0 858991 660006

85-89-91-66
(162.5)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Шаченковой Екатерины Дмитриевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
85-89-91-66		+	–	+	+	+	0	∓	0

85-89-91-66 (162.5)

Белоусова ~~дина~~

~~чистовик~~ чистовик

65 (чистовик нет)

1. $\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}+\left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2=\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}$

$* \; -(x-2)\geq 0$

$x\leq 2$

$|2x-3|+|x-3|-(x-2)=\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)$

$|2x-3|+|x-3|-x+\cancel{2}=\cancel{2}$

$x\leq 2 \Rightarrow x-3<0$

$|2x-3|+3-x-x=0$

$|2x-3|=2x-3$

$2x-3\geq 0 \qquad x\geq \frac{3}{2}$

Ответ: $\left[\frac{3}{2};2\right]$

4. $\sin^3(\pi x)-\sin^3(2\pi x)+\sin^3(4\pi x)=(\sin(\pi x)-\sin(2\pi x)+\sin(4\pi x))^3 \qquad x\in\left[\frac{3}{10};\frac{8}{5}\right]-?$

$\exists\; \sin(\pi x)=a, -\sin(2\pi x)=b, \sin(4\pi x)=c$

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$

$\cancel{a^3}+\cancel{b^3}+\cancel{c^3}=\cancel{a^3}+\cancel{3}a^2(b+c)+\cancel{3}a(b+c)^2+\cancel{b^3}+\cancel{3}b^2c+\cancel{3}bc^2+\cancel{c^3}$

$a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2+2abc=0$

$(a+b)(b+c)(a+c)=0$

$(\sin(\pi x)-\sin(2\pi x))(\sin(4\pi x)-\sin(2\pi x))(\sin(\pi x)+\sin(4\pi x))=0$

$\left[\begin{array}{l}\sin(\pi x)-\sin(2\pi x)=0\\ \sin(4\pi x)-\sin(2\pi x)=0\\ \sin(\pi x)+\sin(4\pi x)=0\end{array}\right.$
$\left[\begin{array}{l}\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{3\pi x}{2}=0\\ \sin(\pi x)\cos(3\pi x)=0\\ \sin\frac{5\pi x}{2}\cos\frac{3\pi x}{2}=0\end{array}\right.$
$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi x}{2}=\pi k\\ \frac{3\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k\\ \pi x=\pi k\\ 3\pi x=\frac{\pi}{2}+\pi k\\ \frac{5\pi x}{2}=\pi k\end{array}\right.$
$k\in\mathbb{Z}$
$\left[\begin{array}{l}x=2k\\ x=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}k\\ x=k\\ x=\frac{1}{6}+\frac{k}{3}\\ x=\frac{2}{5}k\end{array}\right.$

числа в отрезке: $1;\frac{1}{3};\cancel{\frac{5}{3}};\frac{1}{2};\frac{5}{6};\frac{7}{6};\frac{3}{2};\frac{2}{5};\frac{4}{5};\frac{6}{5};\frac{8}{5}$

Ответ: $\frac{1}{3};\frac{2}{5};\frac{1}{2};\frac{4}{5};\frac{5}{6};1;\frac{7}{6};\frac{6}{5};\frac{3}{2};\frac{8}{5}$

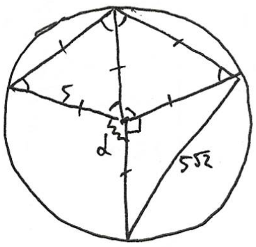
 черновик

2. $3^{5-\frac{1}{x}} \geq a+\sin 4^x$ $a-?$ $\nexists x>0$ черновик

$x>0 \Rightarrow 3^{5-\frac{1}{x}} < 3^5$

$a \leq 3^{5-\frac{1}{x}} - \sin 4^x < 3^5 - \sin 4^x \leq 3^5+1$

3. I.

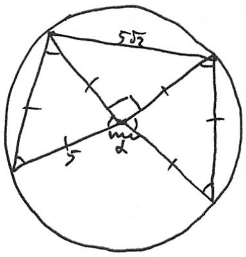


$\alpha = 360° - 2\cdot 60° - 90° = 150°$

$S = \frac{1}{2}\cdot 25\,(2\sin 60° + \sin 90° + \sin 150°) =$

$= \frac{25}{2}\left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{25(2\sqrt{3}+3)}{4}$

II.



