0 690895 270000

69-08-95-27
(161.10)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов 2025
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Чекунова Андрея Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
69-08-95-27 (161.10)	65	0	15	15	5	15	15	0	0

Смирнов Кирилл Вячеславович ЛИСТ-ВКЛАДЫШ Шуф

69-08-95-27
(161.10)

65 (плогуснес нет)

N 1)

$\sqrt{7+\sqrt{24}} = \sqrt{7+2\sqrt{6}} =$

$\sqrt{4x^2+12x+9} + \sqrt{9x^2+12x+4} - \sqrt{-(x+1)}^2 = \sqrt{7+2\sqrt{6}} + \sqrt{7-2\sqrt{6}}$

$\sqrt{(2x+3)^2} + \sqrt{(3x+2)^2} - \sqrt{-(x+1)}^2 = |1+\sqrt{6}| + |1-\sqrt{6}| =$

$= 1+\sqrt{6}+\sqrt{6}-1 = 2\sqrt{6}$

$\begin{cases} |2x+3| + |3x+2| - (-(x+1)) = 2\sqrt{6} \\ -(x+1) \geq 0 \end{cases}$ $x+1 \leq 0$

$\begin{cases} |2x+3| + |3x+2| + x+1 = 2\sqrt{6} \\ x \leq -1 \end{cases}$ при $x \leq -1$, $3x+2 \leq -1 < 0$

$\begin{cases} |2x+3| + (-3x-2) + x+1 = 2\sqrt{6} \\ x \leq -1 \end{cases}$

$\begin{cases} |2x+3| - 3x-2+1+x = 2\sqrt{6} \\ x \leq -1 \end{cases}$ (I)

I) $|2x+3| - 2x - 1 = 2\sqrt{6}$

$|2x+3| - 2x - 3 + 2 = 2\sqrt{6}$

$|2x+3| - (2x+3) = 2\sqrt{6} - 2$

если $2x+3 \geq 0$, то $|2x+3| - (2x+3) = 0 \neq 2\sqrt{6}-2$.

значит $2x+3 < 0$, $x < -\frac{3}{2}$

$-2(2x+3) = 2\sqrt{6}-2$

$2x+3 = 1-\sqrt{6}$

$x = \frac{-2-\sqrt{6}}{2} = -1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\sqrt{6} > 2$

$\frac{\sqrt{6}}{2} > 1$

$\begin{cases} x < -\frac{3}{2} \\ x \leq -1 \\ x = -1 - \frac{\sqrt{6}}{2} < -2 \end{cases}$

$-\frac{\sqrt{6}}{2} < -1$

$-1 - \frac{\sqrt{6}}{2} < -2$

Ответ: $\frac{-2-\sqrt{6}}{2}$

$2^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin(2^x)$ нет реш. при $x>0$.

$f(x) = 2^{5-\frac{1}{x}} - \sin(2^x)$ ~~$x \neq 0$ ОДЗ~~

$f(x) \geq a$ нет реш при $x>0$,

значит $f(x) < a$ верно при $\forall x>0$. $\left(-\frac{1}{x}\right)' = -(-1)\frac{1}{x^2}$

$f'(x) = 2^{5-\frac{1}{x}} \ln 2 \cdot \left(0 + \frac{1}{x^2}\right) - \cos(2^x)\, 2^x \ln 2$

т.к. $x>0$, $\frac{1}{x}>0$, $-\frac{1}{x}<0$

$5-\frac{1}{x}<5$

$2^{5-\frac{1}{x}}<32$

$-1 \leq \sin(2^x) \leq 1$

$-1 \leq -\sin(2^x) \leq 1$

$\Rightarrow f(x) = 2^{5-\frac{1}{x}} - \sin(2^x) < 32+1 = 33$

$\boxed{f(x) < 33}$

~~Значит, $a \leq$~~

Тогда ~~наим.~~ значение $a=33$ удовл. условию.

Предп, что $\exists a<33$, удовл. условию $f(x)<a$ при $x>0$.

Рассмотрим x: $\sin(2^x) = -1$

$2^x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in N$

$x = \log_2\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in N$

при таких x знач. $f(x) = 1 + 2^{5-\frac{1}{x}}$

покажем, что $f(x) \geq a$ имеет реш. при $a<33$.

