0 614016 800006

61-40-16-80
(161.24)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Шерова Темура Алишеровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата «13» апреля 2025 года

Подпись участника TShekov

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
61-40-16-80		+	+	∓	+	+	0	0	0

65 (шестьдесят пять) ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

61-40-16-80
(161.24)

ЧЕРН

$$\begin{cases} |2x+3|+|x+3|+(x+2)=|1+\sqrt{3}|-|1-\sqrt{3}| \\ x+2\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2x+3|+|x+3|+(x+2)=\underbrace{(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)}_{=2} \\ x\geq -2 \Rightarrow x\geq -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2x+3|+(x+3)+(x+2)=2 \\ x\geq -2 \end{cases}$$

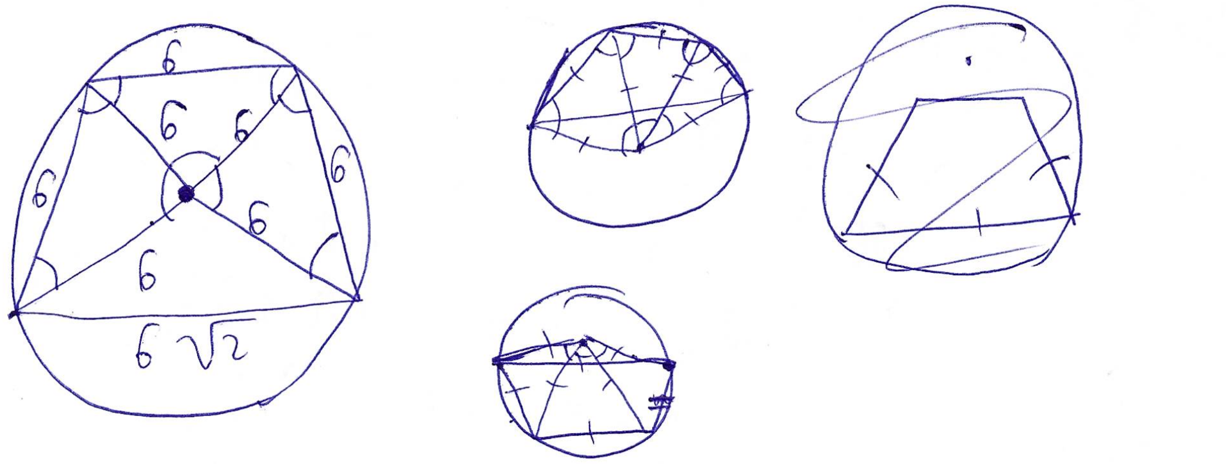
$$\begin{cases} |2x+3|=2-2x-5 \\ x\geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2x+3|=-2x-3 \\ x\geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x+3=-2x-3 \\ 2x+3=2x+3 \end{array}\right. \\ x\geq -2 \\ -2x-3\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 4x=-6 \\ 0=0 \end{array}\right. \\ x\geq -2 \\ 2x\leq -3 \end{cases}$$

$$\boxed{-2\leq x\leq -1{,}5}$$



ЧЕРН

$f_1 = x^3 + x^2 \cdot (a_1+b_1) + x(6 + a_1 b_1) + 6a_1$

$f_2 = x^3 + x^2 \cdot (a_2+b_2) + x(14 + a_2 b_2) + 14a_2$

$f_3 = x^3 + x^2 \cdot (a_3+b_3) + x(21 + a_3 b_3) + 21a_3$

$$\begin{cases} a_1+b_1 = a_2+b_2 = a_3+b_3 \\ 6 + a_1 b_1 = 14 + a_2 b_2 = 21 + a_3 b_3 \\ 6a_1 = 14a_2 = 21a_3 \end{cases}$$