$\alpha = 150°$

~~черновик~~ черновик

85-89-91-66 (162.5)

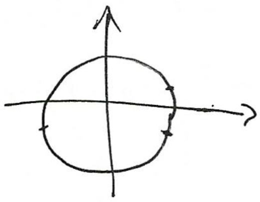
4. $a^3 - b^3 + c^3 = (a-b+c)^3$

$a^3 - b^3 + c^3 = \cancel{a^3} + 3a^2(c-b) + 3a(c-b)^2 + \cancel{c^3} - 3c^2b + 3cb^2 - \cancel{b^3}$

$a^2c - a^2b + ac^2 - 2abc + ab^2 - bc^2 + b^2c = 0$

$(a-b)(c^2 - ab + ac - bc) = 0$

$(a-b)(a+c)(b-c) = 0$



$(\sin(\pi x) - \sin(2\pi x))(\sin(\pi x) + \sin(4\pi x))(\sin(2\pi x) - \sin(4\pi x)) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin(\pi x) = \sin(2\pi x) \\ \sin(\pi x) = -\sin(4\pi x) \\ \sin(2\pi x) = \sin(4\pi x) \end{array}\right.$ $\quad \cancel{\pi x = 2\pi x + 2\pi k}$ $\cancel{\pi x + 2\pi x = \pi + 2\pi k}$ $\cancel{\pi x = 4\pi x - \pi - 2\pi k}$

$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{3\pi x}{2} = 0 \\ \cancel{\frac{\pi x}{2} = 2\pi k} \\ \sin\frac{5\pi x}{2}\cos\frac{3\pi x}{2} = 0 \\ \sin(\pi x)\cos(3\pi x) = 0 \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} \frac{\pi x}{2} = \pi k \\ \frac{3\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{5\pi x}{2} = \pi k \\ \pi x = \pi k \\ 3\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = 2k \\ x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}k \\ x = \frac{2}{5}k \\ x = k \\ x = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}k \end{array}\right.$

$x \in \left[\frac{3}{10}; \frac{8}{5}\right]$ – ?

$\frac{1+2k}{6}$

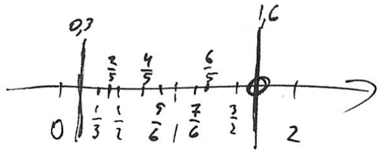
$\cancel{0}$ $\cancel{2}$ $\cancel{2}$

$\frac{1}{3}$ 1 $\cancel{\frac{5}{3}}$

$\cancel{0}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{6}{5}$ $\frac{8}{5}$ $\cancel{2}$

$\cancel{0}$ 1 $\cancel{2}$

$\cancel{\frac{1}{6}}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{7}{6}$ $\frac{3}{2}$ $\cancel{\frac{11}{6}}$



Ответ: $\frac{1}{3}$; ~~0,4; 0,5;~~ $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$; 1; $\frac{7}{6}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{8}{5}$

~~черновик~~

5. $\begin{cases}(x+a_1)(x^2+b_1x+6)=(x+a_2)(x^2+b_2x+8)\\(x+a_1)(x^2+b_1x+6)=(x+a_3)(x^2+b_3x+12)\end{cases}$ $a_1, a_2, b_1, b_2, a_3, b_3>0$

черновик

$x^3+(a_1+b_1)x^2+(a_1b_1+6)x+6a_1=x^3+(a_2+b_2)x^2+(a_2b_2+8)x+8a_2$

$\begin{cases}a_1+b_1=a_2+b_2=a_3+b_3=c\\a_1b_1+6=a_2b_2+8=a_3b_3+12\\6a_1=8a_2=12a_3\end{cases}$

$a_1=2a_3$

$a_2=1{,}5a_3$

$\begin{cases}2a_3(c-2a_3)+6=1{,}5a_3(c-1{,}5a_3)+8\\2a_3(c-2a_3)+6=a_3(c-a_3)+12\end{cases}$

$\begin{cases}0{,}5ca_3-1{,}75a_3^2-2=0\\ca_3-3a_3^2-6=0\end{cases}$

$-ca_3+3{,}5a_3^2+4=0$

$0{,}5a_3^2-2=0$

$a_3^2=4$ $a_3=\pm2$

$\left[\begin{array}{l}\cancel{a_3=2}\\\cancel{a_3=-2}\end{array}\right.$

I. $a_3=2$: $2c-12-6=0$
$c=9$

$a_1=4$
$b_1=5$
$a_2=3$
$b_2=6$
$a_3=2$
$b_3=7$

$S=27$

II. $a_3=-2$: не подх. под усл.

 ~~чистовик~~

5. $f_1(x)=(x+a_1)(x^2+b_1x+6)$ $\quad a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3>0$ чистовик