$f(x) \geq a$

$1 + 2^{5-\frac{1}{x}} \geq a$ $\quad 2^{5-\frac{1}{x}} \geq a-1$ (*) $\quad 5-\frac{1}{x} \geq \log_2(a-1)$

$5 - \log_2(a-1) \geq \frac{1}{x}$

т.к. $a<33$, $\log_2(a-1)<5$, $5-\log_2(a-1)>0$

$x \geq \frac{1}{5-\log_2(a-1)}$ A

$\log_2\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right) \geq \frac{1}{5-\log_2(a-1)} > 0$ $\quad |\, 2^{()}$

$\frac{3\pi}{2} + 2\pi n \geq 2^{\frac{1}{5-\log_2(a-1)}}$

$n \geq \dfrac{2^{\frac{1}{5-\log_2(a-1)}} - \frac{3\pi}{2}}{2\pi}, n \in N$ (II)

т.к. не существует наибольшего натурального числа, ~~значение~~ $\exists n$, удовл. нер-ву II. тогда $x = \log_2\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right) > 0$, (т.к. $n>0$, $\frac{3\pi}{2}+2\pi n > \frac{3}{2}\pi + 2\pi > 1$)

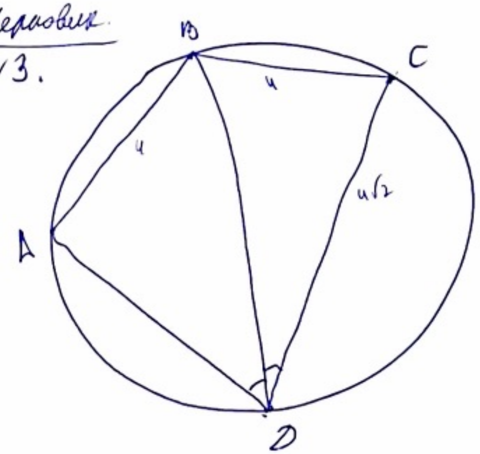
удовл. условию $f(x) \geq a$.

~~Ответ: $a \leq 33$.~~ (*) Замечание! если в указанном нер-ве $a \leq 1$, то $x=1$ удовл. данному нер-ву. Поэтому $a \leq 1$ не рассматриваются.

Ответ: $a = 33$.

Черновик.

№3.



~~Заметим~~

$S \to max$

Чистовик.

4. $\cos^3(\pi x) - \cos^3(2\pi x) + \cos^3(4\pi x) = (\cos(\pi x) - \cos(2\pi x) + \cos(4\pi x))^3$

$\cos(\pi x) = a$

$\cos(2\pi x) = b$ $\qquad a^3 - b^3 + c^3 = (a-b+c)^3$ $\qquad x \in [0{,}3; 1{,}8]$

$\cos(4\pi x) = c$ $\qquad c^3 - b^3 = (a-b+c)^3 - a^3$ $\qquad 0{,}3 \le x \le 1{,}8$

$(c-b)(c^2+bc+b^2) = (c-b)((a-b+c)^2 + a(a-b+c) + a^2)$ $\qquad 0{,}6 \le 2x \le 3{,}6$

$(c-b)(c^2+bc+b^2 - (a-b+c)^2 - a(a-b+c) - a^2) = 0$

рассм. $c = b$. (А) ~~$\cos(2\pi x) = \cos(4\pi x)$~~

т.к. $b = \cos(2\pi x)$, $c = \cos(4\pi x) = \cos(2(2\pi x))$, $c = 2b^2 - 1$

$2b^2 - 1 = b$ $\qquad 2b^2 - b - 1 = 0$

$\left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$ $\qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{4} + \frac{f}{2}, f \in Z \\ x = \pm\frac{1}{3} + \frac{l}{2}, l \in Z \end{array}\right.$