$124 + \varepsilon$

$124+\varepsilon+\sin 3x$

$a_2 = \frac{3}{7} a_2$

$a_3 = \frac{2}{7} a_1$

$6 + 5^{3-\frac{1}{x}} > (125-1) + \sin 3x$

$5^{3-\frac{1}{x}} > \varepsilon$

$5^{3-\frac{1}{x}} - 125 \geq \sin 3x - 1$

$5^{3-\frac{1}{x}} < 125$

$3-\frac{1}{x} < 3$

$\frac{1}{x} > 0$

$x > 0$

$f_1(-a_1) = f_2(-a_1) = f_3(-a_1) = 0$

$a_3 = a_2 : a_1 = a_2 = a_3 = 0$ $\otimes$

$a_2 = a_1 : a_3 \neq a_2 :$

$a > 125^{2\pi k}$

$3^{124} \leq \pi + 2\pi k$

$3 - \frac{1}{x} > \log_5 \varepsilon$

$a_i = a_j : a_1 = a_2 = a_3 = 0$ $\otimes$ $(i \neq j)$

$\frac{1}{x} < 3 - \log_5 \varepsilon$

$x > \frac{1}{3-\log_5 \varepsilon}$

$x^2 + 2x + 1$

$\leq 2 \leq -1 + (-1)$

$\frac{3^{124} - \pi}{2\pi} \leq k \leq \frac{3^{124}}{2\pi}$

$= \frac{3^{124}}{2\pi} - \frac{1}{2}$

$-a_1 - a_3 = b_2$

$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 =$

$= a_1 + (a_2 + a_3) +$

$+ a_2 + (a_1 + a_3) +$

$+ a_3 (a_1 + a_2) =$

$= 3(a_1 + a_2 + a_3)$

$-b_1 = -a_2 - a_3$

$-b_2 = -a_1 - a_3$

$-b_3 = -a_2 - a_1$

$$\begin{cases} a_2 a_3 = 6 \\ a_1 a_3 = 14 \\ a_1 a_2 = 21 \end{cases}$$

$\frac{6}{49_7} \cdot 7 \cdot 4^2$

$a_1 \cdot \frac{3}{7} a_1 = 6^2$

$a_1 = \sqrt{14}$

$a_2 = \frac{3}{7}\sqrt{14}$

$a_3 = \frac{2}{7}\sqrt{14}$

$a_1 \cdot \frac{3}{7} a_1 = 21^7$

$a_1 = 7$

$a_2 = 3$

$a_3 = 2$

61-40-16-80
(161.24)

ЧЕРН

$a^3 + 3a^2(b-c) + 3a(b-c)^2 + (b-c)^3 = a^3 + 3a^2b - 3a^2c + 3ab^2 - 6abc + 3ac^2 + b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3$

$a^3 + b^3 - c^3 = (a+b-c)^3$

$b^3 - c^3 = (a+b-c)^3 - a^3$

$b^3 - c^3 = (b-c)((a+b-c)^2 + a(a+b-c) + a^2)$

$(b-c)(b^2+bc+c^2)(b-c)(a^2+b^2+c^2 + 2ab - 2bc - 2ac) + a^2 + ab - ac + a^2)$

$(b-c)(b^2+bc+c^2) = (b-c)(3a^2+b^2+c^2 + 3ab - 3ac - 2bc)$

$\left[\begin{array}{l} b = c \\ \cancel{b^2} + bc + \cancel{c^2} = 3a^2 + \cancel{b^2} + \cancel{c^2} + 3ab - 3ac - 2bc \quad /:3 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} b = c \\ a^2 + ab - ac - bc = 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} b = c \\ (a+b)(a-c) = 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} b = c \\ a = -b \\ a = c \end{array}\right.$

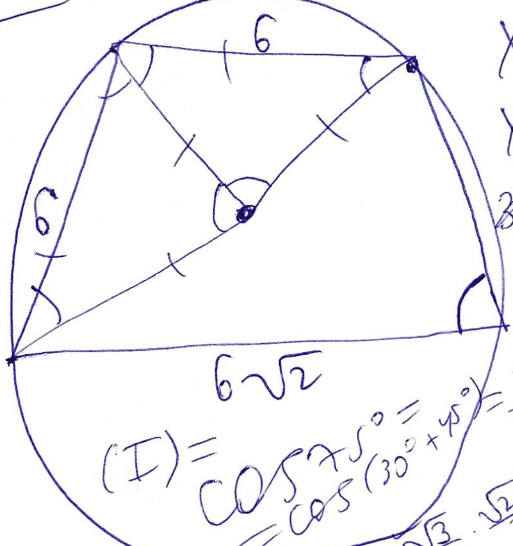
$\left[\begin{array}{l} \cos(\pi x) = -\cos(2\pi x) \\ \cos(\pi x) = \cos(4\pi x) \\ \cos(2\pi x) = \cos(4\pi x) \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \cos(\pi x) = \cos(\pi - 2\pi x) \quad (I) \\ \text{— ,, —} \quad (II) \\ \text{— ,, —} \quad (III) \end{array}\right.$

