0 792662 630007

79-26-62-63
(161.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Шкробова Юрия Владимировича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
79-26-62-63	70	+.	+.	+.	±.	+.	—	—	—

70 (семьдесят) Перцова Мухаева

79-26-62-63 (161.6)

→ Черновик ←

$f_1(-a_1)=0 \quad \frac{5x}{2}=\frac{1}{2}+k$

$5x=2+2k$

$f_2(-a_1)=0 \Rightarrow a_1 \forall x$

$f_2(-a_3)=0 \quad -a_1-a_3=-b_2$

$\sqrt{(2x+3)^2}+\sqrt{(3x+2)^2}+(x+1)$

$1+\frac{2}{3}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$

$|2x+3|+|3x+2|+x+1=N$

$-(x+1)\geqslant 0$

$x+1\leqslant 0$

$x\leqslant -1$

$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{1+1}$

$\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}=\frac{7+\sqrt{24}-7+\sqrt{24}}{\sqrt{7+\sqrt{24}}+\sqrt{7-\sqrt{24}}}=\frac{2\sqrt{24}}{}$

$(\sqrt{a})^2=a$

$2t^2-t-1=0$

$a_1+a_3=b_2$

$(\sqrt{-4})^2=4$

$t=2t^2-1$

$t=1$

$t=-\frac{1}{2}$

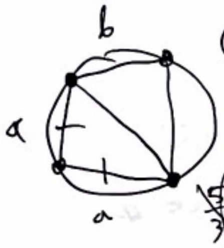
$a_1+a_2=b_3$

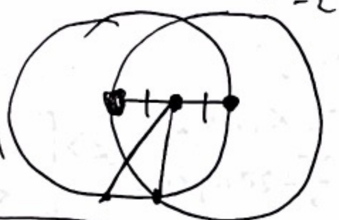
$a_2+a_3=b_1$

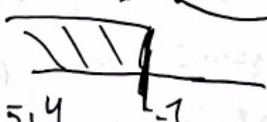
$\cos^2(1+\cos^2 x)$

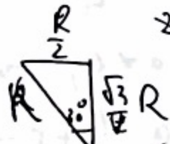
$\frac{7}{3}<1{,}8$

$7<5{,}4$

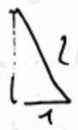








$2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}$



1) + +

$3{,}5<5{,}4$

$x>-\frac{3}{2}\,;\ x>-\frac{2}{3}$

$\cos 60^\circ=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$(a-b+c)(a-b+c)=a^2-ab+ac$

$+\cos 120=-\cos 60$

$12a_1=15a_2=20a_3$

$-ab+b^2-bc \quad =-\frac{1}{2}$

$+$

$ac-bc+c^2 \quad 120=\frac{2\pi}{3}$

$(a-b+c)^3=a^3-b^3+c^3-1$

$=$

$(a-b+c)^3-c^3=a^3-b^3$

$(a^2+b^2+c^2)+2(-ab-bc+ac)$

$(a-b)((a-b+c)^2+c(a-b+c)+c^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a=b \quad \cos\pi x=\cos 2\pi x$

$c(c-b)+ac-ab=c(c-b)+a(c-b)=0$

$\cancel{a^2}+\cancel{b^2}+c^2-2ab-2bc+2ac+ac-bc+c^2+c^2=\cancel{a^2}+ab+\cancel{b^2} \quad (c-b)(c+a)=0$

$3c^2-3ab-3bc+3ac=0$

$c^2-ab-bc+ac=0 \quad c_1=b$

$c^2+(a-b)c-ab=0 \quad c_2=-a$

Чистовик
№4

Сделаем замену $a=\cos\pi x$, $b=\cos 2\pi x$, $c=\cos 4\pi x$

$$a^3-b^3+c^3=(a-b+c)^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b+c)^3-c^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)\left((a-b+c)^2+c(a-b+c)+c^2\right)$$

Отсюда уже сразу видим решение $a=b$

$$\cos\pi x=\cos 2\pi x$$

$$\cos\pi x=2\cos^2\pi x-1$$

$$0=2\cos^2\pi x-\cos\pi x-1$$

$$0=2(\cos(\pi x)-1)(\cos(\pi x)+\tfrac{1}{2})$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\pi x=1\\ \cos\pi x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\pi x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \pi x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{2}{3}+2k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Теперь пусть $a\neq b$, поэтому уберем скобку $(a-b)$

$$a^2+ab+b^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac+ac-bc+c^2+c^2$$