$c \ne b$. рассм. $c^2 + bc + b^2 - (a-b+c)^2 - a(a-b+c) - a^2 = 0$

~~$c^2 + bc + b^2 - a^2 - (a-b+c)(a-b+c+a) = 0$~~

т.к. $a = \cos(\pi x)$, $b = \cos(2\pi x)$ $\quad b = 2a^2 - 1$

~~$c^2 - bc + b^2 - a^2 = (c-b)(a-b+c)$~~

~~$(c-b)^2 + bc - a^2 = (c-b)(a-(b+c))$~~

~~$bc - a^2 = (c-b)(a-(b-c)-(c-b))$~~

~~$bc - a^2 = (c-b)(a-b+c-c+b)$~~

~~$bc - a^2 = (c-b)a = ac - ab$~~

~~$a^2 + ac - ab - bc = 0$~~

~~$a(a-b) + c(a-b) = 0$~~

~~$(a-b)(a+c) = 0$~~

решение данного уравнения на другом листе (стр. 12)

$\left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -c \end{array}\right.$

В результате получаем: $\left[\begin{array}{ll} a = b & (В) \\ a = -c & (Б) \\ c = b & (А) \end{array}\right.$ (*)

69-08-95-27 (161.10)

В) $a = b$

$a = 2a^2 - 1$

$2a^2 - a - 1 = 0$

$\left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} \cos\pi x = 1 \\ \cos\pi x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z \\ \pi x = \pm\frac{2\pi}{3} + \pi p, p \in Z \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + m \\ x = \pm\frac{2}{3} + p \end{array}\right.$

Б) $a = -c$

$a + c = 0$

$\cos(\pi x) + \cos(4\pi x) = 0$

$-2\sin\left(-\frac{3\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \frac{3\pi x}{2} = \pi n, n \in Z \\ \frac{5\pi x}{2} = \pi k, k \in Z \end{array}\right.$ $\qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{3} n, n \in Z \\ x = \frac{2}{5} k, k \in Z \end{array}\right.$

$\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad \cos x = -1$ $\quad -\frac{1}{2}$

Решение совокуп. (*)

А) $\left[\begin{array}{ll} x = \frac{1}{2} + m & m \in Z \\ x = \pm\frac{2}{3} + p & p \in Z \\ x = \frac{1}{4} + \frac{f}{2} & f \in Z \\ x = \pm\frac{1}{3} + \frac{l}{2}, & l \in Z \\ x = \frac{2}{3} n, & n \in Z \\ x = \frac{2}{5} k, & k \in Z \end{array}\right.$

$0{,}3 \le \frac{1}{4} + \frac{f}{2} \le 1{,}8$

$0{,}6 - \frac{1}{2} \le f \le 3{,}6 - \frac{1}{2}$

$0{,}1 \le f \le 3{,}1$, $f \in Z$ $\Rightarrow f = 1; 2; 3$

$0{,}3 \le \frac{2}{3} n \le 1{,}8$

$\frac{0{,}9}{2} = 0{,}45 \le n \le \frac{5{,}4}{2} = 2{,}7$, $n \in Z$ $\Rightarrow n = 1; 2$

серия $\frac{1}{4} + \frac{f}{2}$ включает серию $\frac{1}{2} + m$;

серия $\pm\frac{1}{3} + \frac{l}{2}$ включает серию $\pm\frac{2}{3} + p$.

$0{,}3 \le \frac{2}{5} k \le 1{,}8$

$\frac{1{,}5}{2} = 0{,}75 \le k \le \frac{9}{2} = 4{,}5$, $k \in Z$ $\Rightarrow k = 1; 2; 3; 4$

$0{,}3 \le \frac{1}{3} + p_1 \le 1{,}8$

$\frac{3}{10} - \frac{1}{3} = \frac{-1}{30} \le p_1 \le \frac{9}{5} - \frac{1}{3} = \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$, $p_1 \in Z$ $\Rightarrow p_1 = 0; 1$

$0{,}3 \le -\frac{1}{3} + p_2 \le 1{,}8$

$\frac{3}{10} + \frac{1}{3} = \frac{19}{30} \le p_2 \le \frac{9}{5} + \frac{1}{3} = \frac{32}{15} = 2\frac{2}{15}$, $p_2 \in Z$ $\Rightarrow p_2 = 1; 2$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{3};\\ x=\\ x=\\ x= \end{array}\right.$$

$\frac{3}{5}-\frac{2}{3}=\frac{-1}{15}$

$0{,}3\le\frac{1}{3}+\frac{t_1}{2}\le 1{,}8$

$-\frac{2}{30}\le t_1\le 3{,}6-\frac{2}{3}=2\frac{14}{15}$, $t_1\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow t_1=0;1;2.$