(I): $\left[\begin{array}{l} \cancel{\pi} x = \cancel{\pi} - 2\cancel{\pi} x + 2\cancel{\pi} n_1 \\ \cancel{\pi} x = 2\pi x - \pi + 2\pi m_1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 3x = 1 + 2n_1 \\ x = 1 - 2m_1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}n_1 \\ x = 1 - 2m_1 \end{array}\right.$

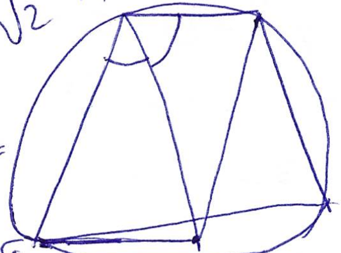
ЧЕРН



$x^2+72-12\sqrt{2}\cdot x\cdot\frac{1}{2}=$

$x^2-6\sqrt{2}\cdot x-36=0$

$=108$



$\cancel{36+18}$

$18+36=$

$=54$

$=\frac{3\sqrt{2}\pm 3\sqrt{6}}{}$

$(I)=\cos 75^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ)=$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=$

$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$36\pm 36\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=18$

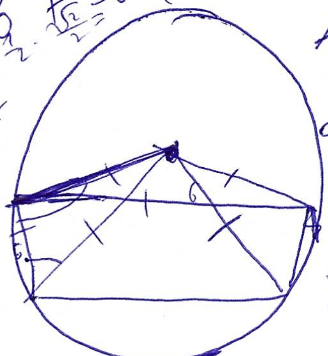
$\frac{18}{6\sqrt{2}}$

$\cancel{18}+x>6\sqrt{2}$

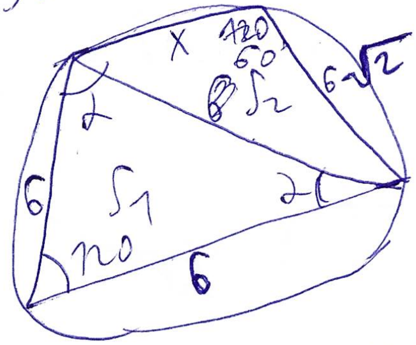
$x<18+6\sqrt{2}$

$x>6\sqrt{2}+18$

$2\cdot 36+\cancel{x}x\cdot 36\cdot\frac{1}{x}=108$



$3\sqrt{2}+3\sqrt{6}$



(I):

$\frac{6}{\sin\alpha}\ \frac{x+6\sqrt{2}}{}=12^2$

$\sin\alpha=\frac{1}{2}$

45 30

~~45 150~~

$\alpha=30^\circ$ / $\cancel{\alpha=150^\circ}$

150 160

$\cancel{S_1=\frac{6\sqrt{3}}{4}}$

$\cancel{S_2=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$

135 30

~~135~~

(I): $S_1=\frac{1}{2}\cdot 36\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

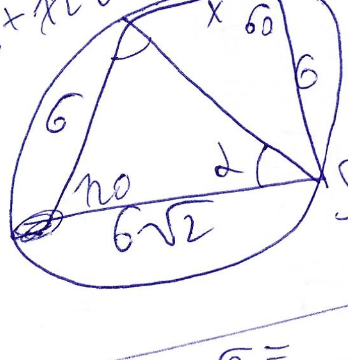
$S_2=\frac{1}{2}x\cdot 6\sqrt{2}\cdot\cancel{60}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$30+45=75$

105

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(36+6\sqrt{2}\cdot x)$

$108+x^2\cdot 6\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$



(II):

