



20-39-73-20
(162.13)



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 10

Место проведения Екатеринбург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Лауреатов
наименование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Шимихуров Дмитрий Сергеевич
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

М

Задача 1.

Условие.

$$\sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} - \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} \geq \log_2 x + 1$$

$$x > 0$$

$$\log_2 x = a$$

$$a^2 + 3a - 4 \geq 0 \Rightarrow a \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$$

$$a^2 + 3a - \sqrt{a^2 + 3a - 4} \geq 0$$

$$a^2 + 3a = b$$

$$b - \sqrt{b - 4} \geq 0 \Rightarrow b \geq \sqrt{b - 4}$$

$$b^2 = b - 4 \Rightarrow b^2 - b + 4 = 0 \quad D = 1 - 4 \cdot 4 < 0 \Rightarrow b > \sqrt{b - 4}$$

$$\sqrt{a^2 + 3a} - \sqrt{a^2 + 3a - 4} = a + 1 \Rightarrow a^2 + 3a - \sqrt{a^2 + 3a - 4} =$$

$$= a^2 + 2a + 1 \Rightarrow a - 1 = \sqrt{a^2 + 3a - 4} \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = a^2 + 3a - 4 \Rightarrow 5a = 5$$

$$\Rightarrow a = 1$$

$$\sqrt{4 + b} - \sqrt{4 + b - 4} = \sqrt{10 - \sqrt{b}} \geq 3 \Rightarrow 10 - \sqrt{b} \geq 9$$



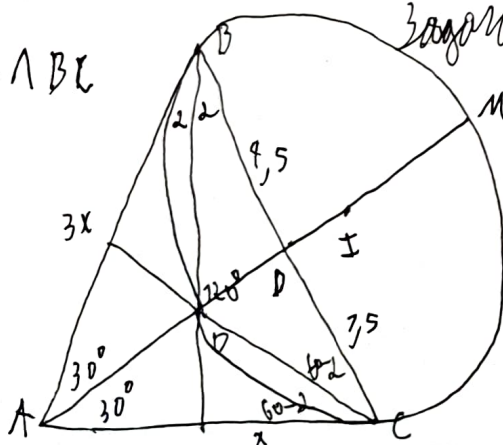
$$\Rightarrow a \in (-\infty; 1]$$

$$\Rightarrow a \in (-\infty; -4] \cup \{1\} \Rightarrow x \in \left(0; \frac{1}{16}\right] \cup \{2\}$$

$$f(x_0) = 16x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{16} \Rightarrow f(x_0) = 1 \\ x_0 = 2 \Rightarrow f(x_0) = 32 \end{cases}$$

Ответ: $\frac{1}{16}, 2, 32$

$$D = AO \cap BE$$



Задача 2.

м. ч. 16 - 0,5 балла

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{3}{7} \Rightarrow BD = 9,5 \quad DC = 7,5$$

I - центр окр. OBC

$$R = \frac{BC}{\sin 120^\circ} = \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

Задача

Умнож

$$\overline{abcd} \quad a+b+c+d:2$$

$$\Rightarrow 7:2 \times 1$$

~~а+в~~

$$\overline{abcd} + 7 =$$

$$\overline{a,b,c,d+7} \Rightarrow a+b+c+d+7:2$$

$$\overline{a,b,c+7,0} \Rightarrow a+b+c+7:2 \quad d=9, c \neq 9$$

$$\overline{a,b+7,0,0} \Rightarrow a+b+7:2$$

$$c=d=9 \Rightarrow a+b+18:2 \Rightarrow 17:2 \times 1$$

$$\overline{a+7,0,0,0} \Rightarrow \begin{cases} \overline{abcd} = 999 - \text{не подходит} \\ \overline{abcd} = 1999 - \text{не подходит} \end{cases}$$

1. $a=0$

$$\overline{bc9}$$

$$\overline{b,c+7,0} \Rightarrow b=c+7$$

$$\Rightarrow \overline{bc9} = \overline{c+7,c,9} \Rightarrow 2c+7=9 \Rightarrow c=4$$

$$549: 5+4=9$$

$$550: 5=5$$

2. $a=7$

$$\overline{7bc9}$$

$$\overline{7,b,c+7,0} \Rightarrow$$

$$b=c+2 \Rightarrow \overline{7bc9} = \overline{7,c+2,c,9} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2c+3=9 \Rightarrow c=3: 7539: 7+5+3=9 \\ 7540: 7+5=5 \end{cases}$$

$$2c+2=10 \Rightarrow c=4: 7649: 6+4=1+9$$

$$7650: 7+5=6$$

$$2c+11=1 \Rightarrow c=-5 \times 1$$

$$b+1=c+7 \Rightarrow b=c \Rightarrow \overline{7bc9} = \overline{7889} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2b+1=9 \Rightarrow b=4: 7449: 7+4+4=9 \\ 7450: 7+4=5 \end{cases}$$

$$2b=10 \Rightarrow b=5: 7559: 5+5=1+9$$

$$7560: 7+5=6$$

$$2b+9=9 \Rightarrow b=0 \times 1$$

3. $a=2 \Rightarrow b \leq 3$

$$\overline{2bc9}$$

$$\overline{2,b,c+7,0} \Rightarrow$$

$$b=c+3 \Rightarrow \overline{2bc9} = \overline{2,c+3,c,9} \Rightarrow b \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} b=3 \\ c=0 \end{cases}$$

$$2309 - \text{не подходит}$$

$$\begin{cases} b+2=c+7 \Rightarrow b=c-1 \\ b=1 \Rightarrow c=2 \\ b=2 \Rightarrow c=3 \end{cases}$$

Числовые

$$\Rightarrow \begin{cases} b=0 \Rightarrow c=1: 2019 - \text{не ч.} \\ b=1 \Rightarrow c=2: 2129 - \text{не ч.} \\ b=2 \Rightarrow c=3: 2239 - \text{не ч.} \\ b=3 \Rightarrow c=4: 2349: 2+3+4=9 \\ 2350: 2+3=5 \end{cases}$$

549; 1539; 1649; 1749; 1559; 2349

Ответ: 6 чисел

Задача 3.

$$\cos x \geq 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\begin{aligned} -3 \sin x \geq 0 \Rightarrow \sin x \leq 0 \Rightarrow x \in [\pi; 2\pi] \Leftrightarrow x \in [-\pi; 0] \\ \Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x \leq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{\cos x} \geq \sqrt{-3 \sin x} \Rightarrow \cos x \geq -3 \sin x \Rightarrow 1 \geq -3 \tan x \Rightarrow \tan x \geq -\frac{1}{3}$$

$$\sqrt{\cos x} \geq -2\sqrt{-3 \sin x}$$

$$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3 \sin x} > 4\sqrt{\cos x} - 4\sqrt{-3 \sin x} \Rightarrow 6\sqrt{-3 \sin x} > 3\sqrt{\cos x}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{-3 \sin x} > \sqrt{\cos x} \Rightarrow -12 \sin x > \cos x \Rightarrow -12 \tan x > 1 \Rightarrow \tan x < -\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{12} > \tan x \geq -\frac{1}{3} \Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi \right]$$

$$\Rightarrow x \in \left[\arctan -\frac{1}{12}; \arctan -\frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi \right] + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$