$0{,}3\le-\frac{1}{3}+\frac{t_2}{2}\le 1{,}8$

$0{,}3+\frac{1}{3}=\frac{19}{30}\le\frac{t_2}{2}\le 1{,}8+\frac{1}{3}=\frac{32}{15}$

$\frac{38}{30}\le t_2\le\frac{64}{15}=4\frac{4}{15}$, $t_2\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow t_2=2;3;4.$

$\frac{1}{3}+\frac{t_1}{2}=\frac{2+3t_1}{6}$

$-\frac{1}{3}+\frac{t_2}{2}=\frac{3t_2-2}{6}$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{4};\frac{5}{4};\frac{7}{4}\\ x=\frac{2}{3};\frac{4}{3}\\ x=0{,}4;0{,}8;1{,}2;1{,}6\\ x=\frac{1}{3};\frac{5}{6};\frac{4}{3}\\ x=\frac{2}{3};\frac{7}{6};\frac{5}{3} \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3};\ \frac{3}{4};\frac{5}{4};\frac{7}{4};\frac{5}{6};\frac{7}{6};0{,}4;0{,}8;1{,}2;1{,}6.$

№5) $f_1(x)=(x+a_1)(x^2+b_1x+12)$ $\quad a_i;b_i>0$

$f_2(x)=(x+a_2)(x^2+b_2x+15)$

$f_3(x)=(x+a_3)(x^2+b_3x+20)$

$\forall x\in\mathbb{R}:\ f_1(x)=f_2(x)=f_3(x)$

для $x=0$: $a_1\cdot 12=a_2\cdot 15=a_3\cdot 20$

$a_1=a>0\quad a_2=\frac{12}{15}a=0{,}8a$

$a_3=\frac{12}{20}a=0{,}6a$

для $x=-a$: $f_2(x)=(-0{,}2a)(a^2-b_2a+15)=0$

$f_1(x)=0$ $\quad$ т.к. $a>0$, $a^2-b_2a+15=0$

$b_2=\frac{+15+a^2}{a}=+\frac{15}{a}+a$

$f_3(x)=-0{,}4a(a^2-b_3a+20)=0$

$a^2-b_3a+20=0\quad b_3=\frac{a^2+20}{a}=a+\frac{20}{a}$

$f_2(-a_2)=0=f_1(-a_2)=(a-a_2)(a_2^2-b_1a_2+12)=0$

$0{,}2a(a_2^2-b_1a_2+12)=0$

$a>0$, поэтому $\quad b_1=\frac{12+a_2^2}{a_2}=\frac{12}{a_2}+a_2=\frac{4}{5}a+\frac{12}{1}\cdot\frac{5}{4a}=$

$=\frac{4}{5}a+\frac{15}{a}$

$a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3=S(a)=a+0{,}8a+0{,}6a+a+\frac{15}{a}+a+\frac{20}{a}+$

$+0{,}8a+\frac{15}{a}=3a+2{,}2a+\frac{30}{a}+\frac{20}{a}=5{,}2a+\frac{50}{a}$

~~$f_1(1)=a_1(1+b_1+12)$~~

~~$f_2(1)=a_2(1+b_2+15)=\frac{4}{5}a(16+b_2)$~~

~~$5a+\frac{15}{a}+1=0\quad |\cdot a$~~

~~$5a^2+a+15=0$~~

~~$D=$~~

$f_2(-a_3)=(a-a_3)(a_3^2-b_1a_3+12)=0$

$b_1=\frac{a_3^2+12}{a_3}=a_3+\frac{12}{a_3}=$

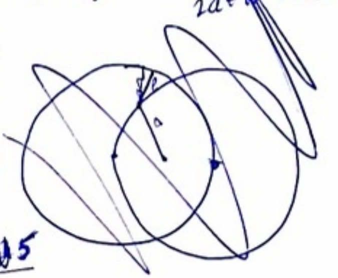
$2a+\frac{b}{a}\to\min$

$=0{,}6a+\frac{12}{0{,}6a}=0{,}6a+\frac{20}{a}$

$0{,}6a+\frac{20}{a}=0{,}8a+\frac{15}{a}$

$0{,}2a=\frac{5}{a}$

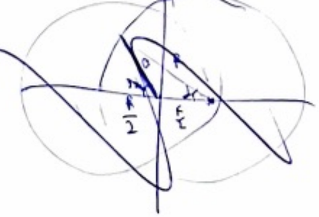
$\frac{a}{5}=\frac{5}{a}\quad a^2=25,\ a>0 \Rightarrow a=5$



