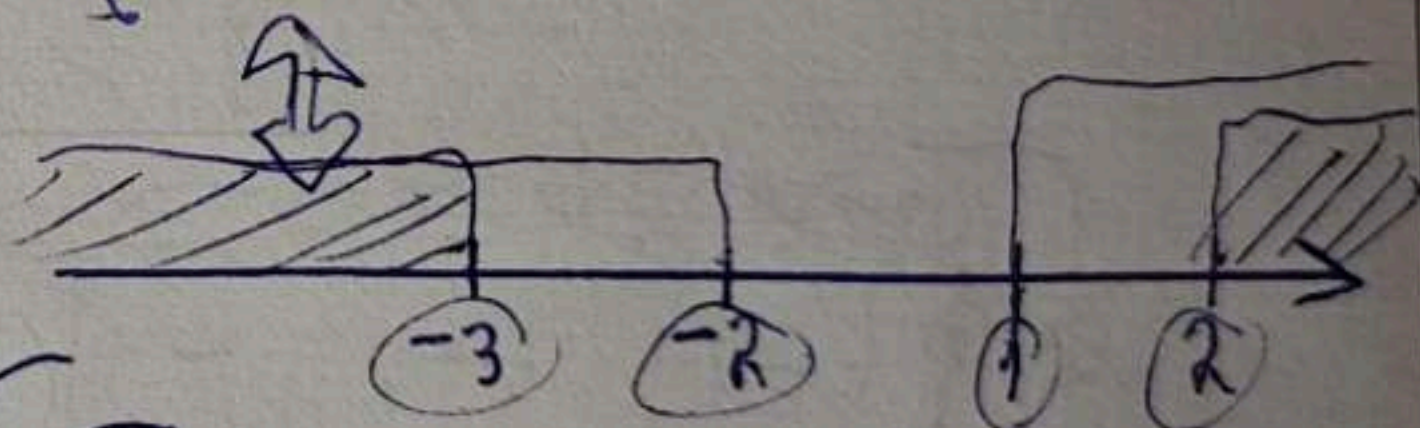
$$\begin{cases} t \leq -3 \\ t \geq 2 \end{cases}$$

$$((t-1)(t+2))^2 \geq (t+3)(t-2)$$

$$(t-1)(t+2) \geq 0$$

$$\begin{cases} t \leq -3 \\ t \geq 2 \end{cases}$$

$$(t^2 + t - 2)^2 \geq t^2 + t - 6$$



$$\begin{cases} t \leq -3 \\ t \geq 2 \end{cases}$$

$$t^4 + 2t^3 - 4t^2 - 5t + 10 \geq t^2 + t - 6$$

$$\begin{cases} t \leq -3 \\ t \geq 2 \end{cases}$$

не вогн (крайне $t \leq 2$)

$$t^4 + 2t^3 - 4t^2 - 5t + 10 \geq 0 \quad (\Delta)$$

$$f(t) = -t^3 - 4t^2 - 5t + 10$$

29-37-00-99

(160.8)

Стр 1

р/л

Всё имеет
работы - шестовые!

55 (пятидесятые годы)

$$\sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 2} - \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 1} \geq \log_2 x + 1$$

$$\text{Дур: } x > 0$$



$$\sqrt{\log_2 x (\log_2 x + 3) - 2} - \sqrt{(\log_2 x + 1)(\log_2 x - 1)} \geq \log_2 x + 1$$

Замена: $\log_2 x + 1 = t$

$$\sqrt{(t-1)(t+2)} - \sqrt{(t+3)(t-2)} \geq t \quad (*) \quad \text{возв в квадр (учит, что все } t > 0)$$

Дур: $\begin{cases} (t+3)(t-2) \geq 0 \\ (t-1)(t+2) - \sqrt{(t+3)(t-2)} \geq 0 \end{cases}$

$$(t-1)(t+2) - \sqrt{(t+3)(t-2)} \geq 0 \quad (**)$$

Учитывая дур:

~~$$(t-1)(t+2) - \sqrt{(t+3)(t-2)} \geq t^2$$~~

$$t \leq 0 \quad (\text{тогда учт можно возн, т.к. лев } (*) \text{ неотриц})$$

$$t^2 + t - 2 - \sqrt{(t+3)(t-2)} \geq t^2$$

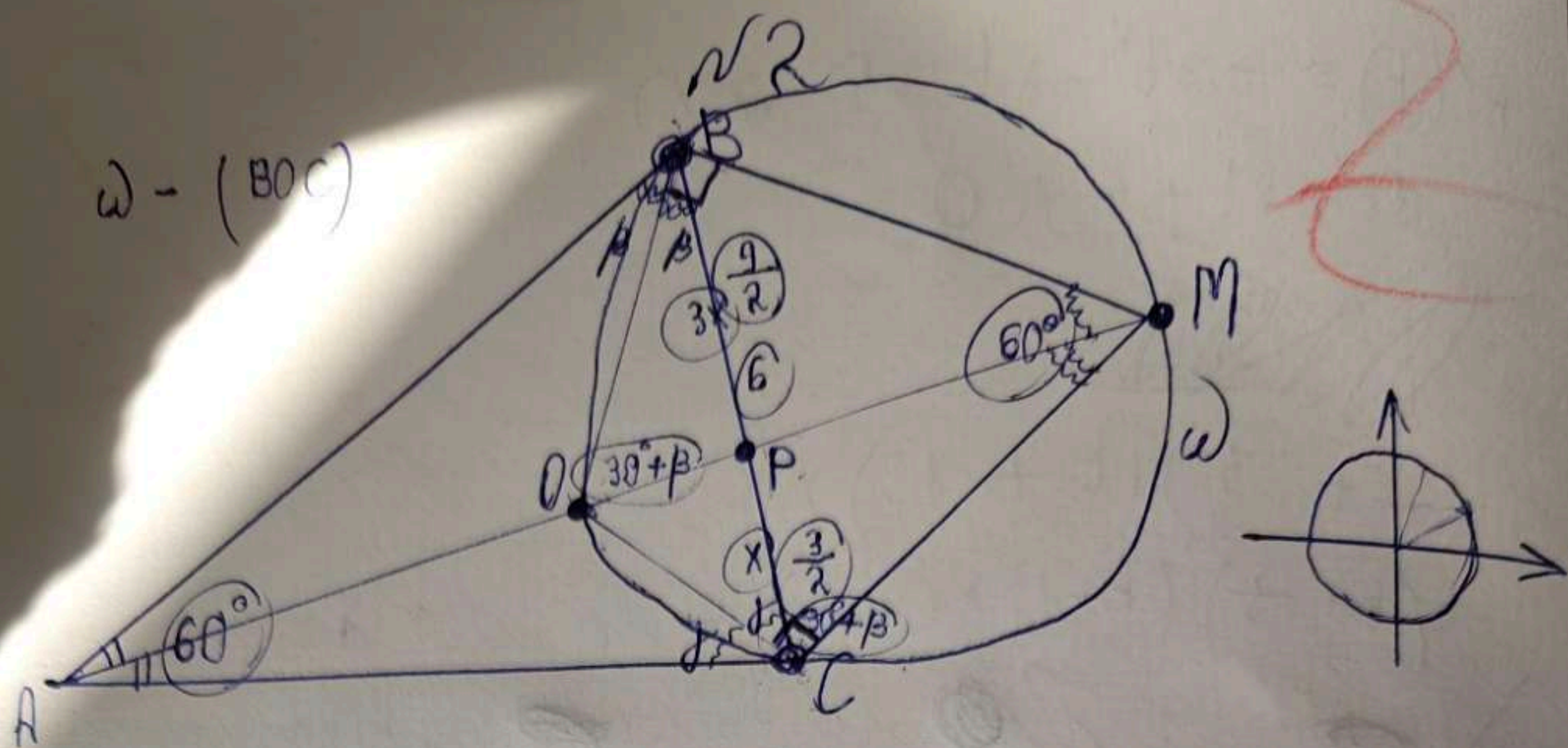
$$t \leq 0$$

$$t - 2 \geq \sqrt{(t+3)(t-2)} \quad (***) \quad \text{при всех } t > 0 \text{ возв в квадр}$$

$$t \leq 0$$

$$\begin{cases} t - 2 \geq 0 \quad (\text{иначе } (***) \text{ не возн}) \\ (t-2)^2 \geq (t+3)(t-2) \\ t \leq 0 \end{cases}$$

(стр 4) (чистов)



1) $BC \cap OM = P$. По св-ву Сим-сона $\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow BP = 3x, PC = x$ и $3x + x = 4x = 6 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$

2) $\angle B = 2\beta, \angle C = 2\gamma \Rightarrow$ по Th о внешних углах

$\triangle AOB \quad \angle BOM = \frac{\angle BAC}{2} + \angle ABC = 30^\circ + \beta \Rightarrow$ из внешне

углов $\angle BCM = \angle BOM = 30^\circ + \beta \Rightarrow \angle MCO = 30^\circ + \beta + \gamma =$
 $= 30^\circ + \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} = 30^\circ + \frac{120^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow \boxed{OM - \text{диаметр } \omega}$

3) $\angle BMC = \angle BMO + \angle OMC = \angle BCO + \angle OBC$ (из внешне углов)
 $= \gamma + \beta = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ \Rightarrow$ если R - радиус ω , то по Th синусов $\triangle BMC \quad \frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2R \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{6 \cdot \frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \Rightarrow R = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{R = 2\sqrt{3}}$

4) $OM - \text{диаметр } \omega \Rightarrow OM = 2R = \boxed{4\sqrt{3}}$

Ответ: $\boxed{4\sqrt{3}}$

Спр 8

$$\begin{aligned} (a-1)^4 &= a \\ (a^2-2a-1)^2 - (\sqrt{a})^2 &= 0 \\ (a^2-2a-1) - \sqrt{a} &= 0 \end{aligned}$$

$$a-1 = \log_4 a$$

при $a=1$

$$1-1 = \log_4 1 \Rightarrow \Rightarrow \text{одно}$$

$$\log_4 \sqrt{a-1} = \log_4 a$$

$$(a-1) - \text{монот} \uparrow u$$

$$\log_4(a-a+1) = \frac{1}{a \cdot \ln 4} - 1 = \frac{1-a \cdot \ln 4}{a \cdot \ln 4} \text{ при}$$

$$a > 0 \quad a \cdot \ln 4 > 0 \quad u \quad 1 \vee a \cdot \ln 4 < 0$$

Прог $\sqrt{4}$ см на спр 10!

$$\sqrt{\cos x + 2\sqrt{-3\sin x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x}}$$

$$\text{верно } \geq 0$$

$$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x} > \sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x}$$

$$\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x} \geq 0$$

$$6\sqrt{-3\sin x} > 3\sqrt{\cos x}$$

$$\sqrt{\cos x} \geq \sqrt{-3\sin x}$$

обе части $\geq 0 \Rightarrow$ можно возз в квадр

$$2\sqrt{-3\sin x} > \sqrt{\cos x}$$

$$\sqrt{\cos x} \geq \sqrt{-3\sin x}$$

$$\cos x \geq 0$$

$$-3\sin x \geq 0$$

$$4 \cdot (-3\sin x) > \cos x$$

$$\cos x \geq -3\sin x$$

Стр 7

В силу (3) получим $\begin{cases} a-1 = \log_4 a \\ -1 \leq a-1 \leq 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} a-1 = \log_4 a \\ 0 \leq a \leq 2 \end{cases} \quad (1) \quad \text{и} \quad -1 \leq \log_4 a \leq 1$$

В (1):
 $a-1 = \log_4 a$

$$\log_4 4^{-1} \leq \log_4 a \leq \log_4 4$$

$$\frac{1}{4} \leq a \leq 4$$

~~$\log_4 (a-1)^4 = \log_4 a$~~
 ~~$(a-1)^4 = a$~~
 ~~$a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1 = a$~~
 ~~$((a-1)^4 - a)' = 4(a-1)^3 - 1 = 0$~~