$f_2(x)=(x+a_2)(x^2+b_2x+8)$ $\quad a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3=S-?$

$f_3(x)=(x+a_3)(x^2+b_3x+12)$

$\forall x\in\mathbb{R}: f_1(x)=f_2(x)=f_3(x) \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R} \begin{cases}(x+a_1)(x^2+b_1x+6)=(x+a_2)(x^2+b_2x+8)\\(x+a_1)(x^2+b_1x+6)=(x+a_3)(x^2+b_3x+12)\end{cases}$

$\begin{cases}x^3+(a_1+b_1)x^2+(a_1b_1+6)x+6a_1=x^3+(a_2+b_2)x^2+(a_2b_2+8)x+8a_2\\x^3+(a_1+b_1)x^2+(a_1b_1+6)x+6a_2=x^3+(a_3+b_3)x^2+(a_3b_3+12)x+12a_3\end{cases}$

верно $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases}a_1+b_1=a_2+b_2=a_3+b_3\\a_1b_1+6=a_2b_2+8=a_3b_3+12\\6a_1=8a_2=12a_3\end{cases}$ $\quad \exists a_1+b_1=c$

$\begin{cases}a_1=2a_3\\a_2=1{,}5a_3\\a_1(c-a_1)+6=a_3(c-a_3)+12\\a_2(c-a_2)+8=a_3(c-a_3)+12\end{cases}$ $\begin{cases}2a_3(c-2a_3)=a_3(c-a_3)+6\\1{,}5a_3(c-1{,}5a_3)=a_3(c-a_3)+4\end{cases}$ $\begin{cases}a_3c-3a_3^2-6=0\\0{,}5a_3c-\frac{5}{4}a_3^2-4=0\end{cases}$

$0{,}5a_3^2=2$

$a_3^2=4$

$\left[\begin{array}{l}a_3=2, \cancel{a_3=2}\\a_3=-2\end{array}\right.$ ← не подх. под усл., что $a_3>0$

$a_3=2$, $c=9$ $\quad S=3c=27$

~~проверим, что~~

$\begin{cases}a_1=4\\a_2=3\\a_3=2\\b_1=5\\b_2=6\\b_3=7\end{cases} \Rightarrow f_1(x)=f_2(x)=f_3(x)$

Ответ: 27

~~черновик~~ черновик

$\cos\gamma = \frac{2343}{x}$

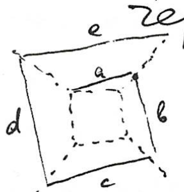
$a^2 = 1944^2 + \frac{x^2}{16} - 1944 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{2343}{x} = 1458^2$

$a^2 = 1944\left(1944 - \frac{2343}{2}\right) + \frac{x^2}{16}$

$16a^2 - 8 \cdot 1944(2 \cdot 1944 - 2343) = x^2$

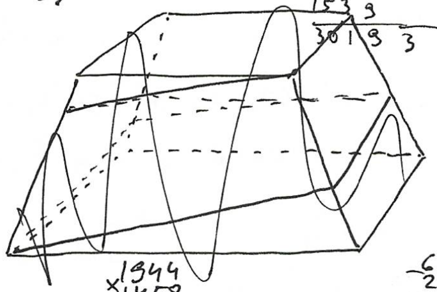
$\left(\frac{781}{162}\right)^2 a^2 + 781^2 \cdot 72$

$\times 1944 \cdot 2 = 3888$; -2349; 1539; $\times 1944$; 8656, 6156, 13851, 1539; 3019316



$\frac{h_1}{a} = \frac{h_1 h_2}{b} = \frac{h_2 h_3}{c} = \frac{h_3 h_4}{d} = \frac{h_4}{e} = \frac{1}{2}$

$a + b + c + d + e = 2H$



$256 + 192 = 448$; $+144 = 592$; $+108 = 700$

$\times 81 \cdot 81$; 648; 6561; $\times 72$; 13122; 45927; 472392

$6144 - 1458 = 4686$

$1458 : 3 = 486$; $486 \cdot 4 = 1944$

$\times 1944 \cdot 1458$; 15552; 9720; 7776; 1944; 2834352; $+472392$; 3306744

$6144 - 2343 = 3801$

$1102248 : 81$

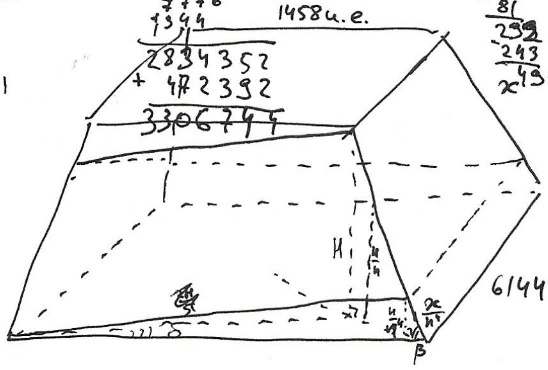
$744 : 3 = 248$

$\cos\alpha = \cos\beta \cos\delta$

$\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} + \frac{27}{256} + \frac{81}{1024} = $