$S(a)=5{,}2\cdot 5+\frac{50}{5}=26+10=30$

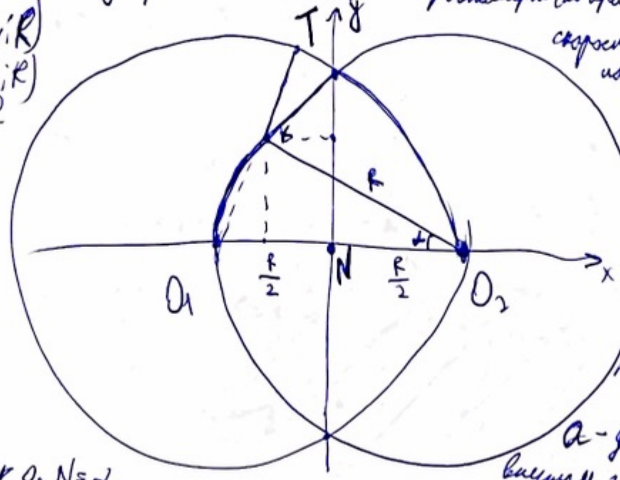
Ответ: 36.

~~$a^2=(R\cos x-\frac{R}{2})^2+(R\sin x)^2$~~



№6. Задача попадания в норку эквивалентна задаче выхода из норки $R=4-2\sqrt{2}$.

$\omega_1(O_1;R)$
$\omega_2(O_2;R)$
$O_1O_2=R$



Т.к. поливалки льют воду равномерно (по времени), и скорость мышки постоянна, то суммарное полученное мышью кол-во воды пропорционально $2a+b$, где a — длина пути внутри зоны действия двух поливалок, b — в зоне лишь одной из поливалок.

Длина пути в таком случае $S=2a+b$

$\angle KO_2N=\alpha$

Из симметрии $O_1N=O_2N=\frac{R}{2}$

$y_K=R\sin\alpha$ $\quad O_1\left(-\frac{R}{2};0\right)$
$x_K=\frac{R}{2}-R\cos\alpha$

$\overrightarrow{O_1K}\left(R(1-\cos\alpha);R\sin\alpha\right)$

1) Пусть мышка покинула зону двойного полива в т. K. $OK\cap\omega_1=T$. Позже будет доказана оптимальность маршрута $N-K-T$.

$KN^2=(R\sin\alpha)^2+\left(\frac{R}{2}-R\cos\alpha\right)^2=R^2\left(\sin^2\alpha+\frac{1}{4}-\cos\alpha+\cos^2\alpha\right)=R^2\left(\frac{5}{4}-\cos\alpha\right)$

$O_1K^2=\left(R(1-\cos\alpha)\right)^2+(R\sin\alpha)^2=$
$=R^2\left(1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)=$
$=R^2(2-2\cos\alpha)$

$KN=R\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\alpha}=a$

$O_1K=R\sqrt{2-2\cos\alpha}$ $\quad b=R-O_1K=R\left(1-\sqrt{2-2\cos\alpha}\right)$

$2a+b\to\min$ $\quad$ ~~$2R\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\alpha}+R\sqrt{2-2\cos\alpha}\to\min$~~

~~$2\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\alpha}+\sqrt{2-2\cos\alpha}\to\min$~~

~~$\sqrt{5-4\cos\alpha}+\sqrt{2-2\cos\alpha}\to\min$ $\quad \cos\alpha=t$ $\quad f(t)=\sqrt{5-4t}+\sqrt{2-2t}$~~

~~$f'(t)=\frac{-4}{2\sqrt{5-4t}}+\frac{(-2)}{\sqrt{2-2t}}<0$~~

~~$f(t)\to\min$ при $t\to\max$, $t=\cos\alpha$, т.к. $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\cos\alpha\le1$~~