$$0=3c^2-3ab-3bc+3ac$$

$$c^2-bc+ac-ab=0$$

$$c(c-b)+a(c-b)=0$$

$$(c-b)(c+a)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}c=b\\ c=-a\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4\pi x=\cos 2\pi x\\ \cos 4\pi x=-\cos\pi x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\cos^2 2\pi x-\cos 2\pi x-1=0\\ 2\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}2(\cos(2\pi x)-1)(\cos(2\pi x)+\frac{1}{2})=0\\ 2\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2\pi x=1\\ \cos 2\pi x=-\frac{1}{2}\\ \cos\frac{5\pi x}{2}=0\\ \cos\frac{3\pi x}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\pi x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ 2\pi x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \frac{5\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \frac{3\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{1}{3}+k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{1+2k}{5},\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{1+2k}{3},\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

79-26-62-63
(161.6)

Чистовик
№4 (продолжение)

В итоге имеем вот такие серии подходящих корней

1) $x=2k,\ k\in\mathbb{Z}$
2) $x=\frac{2}{3}+2k,\ k\in\mathbb{Z}$
3) $x=k,\ k\in\mathbb{Z}$
4) $x=\frac{1}{3}+k,\ k\in\mathbb{Z}$
5) $x=\frac{1+2k}{5},\ k\in\mathbb{Z}$
6) $x=\frac{1+2k}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

Из серии 1 ничего не подходит

Из серии 2 подходит $x=\frac{2}{3}$

Из серии 3 подходит $x=1$

Из серии 4 подходит $x=\frac{1}{3}$, $x=\frac{4}{3}$

Из серии 5 подходит $x=1$, $x=\frac{7}{5}$, $x=\frac{9}{5}$, $x=\frac{3}{5}$

Из серии 6 подходит $x=\frac{1}{3}$, $x=1$, $x=\frac{5}{3}$

В итоге ответ:

$$x=\frac{2}{3},\ x=\frac{1}{3},\ x=1,\ x=\frac{5}{3},\ x=\frac{7}{5},\ x=\frac{9}{5},\ x=\frac{4}{3},\ x=\frac{3}{5}$$

Черновик

$2^{5-\frac{1}{x}} \geq 2^5$

$5-\frac{1}{x} \leq 5$

$2^{5-\frac{1}{x}} \leq 2^5 \leq a$

$2^5 > a-1$

$a \geq 2^5+1$

$2^{5-\frac{1}{x}} < 2^5 \leq$

360
210
150

$a_1+a_2=b_3$

$a_1a_2=20$

$a_2+a_3=b_1$

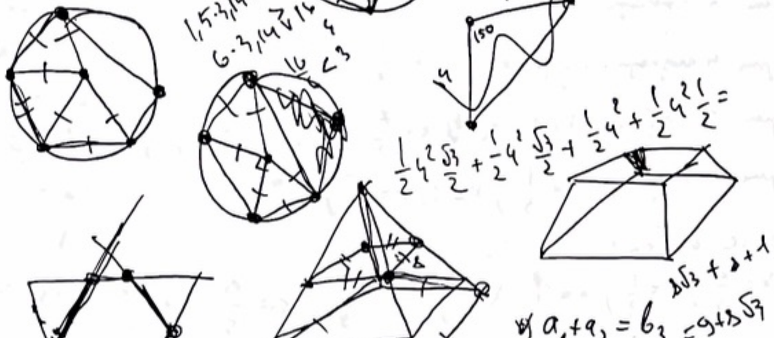
$a_2a_3=12$

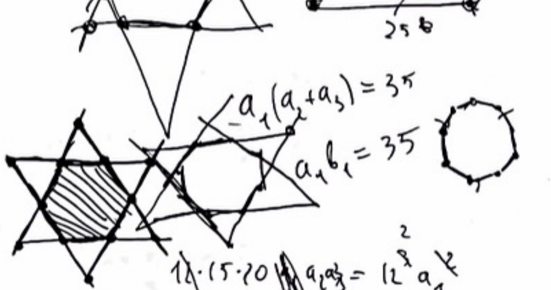
$a_1+a_3=b_2$

$a_1a_3=15$

$a_1(a_2+a_3)=35$

$a_1b_1=35$





79-26-62-63
(161.6)

Чистовик

№2

т.к. $x>0$, то $\frac{1}{x}>0 \Rightarrow -\frac{1}{x}<0 \Rightarrow 5-\frac{1}{x}<5 \Rightarrow 2^{5-\frac{1}{x}}<2^5$ (из монотонности)