$= \frac{256 + 3 \cdot 64 + 9 \cdot 16 + 27 \cdot 4 + 81}{1024}$

$1944 - 1458 = 486$

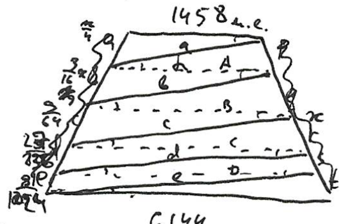


$1944(1944 - 486)$

$\operatorname{tg}\delta = \frac{2343}{3801} = \frac{781}{1267}$

$\cos\delta =$

$\operatorname{tg}\beta = \frac{H}{468652}$



~~$a+b+c+d+e = x$~~

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

$x^2 = H^2 + 4686^2 \cdot 2$

5 маленьких трап.

$\sim$ гр. гр. $\Rightarrow a, b, c, d, e$ – геом. прог.

$b = na,\ c = n^2 a,\ d = n^3 a,\ e = n^4 a$

$a\,\frac{n^5 - 1}{n - 1} = 2H$

$\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4} - \frac{9}{16}\right) = \frac{3}{16}$

$\left(\frac{39}{16} - \frac{27}{64}\right) = \frac{9}{64}$

$\frac{27}{64} -$

$A = k \cdot 1458 = h \cdot 1458$

$6144 = k^5 \cdot 1458$

$1944 - 243 = 17081$

$\cos\gamma = \frac{243 \cdot 4}{x}$

~~$\cos\gamma = \frac{4874^2}{2x}$~~

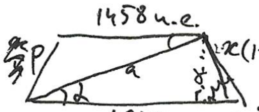
$\cos\gamma = \frac{241 \cdot p}{x} = \frac{2343}{x}$

$k^5 = \frac{6144}{1458} = \frac{3072}{729} = \frac{1024}{243} = \left(\frac{4}{3}\right)^5$

$k = \frac{4}{3}$

$\cos\gamma = \frac{243 \cdot p}{x} =$

$p = \frac{2343}{241}$



$1458 : 3 = 486$; $486 \cdot 4 = 1944$

$p = \frac{2343}{243} = \frac{781}{81}$

$a^2 = p^2 + 1944^2 - 2 \cdot p \cdot 1944 \cdot \frac{243}{p}$

$\cos\alpha = \frac{17081}{a}$

$2H = a \cdot \frac{(1024 - 243)3}{243} = a\,\frac{781}{81}$

$x^2 = \frac{781^2}{162^2} a + 781^2 \cdot 72$

$H = \frac{781}{162} a$

$\cos\alpha = \frac{a^2 + 1458^2 - \frac{x^2}{16}}{2 \cdot 1458 a} = \frac{a^2 + 1944^2 - \frac{x^2}{16}}{2 \cdot 1944 a}$

$1944 a^2 + 1944 \cdot 1458^2 - 1944 \cdot \frac{x^2}{16} = 1458 a^2 + \ldots$

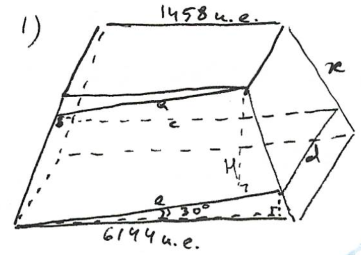
$\cos\alpha = \frac{a^2 + 1458^2 - \frac{x^2}{16}}{2 \cdot 1458 a} = \frac{1944^2 - 1944 \cdot \frac{2343}{2} + 1458^2}{2 \cdot 1458 a}$

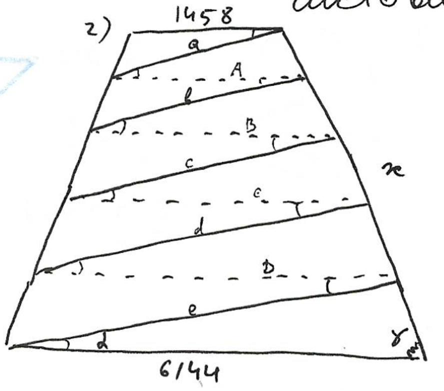
$482 a^2 + 1944 \cdot 1458 \cdot 482 - 482 \cdot \frac{x^2}{16} = 0$

$2343 : 3 = 781$

~~чистовик~~ чистовик

7.