~~f min достиг при $t=1$, $\cos\alpha=1$, $\alpha=0$.~~

~~длина пути $S=2a+b=R\left(2\sqrt{\frac{5}{4}-1}+\sqrt{2-2}\right)=R\left(2\cdot\frac{1}{2}+0\right)=R\cdot\frac{1}{2}=$
$=\frac{1}{2}(4-2\sqrt{2})=2-\sqrt{2}$.~~

$2a+b\to\min$ $\quad 2R\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\alpha}+R\left(1-\sqrt{2-2\cos\alpha}\right)\to\min\quad(R>0)$

$2\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\alpha}+1-\sqrt{2-2\cos\alpha}\to\min$

~~Замена~~ $2\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\alpha}-\sqrt{2-2\cos\alpha}\to\min.$

Замена $t=\cos\alpha$

$f(t)=\sqrt{5-4t}-\sqrt{2-2t}$

$f'(t)=\frac{-4}{2\sqrt{5-4t}}-\frac{(-2)}{2\sqrt{2-2t}}=\frac{1}{\sqrt{2-2t}}-\frac{2}{\sqrt{5-4t}}=\frac{\sqrt{5-4t}-2\sqrt{2-2t}}{\sqrt{2-2t}\sqrt{5-4t}}=$
$=\frac{\sqrt{5-4t}-\sqrt{8-8t}}{\sqrt{2-2t}\sqrt{5-4t}}$

т.к. $y=\sqrt{x}\uparrow$, $f'(t)>0$ при $5-4t\ge8-8t$,
$4t\ge3$
$t\ge\frac{3}{4}$

$f'(t)$: $-$ $\frac{3}{4}$ $+$

$f(t)$: $\searrow$ min $\nearrow$

f min достиг при $t=\frac{3}{4}=\cos\alpha$ — возможно

при этом $S=a+b=R\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}+R\left(1-\sqrt{2-2\cdot\frac{3}{4}}\right)=$
$=R\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=R=4-2\sqrt{2}.$

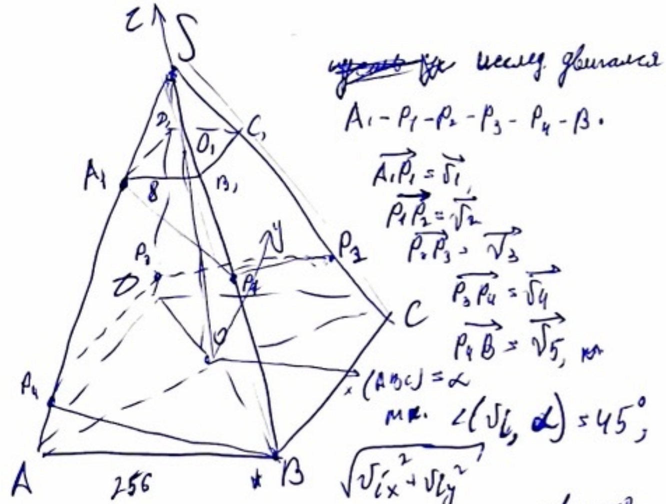
Доказательство оптимальности маршрута $N-K-T$:

Если мышка покинула зону двойного полива в т. K, то $a\ge KN$. Чтобы покинуть окружность ω_1, нужно удалиться от её на расстояние, большее, чем R. Быстрее всего это можно сделать, двигаясь вдоль радиуса.

~~Заметим~~ ~~Для~~ Значит, $b \geq KT$. Заметим, что в силу выпуклости вверх дуги O_1K, луч ~~прямая~~ KT больше не пересечёт ω_2, т.е. мышь больше не попадёт в зону двойного полива.
Итак, $b \geq KT$,
$a \geq NK$, причём $b = KT$ и $a = NK$ достижимо. Значит, при фиксир. точке K маршрут $N-K-T$ оптимален.

Ответ: $4-2\sqrt{2}$.