~~$((a-1)^4)' = 4(a-1)^3 \vee 0$~~

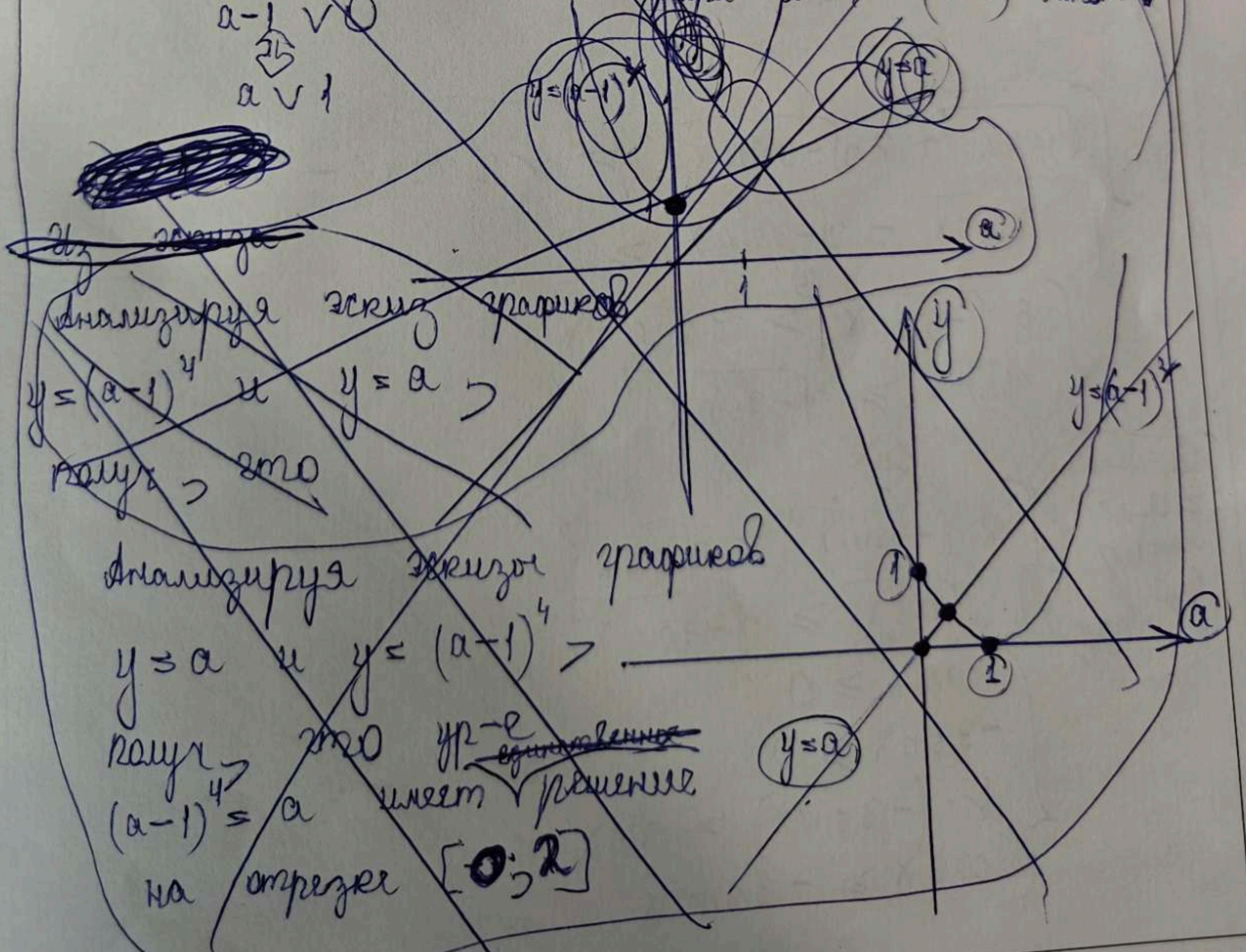
~~$a-1 \vee 0$~~
 ~~$a \vee 1$~~

При $a > 1$

$(a-1)^4$ монотонно $\uparrow$

При $a < 1$

$(a-1)^4$ монотонно $\downarrow$



~~Анализируя эскиз графиков~~

~~$y = (a-1)^4$ и $y = a$~~

~~получим, что~~

~~Анализируя эскиз графиков~~

~~$y = a$ и $y = (a-1)^4$~~

~~получим, что уравнение~~

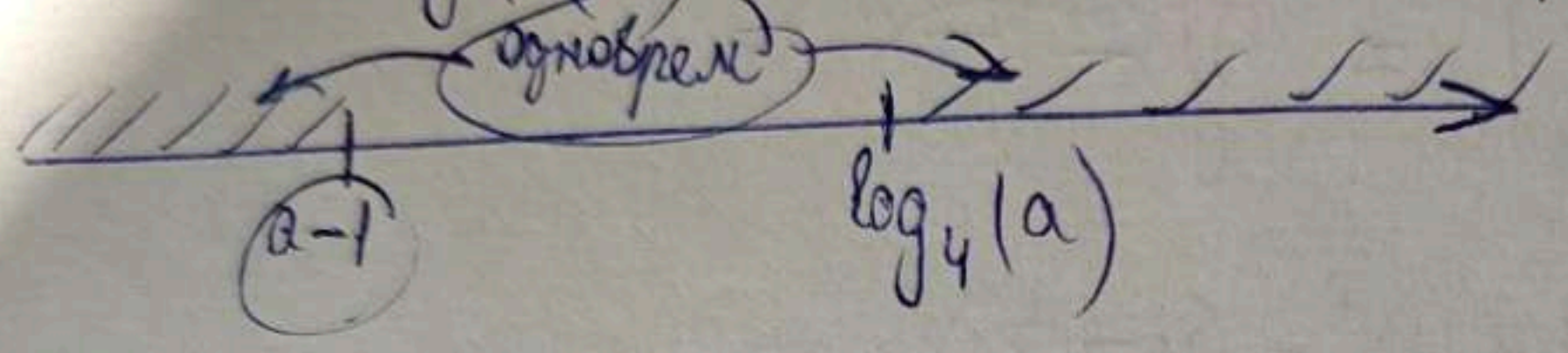
~~$(a-1)^4 = a$ имеет решение на отрезке $[0, 2]$~~