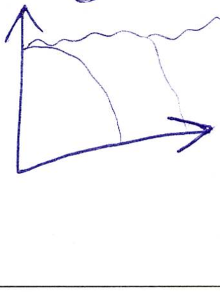
$5^{3-\frac{1}{x}}-\sin 3^x\geq a$

$\frac{6\sqrt{2}}{\sin\beta}=x^2$

$5^{3-\frac{1}{x}}-\sin 3^x\geq a$

$18\sqrt{12}=18\cdot 2\sqrt{3}=$

$=36\sqrt{3}$



$(5^{3-\frac{1}{x}}-\sin 3^x)'=$

$=5^{3-\frac{1}{x}}\cdot\ln 5\cdot\left(3-\frac{1}{x}\right)'-$

$-\cos 3^x\cdot(3^x)'=5^{3-\frac{1}{x}}\cdot$

$\cdot\ln 5\cdot\frac{1}{x^2}-3^x\cdot\cos 3^x\cdot\ln 3$

61-40-16-80
(161.24)

1.

$$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{x^2+6x+9}+(\sqrt{x+2})^2=$$
$$=\sqrt{4+\sqrt{12}}-\sqrt{4-\sqrt{12}}$$

$$\begin{cases}|2x+3|+|x+3|+x+2=|1+\sqrt{3}|-|1-\sqrt{3}|\\ x+2\geq 0\end{cases}$$

$\Rightarrow x+3\geq 0 \Rightarrow |x+3|=x+3$

$$\begin{cases}|2x+3|+x+3+x+2=(1+\sqrt{3})-(\sqrt{3}-1)\\ x\geq -2\end{cases}$$

$$\begin{cases}|2x+3|=2-2x-5\\ x\geq -2\end{cases}$$

$$\begin{cases}|2x+3|=-2x-3\\ x\geq -2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2x+3=-2x-3\\ 2x+3=2x+3\end{array}\right.\\ x\geq -2\\ -2x-3\geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}4x=-6\\ 0=0\end{array}\right.\\ x\geq -2\\ x\leq -1{,}5\end{cases}$$

Ответ: $[-2; -1{,}5]$

5.

$f_1(0)=6a_1, f_2(0)=14a_2, f_3(0)=21a_3 \Rightarrow \underbrace{6a_1=14a_2=21a_3}_{(*)}$

Если $a_i=a_j$ при $i\neq j$, то из $(*)$ $a_1=a_2=a_3=0$, что противоречит условию, поэтому все a_i попарно различны.

$f_1(-a_2)=f_2(-a_2)=f_3(-a_2)=0 \Rightarrow (-a_2)$ — корень (x^2+b_1x+6)

из рассужд-й выше

Аналогично $(-a_3)$ — корень (x^2+b_1x+6)

Точно так же получаем, что $(-a_1)$ и (a_3) — корни (x^2+b_2x+14) и $(-a_1)$ и $(-a_2)$ — корни (x^2+b_3x+21).

По т. Виета
$$\begin{cases}-b_1=-a_2-a_3\\ -b_2=-a_1-a_3\\ -b_3=-a_1-a_2\\ a_2a_3=6\\ a_1a_3=14\\ a_1a_2=21\end{cases}$$

$\Rightarrow b_1+b_2+b_3=2(a_1+a_2+a_3)$ (V)

из $(*)$ $a_2=\frac{3}{7}a_1$: $a_1a_2=21 \Rightarrow a_1^2\cdot\frac{3}{7}=21 \Leftrightarrow a_1=7$ т.к. $a_1>0$ по усл.

$a_2 = \frac{3}{7} a_1 = 3 \quad a_3 \underset{\uparrow}{=} \frac{2}{7} a_1 = 2$

из (*)

Легко проверить, что все a_i удовл. системе.

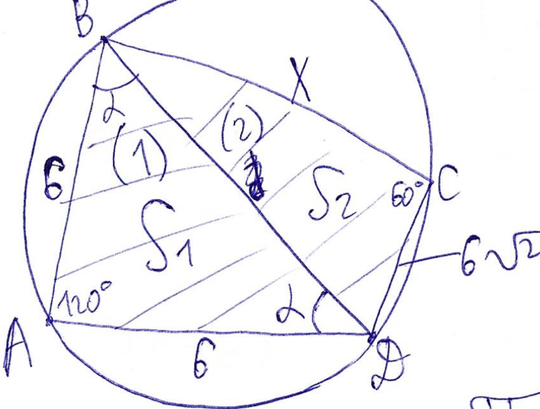
$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 \underset{\text{из (V)}}{=} 3(a_1 + a_2 + a_3) =$

$= 3(7 + 3 + 2) = 36$

Ответ: 36.