7)

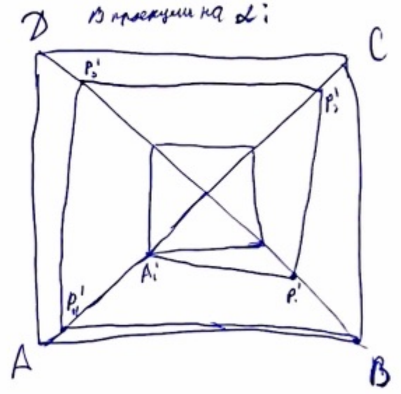


~~пусть~~ ~~ж~~ насекомое двигалось
$A_1 - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - B$.
$\overrightarrow{A_1P_1} = \vec{v_1}$,
$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{v_2}$,
$\overrightarrow{P_2P_3} = \vec{v_3}$
$\overrightarrow{P_3P_4} = \vec{v_4}$
$\overrightarrow{P_4B} = \vec{v_5}$, пл.
$(ABC) = \alpha$
т.к. $\angle(\vec{v_i}, \alpha) = 45^\circ$;

$$\frac{\sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}}{\sqrt{v_{iz}^2}} = ctg\, 45^\circ = 1$$

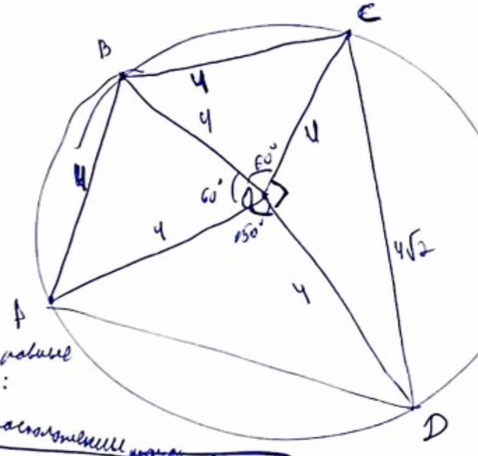
$$h = \sum_{i=1}^{5} |v_{iz}| = \sum_{i=1}^{5} \sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2} = A_1'P_1' + P_1'P_2' + P_2'P_3' + P_3'P_4' + P_4'B$$

В проекции на α:



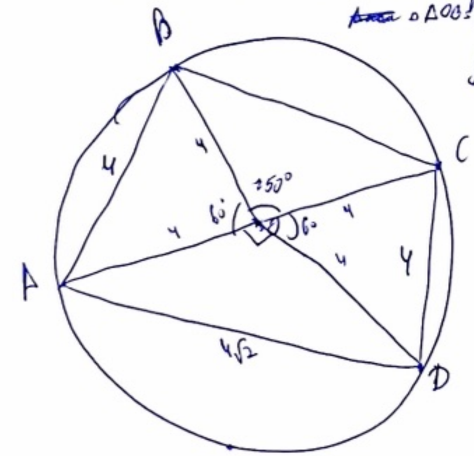
N 3.)

I)



если стороны, равные 4 соседние:
при таком расположении ~~точек~~ ~~ABCD~~ отрезков, равных 4 (соседние).
$\triangle AOB = \triangle BOC$ и они равносторонние.
$\triangle COD$ прямоуг. т.к. $CD^2 = CO^2 + OD^2$
тогда $\angle AOD = 360 - 120^\circ - 90^\circ = 240^\circ - 90^\circ = 150^\circ$
А ~~по~~ ~~площадь~~ $S_{ABCD} = 2S_{AOB} + S_{COD} + S_{AOD} =$
$= 2 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} + \frac{4 \cdot 4}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 8\sqrt{3} + 12 =$
$= S_1$

II) если отрезки, равные 4 являются противопол. сторонами:
~~так~~ $\triangle AOB = \triangle COD$ и равносторон. $\angle AOD = 90^\circ$, $\angle BOC = 150^\circ$



$S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2 + \frac{4 \cdot 4}{2} = 8\sqrt{3} + 12 = S_2$

$S_1 = S_2 = S_{max}$.

Ответ: $8\sqrt{3}+12$

№4. ~~(продолжение)~~ (решение уравнения)

$c^2+bc+b^2-(a-b+c)^2-a(a-b+c)-a^2=0$

$c^2+bc+b^2-(a^2+b^2+c^2+2ac-2bc-2ab)-(a^2-ab+ac)-a^2=0$

$-3a^2+3bc-3ac+3ab=0$

$a^2-bc+ac-ab=0$

$a(a+c)-b(a+c)=0 \qquad (a-b)(a+c)=0$

$\left[\begin{array}{l}(a-b)=0\\(a+c)=0\end{array}\right.$ основная часть решения на стр. 4.

№8.