2) Если $a > 0$, то найдем

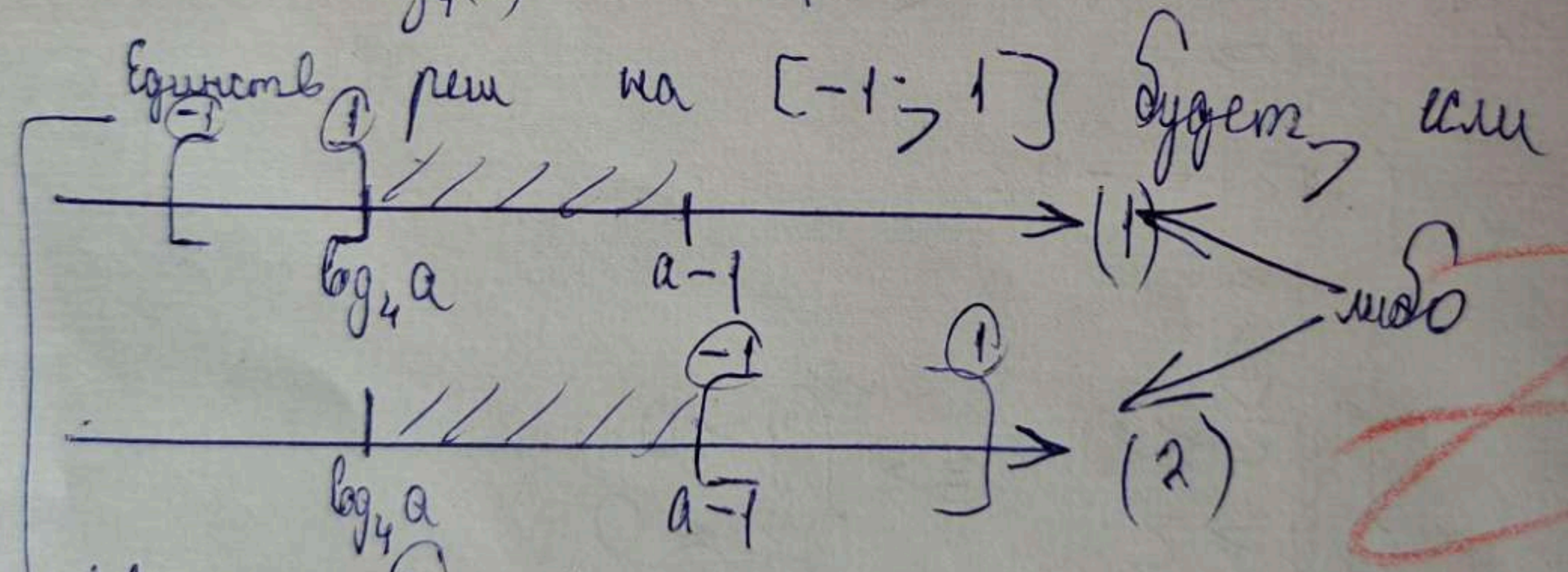
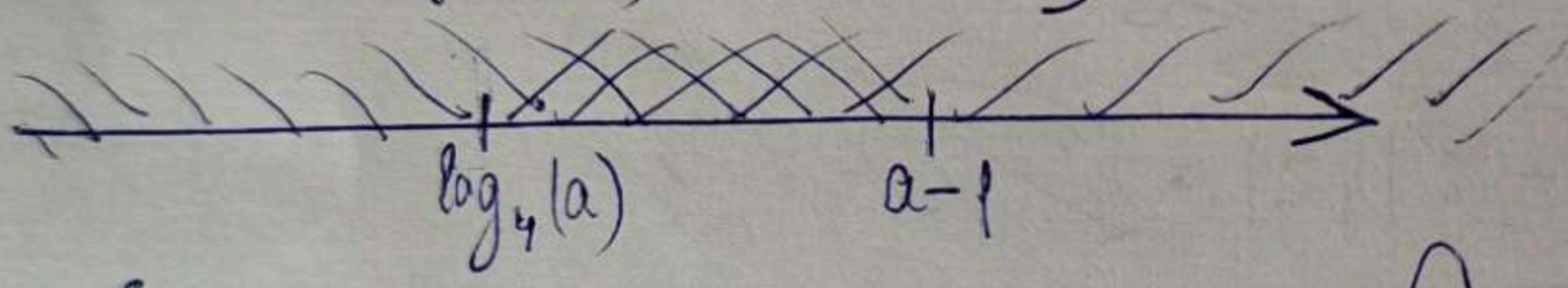
$$\begin{cases} \log_4(z^x) \geq \log_4(a) \\ x \leq a-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \log_4(a) \\ x \leq a-1 \end{cases}$$

Если $\log_4(a) > a-1$, то решений нет



Если $\log_4(a) \leq a-1$, то $x \in [\log_4 a; a-1]$



~~($\log_4 a$ не равен $a-1$, тогда рассуждать не нужно) либо $\log_4 a = a-1 \in [-1; 1]$ (3)~~

В случ (1) найдем

$a = 4$

$a > 0 \Rightarrow$ верно

$$\log_4 a = 1 \Leftrightarrow \log_4 a = \log_4 4$$
$$a-1 = 3 > 1 = \log_4 a \quad \text{и}$$