3.

1 случай: стороны длины 6 рядом



По обобщ. т. синусов $\frac{6}{\sin\alpha} = 2 \cdot 6 \Longleftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \alpha = 30^\circ$

т.к. тр-к (1) р/б с углом α при осн.

$\angle BAD = 180^\circ - 2\alpha = 120^\circ$

$\Downarrow$ т.к. ABCD — впис.

$\angle BCD = 60^\circ$

По т. косинусов

$2 \cdot 36 - 2 \cdot 36 \cdot \cos 120^\circ = BD^2 = x^2 + 72 - 2x 6\sqrt{2} \cdot \cos 60^\circ = x^2 - 6\sqrt{2} \cdot x + 72$

$\parallel$

108

$\Downarrow$

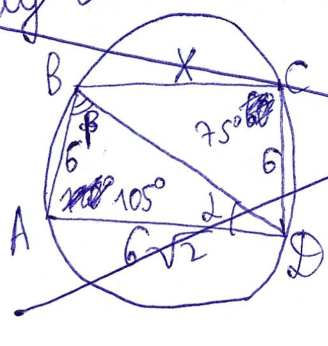
$x^2 - 6\sqrt{2}\, x - 36 = 0 \qquad D/4 = 18 + 36 = 54 > 0$

$x = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}$

(т.к. $x > 0$)

$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} 6 \cdot 6 \cdot \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot x \cdot 6\sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (36 + 6\sqrt{2}(3\sqrt{2} + 3\sqrt{6})) = 9\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 27 + 18\sqrt{3}$

2 случай: стороны длины 6 напротив друг друга



По обобщ. т. синусов $\frac{6}{\sin\alpha} = 2 \cdot 6$, тогда $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\frac{6\sqrt{2}}{\sin\beta} = 2 \cdot 6$, тогда $\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда $\alpha = 30^\circ$ или 150° и $\beta = 45^\circ$ или 135°.

т.к. из $\triangle BAD$ $\alpha + \beta < 180^\circ$, то либо $(\alpha, \beta) = (30^\circ, 45^\circ)$ (I), либо $(\alpha, \beta) = (30^\circ, 135^\circ)$ (II)

(I): $\angle BAD = 180° - \alpha - \beta = 105° \Rightarrow \angle BCD = 75°$
т.к.
ABCD-влис.

По т. косинусов:

$36 + 72 - 2 \cdot 6 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \cos 105° = BD^2 = x^2 + 36 - 12x \cdot \cos 75°$

$\parallel$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\parallel$

$108 + 18\sqrt{2} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})$ $\qquad$ $x^2 + 36 - 3x(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

$x^2 - 3x(\sqrt{6} - \sqrt{2}) - 72 - 18\sqrt{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 0$

$x^2 - 3x(\sqrt{6} - \sqrt{2}) - 36 - 36\sqrt{3} = 0$

$D =$

4.

Пусть $a=\cos(\pi x)$, $b=\cos(2\pi x)$, $c=\cos(4\pi x)$

$a^3+b^3-c^3=(a+b-c)^3$

$(b-c)(b^2+bc+c^2)=(b-c)((a+b-c)^2+a(a+b-c)+a^2)$

$$\left[\begin{array}{l} b=c \\ \cancel{b^2}+bc+\cancel{c^2}=3a^2+\cancel{b^2}+\cancel{c^2}+3ab-3ac-2bc \mid :3 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} b=c \\ a^2+ab-ac-bc=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} b=c \\ a=-b \\ a=c \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos(\pi x)=-\cos(2\pi x)\ (I) \\ \cos(\pi x)=\cos(4\pi x)\ (II) \\ \cos(2\pi x)=\cos(4\pi x)\ (III) \end{array}\right.$$