1) 

2) 

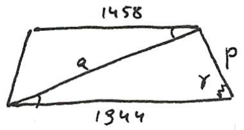
Нарисуем путь первооткрывателя на гранях пирамиды, а потом отобразим все получившиеся линии на одной грани (рис. 2). Очевидно, начало одной линии будет совпадать с ~~концом~~ высотой предыдущей, т.к. все грани одинаковы.

Получаются 5 маленьких трапеций, все из которых подобны друг другу $\Rightarrow \{1458, A, B, C, D, 6144\}$ и $\{a, b, c, d, e\}$ — геометрические прогрессии с одинаковым множителем, который назовём n

$A = 1458n$, $B = 1458n^2$, $\ldots$, $6144 = 1458n^5$

$n^5 = \frac{6144}{1458} = \left(\frac{4}{3}\right)^5 \qquad n = \frac{4}{3}$

$A = \frac{4}{3} \cdot 1458 = 1944$



$a+b+c+d+e = 2H$

$a\frac{n^5-1}{n-1} = 2H \qquad H = a \cdot \frac{(1024-243)\cdot 3}{243 \cdot 2} = \frac{781}{162}a$

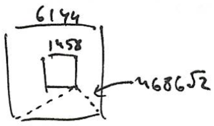
$\cos\gamma = \frac{6144-1458}{2x} = \frac{2343}{x}$

$\quad = \frac{1944-1458}{2p} = \frac{243}{p}$

$p = \frac{243}{2343}x = \frac{81}{781}x$

т. Пифаг.: $x^2 = H^2 + 4686^2 \cdot 2$

$x = \left(\frac{781}{81}\right)^2 p^2$



$\cancel{H^2 = 4686^2 \cdot 2 - x^2 = 4686^2 \cdot 2 - \left(\frac{781}{81}\right)^2 p^2}$

$p^2 = \left(\frac{81}{781}\right)^2 \left(H^2 + 781^2 \cdot 72\right) =$

$= \left(\frac{81}{781}\right)^2 H^2 + 81^2 \cdot 72$

т. cos: $a^2 = 1944^2 + p^2 - 2 \cdot 1944 \cancel{p} \cdot \frac{243}{\cancel{p}}$

$a^2 = 1944 \cdot 1458 + p^2$

$\left(\frac{162}{781}\right)^2 H^2 = 1944 \cdot 1458 + \left(\frac{81}{781}\right)^2 H^2 + 81^2 \cdot 72$

$3 \cdot \left(\frac{81}{781}\right)^2 H^2 = 3306744$

$\left(\frac{81}{781}\right)^2 H^2 = 1102248$

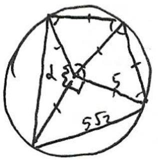
$H = \sqrt{1102248} \cdot \frac{781}{81}$

 ~~чистовик~~

чистовик

3.

I.

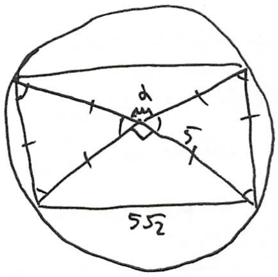


2 р/с $\triangle$ и 1 п/у $\triangle$ $\Rightarrow$ $\alpha = 360^\circ - 2\cdot 60^\circ - 90^\circ = 150^\circ$

$$S = \frac{1}{2}\cdot 25\left(\sin 150^\circ + \sin 90^\circ + 2\cdot \sin 60^\circ\right) = \frac{25}{2}\left(\frac{1}{2}+1+\sqrt{3}\right) =$$

$$= \frac{25(2\sqrt{3}+3)}{4}$$

II.



аналогично

$$S = \frac{25(2\sqrt{3}+3)}{4}$$

?

Ответ: $\frac{25(2\sqrt{3}+3)}{4}$

2. $3^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 4^x$? min $a>0$: $\nexists\, x>0$

$a \leq 3^{5-\frac{1}{x}} - \sin 4^x$

$x>0 \Rightarrow 3^{5-\frac{1}{x}} < 3^5$

$\sin 4^x \in [-1; 1]$

$3^{5-\frac{1}{x}} - \sin 4^x \xrightarrow[x\to 0]{} -\sin 1$