В случ (2) найдем
уши

$$a-1 = -1 \Leftrightarrow a = 0 - \text{уже}$$

Imp 5

$$\sqrt{2 \cos x} + 2\sqrt{-3 \sin x} = 2\sqrt{2 \cos x - \sqrt{-3 \sin x}}$$

$$|y^x - a| + |x+1-a| = y^x - x - 1$$

Зам: $y^x - a = y \Rightarrow x+1-a = z$

Получ: $|y| + |z| = y - z$ ($y \geq 0, z \geq 0$ по модулю)

$$\begin{cases} (|y| + |z|)^2 = (y - z)^2 \\ y - z \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + z^2 + 2|yz| = y^2 + z^2 - 2yz \\ y \geq z \end{cases}$$

$$\begin{cases} |yz| = -yz \\ y \geq z \end{cases}$$

$$\begin{cases} yz \leq 0 \\ y \geq z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ z \leq 0 \end{cases}$$

Зн, $y^x - a$ из усл равносильно

$$\begin{cases} y^x - a \geq 0 \\ x+1-a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^x \geq a \\ x \leq a-1 \end{cases}$$

1) Если $a \leq 0$, то $y^x \geq a$ для $\forall x$.

Зн, $x \leq a-1$

иметь 1 реш на $[-1; 1]$

Зн, $a-1 = -1 \Rightarrow a = 0$ - ответ (решение $x = -1$)

стр 12

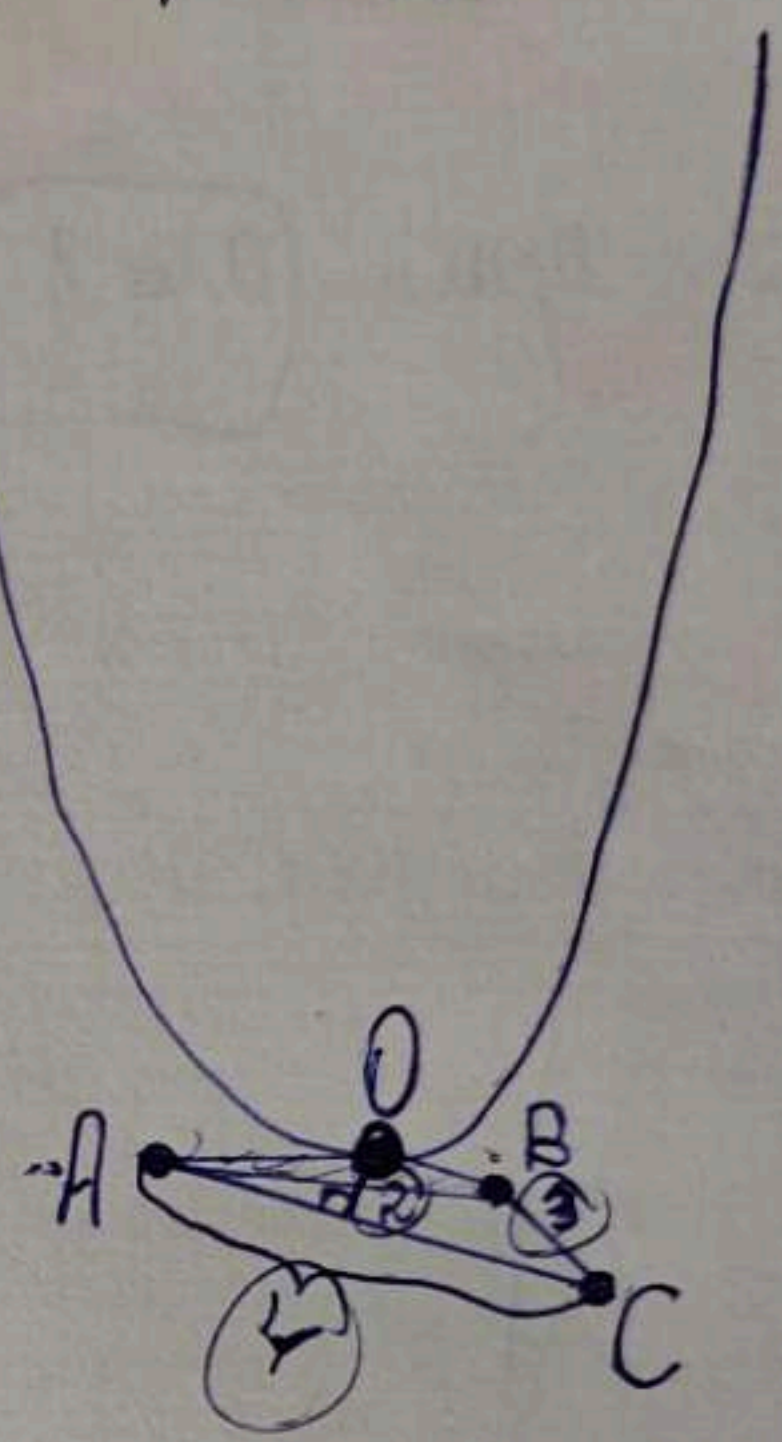
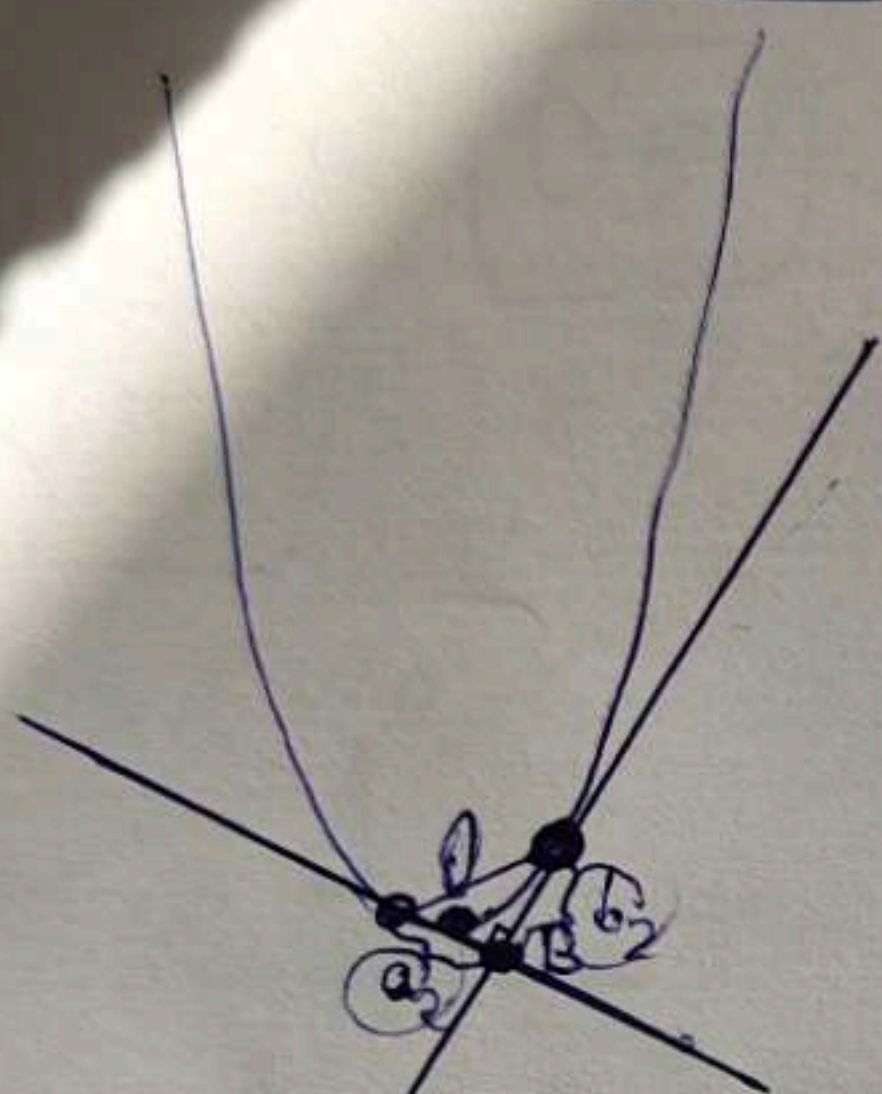
$$\sqrt{(t-1)(t+2)} - \sqrt{(t+3)t} \geq t$$