Откуда очевидно, что ответ это $a=2^5+1$, ибо тогда

$a+\sin 2^x \geq a-1 = 2^5+1-1=2^5>2^{5-\frac{1}{x}} \Rightarrow a+\sin 2^x > 2^{5-\frac{1}{x}}$ для $x>0$

Чего мы и добивались

Любое $a<2^5+1$ нам не подойдет ибо тогда

$a+\sin 2^x \geq a-1 = 2^5+1-\varepsilon-1=2^5-\varepsilon$, $\varepsilon>0$

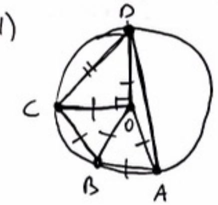
что не гарантирует невыполнение неравенства, т.к $2^{5-\frac{1}{x}}<2^5$ и ~~оно~~ $2^{5-\frac{1}{x}}$ может быть сколь угодно близко к 2^5

Ответ: $a=2^5+1=33$.

№3

Рассмотрим два случая

1)



Здесь длины равны $4, 4, 4\sqrt{2}$ в порядке обхода

O - центр окружности

т.к. $AB=4=4=OB=OA \Rightarrow \triangle OBA$ — правильный

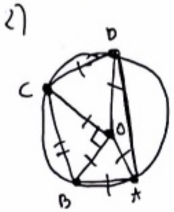
аналогично $\triangle OBC$ — правильный. т.к.

$OC^2+OD^2=32=CD^2$ то по т. Пифагора

$\angle COD=90°$. т.к $\angle BOA=\angle COB=60°$, то $\angle DOA=360-\angle COD-\angle COB-\angle BOA=360-60-60-90=150°$

Тогда $S_{ABCD}=S_{COD}+S_{COB}+S_{BOA}+S_{DOA}=\frac{1}{2}4^2+\frac{1}{2}4^2\sin 60°+\frac{1}{2}4^2\sin 60°+\frac{1}{2}4^2\sin 150°=8+8\frac{\sqrt{3}}{2}+8\frac{\sqrt{3}}{2}+4=12+8\sqrt{3}$

2)



Здесь длины равны $4, 4\sqrt{2}, 4$ в порядке обхода

Абсолютно аналогично получим, что $\triangle OBA$ и COD — правильные, а $\triangle CBO$ — прямоугольный

Тогда $S_{ABCD}=\frac{1}{2}4^2\sin 60°+\frac{1}{2}4^2+\frac{1}{2}4^2\sin 60°+\frac{1}{2}4^2\sin 150°=$

$=12+8\sqrt{3}$

Ответ: $12+8\sqrt{3}$

Черновик

$a_1+a_2=b_3 \quad a_1+a_3=b_2 \quad a_2+a_3=b_1$

$a_1a_2=20 \quad a_1a_3=15 \quad a_2a_3=12$

$N^2=7+\sqrt{24}+7-\sqrt{24}+$

$2\sqrt{49-24}=2\cdot 10$

$12a_1=15a_2=20a_3$

$a_2=\frac{12}{15}a_1=\frac{4}{5}a_1$

$N^2=14-$

$a_1\frac{4}{5}a_1=20 \quad 4$

$a_1^2=16 \quad a_1=4$

$a_2=\frac{41}{15} \quad a_3=\frac{41}{20}$

$\frac{4}{5}a_1^2=20$

$a_1=5$

$a_2=\frac{16}{5}$

$a_2=4 \quad a_3=3$

$x\le -1$

$\sqrt{(2x+3)^2}+\sqrt{(3x+2)^2}+x+1=N$

$|2x+3|+|3x+2|+x+1=N$

1) $++$

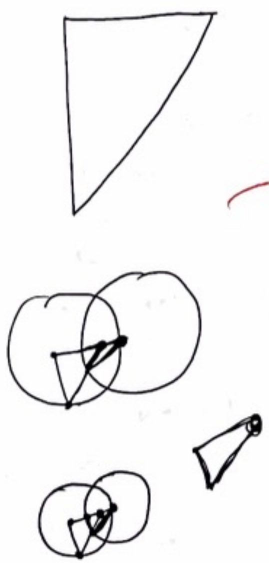
$x\ge\frac{3}{2}$ и $x\ge-\frac{2}{3}$ X

2) $+-$

$x\ge-\frac{3}{2} \quad x<\frac{2}{3}$

$2x+3-3x-2+x+1=$

$2=N$



Чистовик

№5

Подставив $x=0$ получим

$f_1(0)=f_2(0)=f_3(0) \Leftrightarrow 12a_1=15a_2=20a_3$, откуда немедленно следует, что числа a_1, a_2, a_3 попарно различные. Ну действительно, если, например $a_1=a_2$, то $12a_1=15a_2 \Rightarrow 12=15$?! Противоречие