(I): $\cos(\pi x)=\cos(\pi-2\pi x)$ $\quad k_1, n_1 \in \mathbb{Z}$

$$\left[\begin{array}{l} \pi x=\pi-2\pi x+2\pi k_1 \\ \pi x=2\pi x-\pi+2\pi n_1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}k_1 \rightarrow 0{,}3\le\frac{1}{3}+\frac{2}{3}k_1\le 1{,}6 \\ x=1-2n_1 \rightarrow (1-2n_1)\in\mathbb{Z} \Rightarrow 1-2n_1=1 \end{array}\right.$$

$n_1=0$

$0{,}9\le 1+2k_1\le 4{,}8$

$-0{,}1\le 2k_1\le 3{,}8$

~~$0{,}05\le k_1$~~

$-0{,}05\le k_1\le 1{,}9$

$k_1=0;1$

(II): $$\left[\begin{array}{l} \pi x=4\pi x+2\pi k_2 \\ \pi x=-4\pi x+2\pi n_2 \end{array}\right.$$ $\quad k_2, n_2\in\mathbb{Z}$

$$\left[\begin{array}{l} x=-\frac{2}{3}k_2 \rightarrow 0{,}3\le-\frac{2}{3}k_2\le 1{,}6 \\ x=\frac{2}{5}n_2 \rightarrow 0{,}3\le\frac{2}{5}n_2\le 1{,}6 \end{array}\right.$$

$-4{,}8\le 2k_2\le -0{,}9$

$-2{,}4\le k_2\le -0{,}45$

$k_2=-2;-1$

$1{,}5\le 2n_2\le 8$

$0{,}75\le n_2\le 4$

$n_2=1;2;3;4$

(III): $\left[\begin{array}{l} 2\pi x = 4\pi x + 2\pi k_3 \\ 2\pi x = -4\pi x + 2\pi n_3 \end{array}\right.$ $k_3, n_3 \in Z$

$\left[\begin{array}{l} x = -k_3 \longrightarrow (-k_3) \in Z \Rightarrow -k_3 = 1 \Leftrightarrow k_3 = -1 \\ x = \frac{n_3}{3} \longrightarrow 0{,}3 \le \frac{n_3}{3} \le 1{,}6 \end{array}\right.$

$0{,}9 \le n_3 \le 4{,}8$

$n_3 = 1; 2; 3; 4$

В итоге:

(I): $x = \frac{1}{3}; 1; 1$ (II): $x = \frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{5}; \frac{4}{5}; \frac{6}{5}; \frac{8}{5}$

(III): $x = 1; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}$

Ответ: $1; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{5}; \frac{4}{5}; \frac{6}{5}; \frac{8}{5}$.

г.

Заметим, что $\forall x \in (0; +\infty)$ $5^{3-\frac{1}{x}} < 5^3 = 125$.

~~Если $a \le 125$, то~~ Функция $5^{3-\frac{1}{x}}$ возрастает на $(0; +\infty)$. ~~Если $a \le 126$, то найдется такое $x_0 > 0$, что $5^{3-\frac{1}{x_0}} - \sin 3^{x_0} >$~~ (т.е. больше любого наперед заданного числа, меньшего 125)

$\Rightarrow$ Если $a \le 125$, то можно подобрать такое x_0, что $\sin 3^{x_0} < 0$, тогда $a + \sin 3^{x_0} < 125$, при этом за счёт возрастания $5^{3-\frac{1}{x}}$ можно обеспечить $5^{3-\frac{1}{x_0}} \ge a + \sin 3^{x_0}$, т.е. решение на $(0; +\infty)$ будет.

Если $125 < a < 126$ (т.е. $a = 125 + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$), то найдется такое $x_0 > 0$, что $\sin 3^{x_0} < -\varepsilon$ (тогда $a + \sin 3^{x_0} < 125$) при этом за счёт возрастания $5^{3-\frac{1}{x}}$ ~~$\ge a + \sin 3$~~ можно обеспечить $5^{3-\frac{1}{x_0}} \ge a + \sin 3^{x_0}$, т.е. решение на $(0; +\infty)$ будет.

При $a=126$ $5^{3-\frac{1}{x}} \geq a+\sin 3^x \geq 126-1=125$, т.е. $5^{3-\frac{1}{x}} \geq 125$. Последнее нер-во не имеет решений на $(0;+\infty)$, поэтому и исходное нер-во не имеет решений на $(0;+\infty)$.

Ответ: 126.

ЧЕРН