$$(t-1)(t+2) - \sqrt{t(t+3)} \geq t^2$$

$$t^2 - t + 2t - 2 - \sqrt{t(t+3)} \geq t^2$$

$$t - 2 \geq \sqrt{t(t+3)}$$

√6



Если a_i, b_i — расем
от точки до
параллели (отр. кас)
то $a_i^2 + b_i^2 \leq \text{const}$
для всех точек

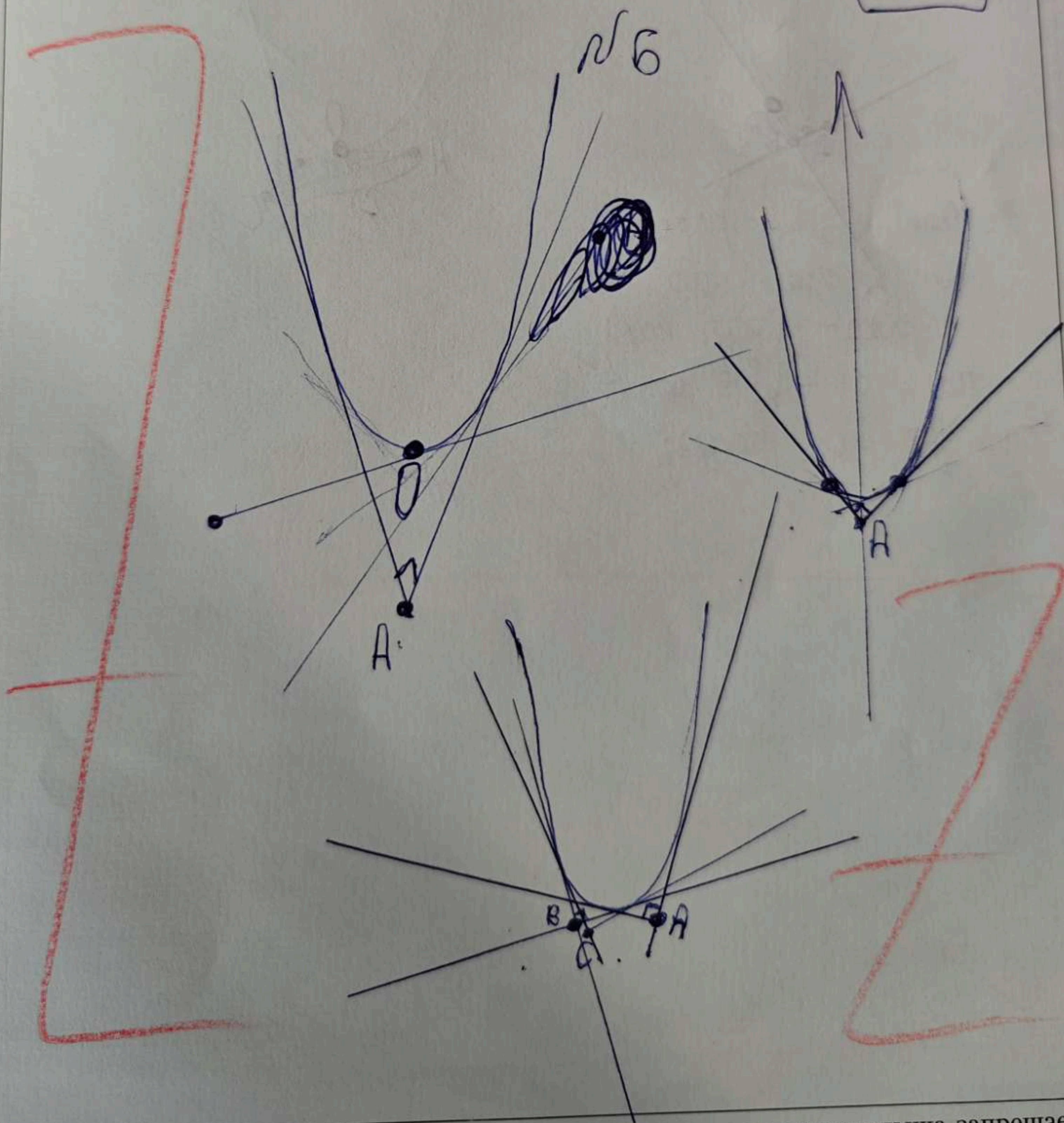
√5

Стр 11

Из эскиза видно, что т.е. правая растёт быстрее
 $\log_4 a$, то ур-е $a-1 \leq \log_4 a$ имеет ровно
 1 р-н $\boxed{a=1}$. При этом $a-1 \in 0 \in [-1; 1] \Rightarrow$

подзе $\forall$ все случ, получ ответ.