Теперь подставим $x=-a_1$

$f_3(-a_1)=f_1(-a_1)=0$

Подставим $x=-a_2$

$f_3(-a_2)=f_2(-a_2)=0$

т.к. числа a_1, a_2, a_3 все различны и положительны, то мы получаем, что числа $-a_1$ и $-a_2$ не являются корнями уравнения $x+a_3=0$, значит они обязательно корни $x^2+b_3x+20=0$, ибо $f_3(-a_1)=f_3(-a_2)=0$

Тогда можем записать т. Виета для них и получить, что

$$\begin{cases}-a_1+(-a_2)=-b_3\\(-a_1)(-a_2)=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1+a_2=b_3\\a_1a_2=20\end{cases}$$

И вот прям абсолютно аналогично рассмотрев пули $f_2(x)$ и $f_1(x)$ мы получаем еще, что

$$\begin{cases}a_1+a_3=b_2\\a_1a_3=15\end{cases} \text{ и } \begin{cases}a_2+a_3=b_1\\a_2a_3=12\end{cases}$$

$a_1a_2=20 \Leftrightarrow a_1\frac{12}{15}a_1=20 \Leftrightarrow a_1^2=25 \Rightarrow a_1=5$, т.к. $a_1>0$

откуда $a_2=\frac{12}{15}\cdot 5=4$ и $a_3=\frac{12}{20}a_1=\frac{12}{20}\cdot 5=3$

Тогда

$a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3=(a_1+a_2+a_3)+(a_2+a_1+a_3)+(a_3+a_1+a_2)=3(a_1+a_2+a_3)=$

$=3(5+4+3)=3\cdot 12=36$

Чистовик

№1

Пусть $N=\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}$, тогда $N>0$

$N^2=7+\sqrt{24}+7-\sqrt{24}-2\sqrt{49-24}=14-10=4 \Rightarrow N=2$, (ибо $N>0$)

$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{9x^2+12x+4}-(\sqrt{-(x+1)})^2=2$

$\sqrt{(2x+3)^2}+\sqrt{(3x+2)^2}+(x+1)=2$ и $x\leq-1$

$|2x+3|+|3x+2|+x+1=1$

Посмотрим на варианты раскрытия модулей

1) $++$

$x\geq-\frac{3}{2}$ и $x\geq-\frac{2}{3}$, но $x\leq-1$, значит этот случай невозможен

2) $+-$

$x\geq-\frac{3}{2}$ и $x\leq-\frac{2}{3}$

$2x+3-3x-2+x=1$

$1=1$, т.е. для $x\in[-\frac{3}{2};-\frac{2}{3}]$ это правда, но т.к. $x\leq-1$, то

итоговый ответ $x\in[-\frac{3}{2};-1]$

3) $-+$

$x\leq-\frac{3}{2}$ и $x\geq-\frac{2}{3}$, но $x\leq-1$, значит это невозможно

4) $--$

$x\leq-\frac{3}{2}$ и $x\leq-\frac{2}{3}$

$-2x-3-3x-2+x=1$

$-4x-5=1$

$-4x=4$

$x=-1$ (здесь x не подходит под ограничения, но он есть в другом ответе)

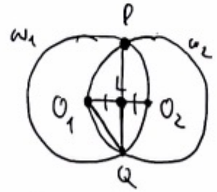
В итоге ответ:

~~$x\in[-\frac{3}{2};-1]$~~ $x\in[-\frac{3}{2};-1]$

Чистовик

№6

$R=4-2\sqrt{2}$

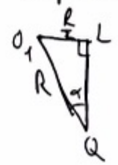


Заметим, что PQ-радось ω_1 и ω_2

т.к. $O_1L^2-R^2=O_2L^2-R^2=(\frac{R}{2})^2-R^2$, то $pow(L,\omega_1)=pow(L,\omega_2)$

и $L\in PQ$

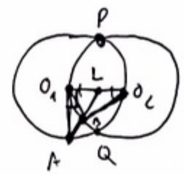
Радось перпендикулярна линии центров, т.е $PQ\perp O_1O_2$ и в прямоуг $\triangle O_1QL$ имеем



$\angle LQO_1$: $\sin\alpha=\frac{O_1L}{O_1Q}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=30\Rightarrow LQ=O_1Q\cdot\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}R$

Тогда мышка может начать свой путь в точке Q и напрямую добежать до L, получив $2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}R=\sqrt{3}R$ "брызг"

Но можно попробовать пойти иначе



Пройдя по прямой AL