Ответ: при $\boxed{a=1}$ - при $\boxed{a \leq 0}$ и при $\boxed{a \leq 4}$.

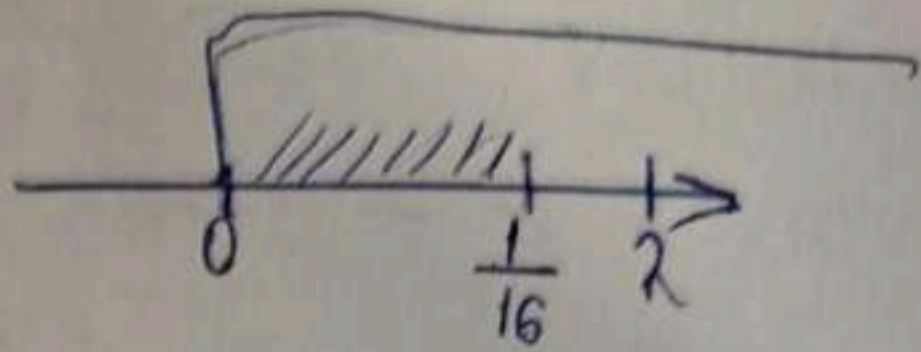


Стр. 10

№1 (прод)

$$\begin{cases} x=2 \\ x \leq \frac{1}{2^4} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ x \leq \frac{1}{16} \\ x \geq 0 \end{cases}$$



$$x \in [0; \frac{1}{16}] \cup \{2\}$$

$$f(x_0) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 16x_0 \in \mathbb{Z}$$

Дано, что при $x \in (0; \frac{1}{16})$ $0 < 16x_0 < 16 \cdot \frac{1}{16} = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ в этом случае $16x_0 \notin \mathbb{Z}$

Значит $16x_0 \in \mathbb{Z}$ только при $x_0 \leq 0$; $x_0 = \frac{1}{16}$
 и $x_0 = 2$ (на $[0; \frac{1}{16}] \cup \{2\}$). Значит

в ответ пишем $f(0) + f(\frac{1}{16}) + f(2) = 0 + 1 + 16 \cdot 2 =$
 $= 32 + 1 = 33$

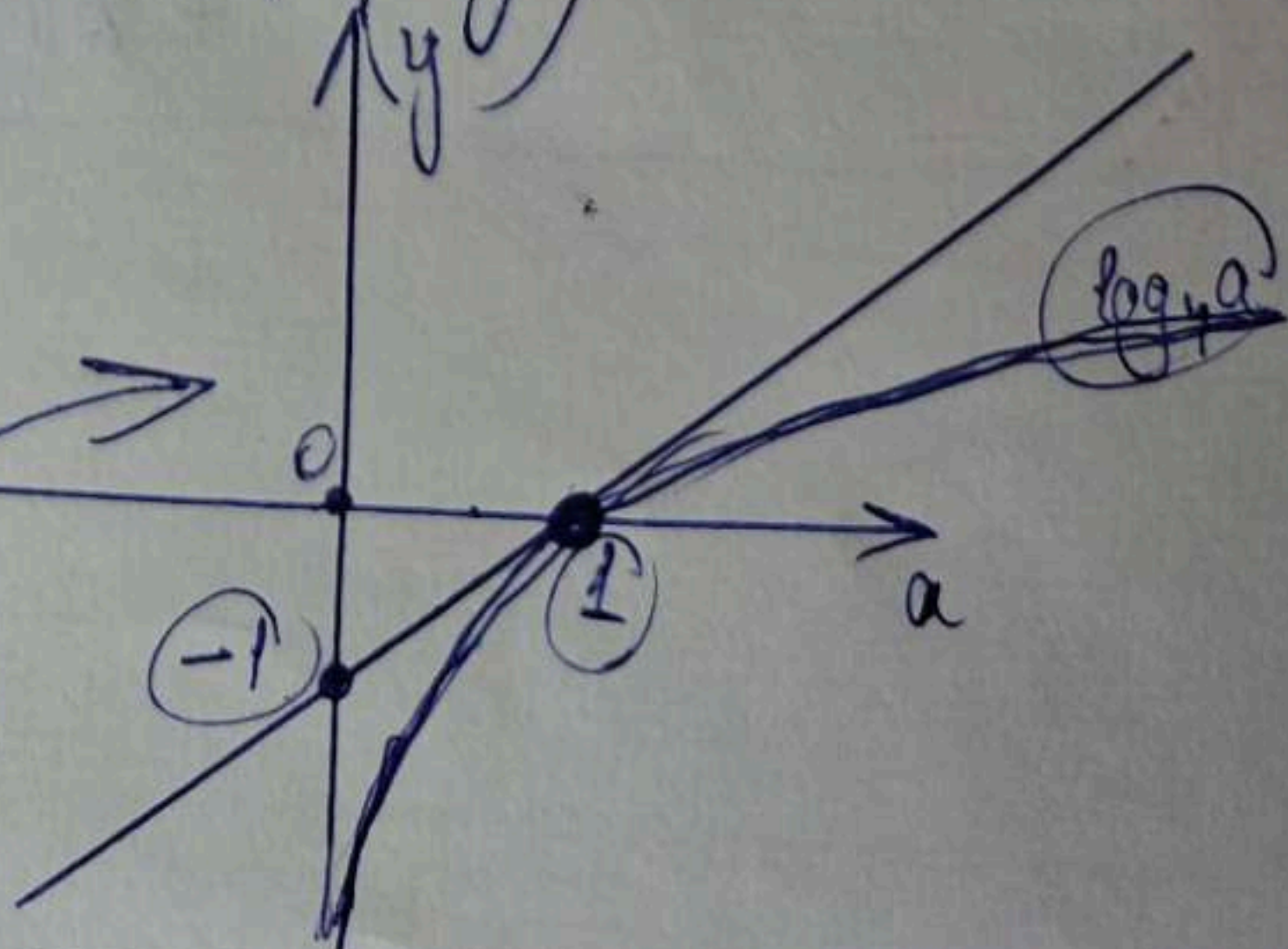
Ответ: 33

№2 (прод)

$$a-1 = \log_4 a$$

$$\log_4 a = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

Эскиз графиков $y = a-1$ и $y = \log_4 a$



Задание 9

$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12 \sin x \geq \cos x \\ \cos x \geq -3 \sin x \end{cases}$$

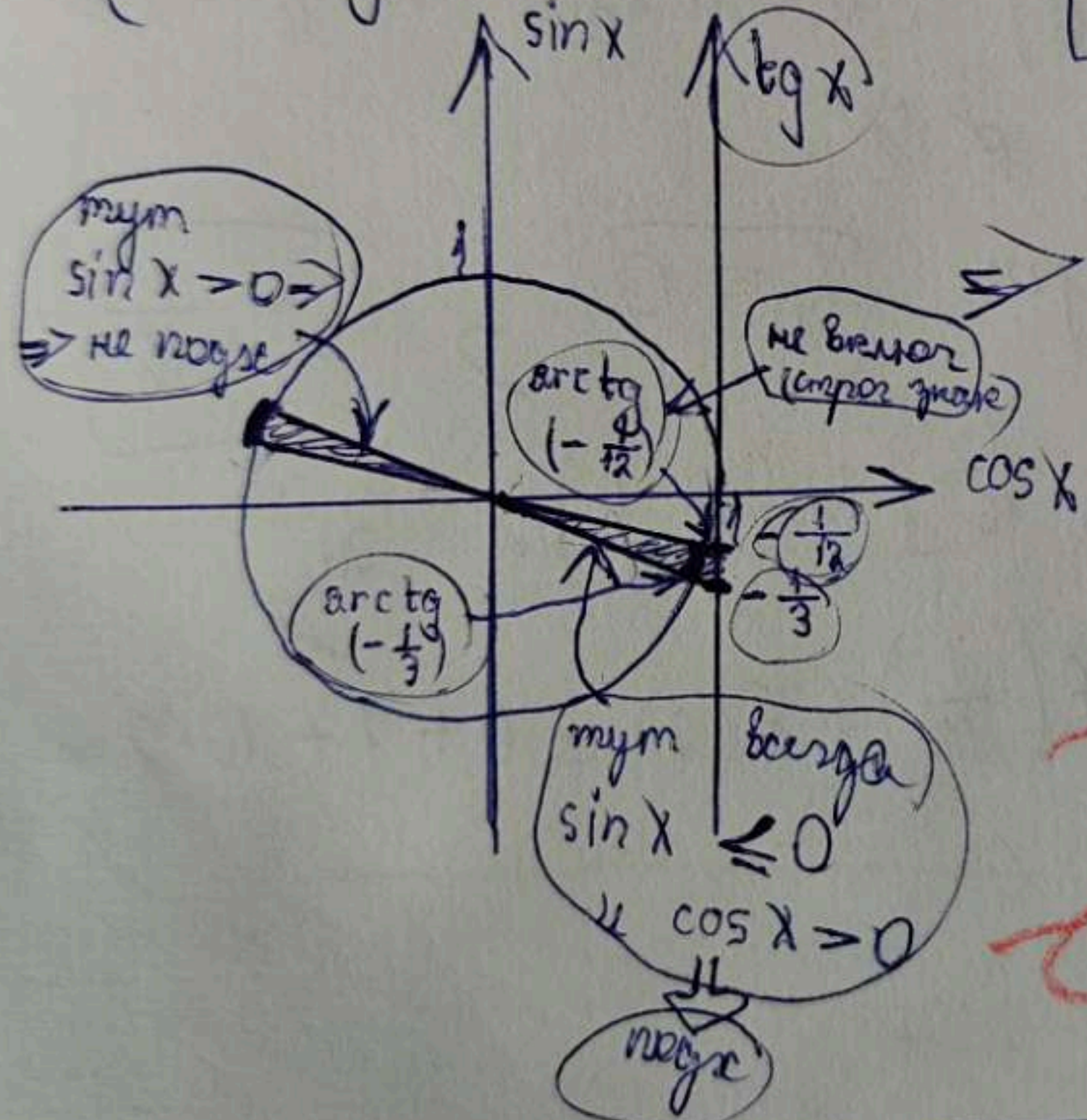
$$\textcircled{1} \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \pm 1 \Rightarrow \Rightarrow \text{но } \sin x \leq 0, \text{ то } \sin x = -1$$

$$\text{Получим: } \begin{cases} 12 > 0 \\ 0 \geq 3 \end{cases} \text{ — не верно} \Rightarrow \cos x \neq 0$$

$$\textcircled{2} \cos x \neq 0. \text{ Тогда}$$

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin x \leq 0 \\ -12 \operatorname{tg} x > 1 \\ -3 \operatorname{tg} x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \leq 0 \\ \cos x > 0 \\ \operatorname{tg} x < -\frac{1}{12} \\ \operatorname{tg} x \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$$



$$x \in \left[\arctg\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi k; \arctg\left(-\frac{1}{12}\right) + 2\pi k \right); k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left[\arctg\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi k; \arctg\left(-\frac{1}{12}\right) + 2\pi k \right); k \in \mathbb{Z}$$