



64-43-18-92

(159.6)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Шориной Юлии Витальевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход: 13:31 - 13:34

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Шориной

№ 2.

чистовик ①

64-43-18-92

(159,6)

$$x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13$$

$$\begin{cases} x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0 \\ x^2 - x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)(x^2+2x-5) = 0 \text{ ①} \\ x^2-x-2 \geq 0 \text{ ③} \\ (x-1)(x^2+2x-11) = 0 \text{ ②} \\ x^2-x-2 < 0 \end{cases}$$

$$\text{①} \begin{cases} x=3 \\ x^2+2x-5=0 \text{ ①} \\ x^2-x-2 \geq 0 \text{ ③} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ x^2+2x-11=0 \text{ ②} \\ x^2-x-2 < 0 \text{ ③} \end{cases}$$

$$\text{①} \quad D = 4 + 20 = 24$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2}$$

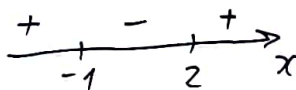
$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{6}$$

$$\text{②} \quad D = 4 + 44 = 48$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{3}}{2}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{3}$$

$$\text{③} \quad x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$



$$\begin{cases} x=3 \\ x=-1-\sqrt{6} \\ x=-1+\sqrt{6} \\ x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ x=-1-2\sqrt{3} \\ x=-1+2\sqrt{3} \\ x \in (-1; 2) \end{cases}$$

$$-1 + \sqrt{6} > -1; \quad -1 + \sqrt{6} < 2 \Rightarrow x = -1 + \sqrt{6} \text{ не явл. реш.}$$

$$\sqrt{6} < 3$$

$$6 < 9$$

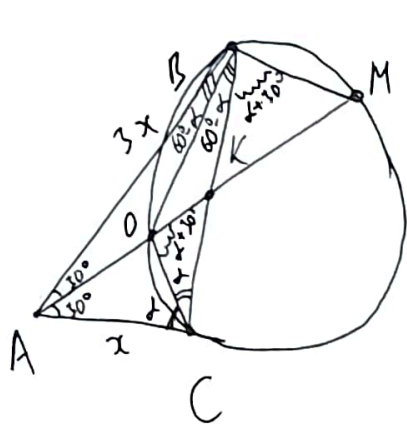
$$-1 - 2\sqrt{3} < -1 \Rightarrow x = -1 - 2\sqrt{3} \text{ не явл. реш.}$$

$$-1 + 2\sqrt{3} > 2 \Rightarrow x = -1 + 2\sqrt{3} \text{ не явл. реш.}$$

$$2\sqrt{3} > 3$$

$$\begin{cases} x=3 \\ x=-1-\sqrt{6} \\ x=1 \end{cases}$$

Ответ: $-1-\sqrt{6}$; 1; 3.



Решение:

По св-ву Евкл.: $BC \cap OM = K$

$$BK:KC = AB:AC = 3:1$$

$$BC = 6 \text{ (по усл.)}$$

$$BC = 6 \text{ (по усл.)}$$

Дано:

$\triangle ABC$

O — т. п. Евкл.

$W(I; R)$ — опис.

вокруг $\triangle OBC$

$$(AO) \cap W = \{O; M\}$$

$$BC = 6$$

$$AB:AC = 3:1$$

$$\angle BAC = 60^\circ$$

$$OM = ?$$

$$1) BC \cap OM = K$$

$$2) AO \text{ — Евкл. } \angle BAC, \angle BAC = 60^\circ \text{ (по усл.)}$$

$$\Rightarrow \angle BAO = \angle OAC = 30^\circ$$

Пусть $\angle ACO = \alpha$, тогда $\angle OCK = \alpha$ (по т.к. CO — Евкл.)

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = 180^\circ - 60^\circ - 2\alpha = 120^\circ - 2\alpha$$

$$\Rightarrow \angle ABO = \angle OBC = 60^\circ - \alpha \text{ (т.к. } BO \text{ — Евкл.)}$$

$$3) \angle BOK = \angle BAO + \angle ABO = 30^\circ + 60^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha \text{ (по св-ву внешн. угла)}$$

$$\angle COK = \angle ACO + \angle OAC = \alpha + 30^\circ \text{ (по св-ву внешн. угла)}$$

$$\angle BOC = \angle BOK + \angle COK = 90^\circ - \alpha + \alpha + 30^\circ = 120^\circ$$

$$4) \text{ По т. синусов для } \triangle OBC: \frac{BC}{\sin \angle BOC} = 2R$$

$$\frac{6}{\sin 120^\circ} = \frac{6}{\sin 60^\circ} = \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} = 2R; R = 2\sqrt{3}$$

$$5) \angle CBM = \angle COM = \angle COK = \alpha + 30^\circ \text{ (как внутр. углы, опир. на одну дугу)}$$

$$\angle OBM = \angle OBC + \angle CBM = 60^\circ - \alpha + \alpha + 30^\circ = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ по замечат. св-ву окр-ти OM — диаметр

$$\Rightarrow OM = 2R = 4\sqrt{3}. \text{ Ответ: } OM = 4\sqrt{3}.$$

1-ый 1-44 ← номера решённых задач

- 20-ü (Tlemç): 96-100 u 1-39 u 40

45).
1-4 решить 1-й, 13-й, 14-й, 15-й, 16-й, 17-й, 18-й, 19-й и 20-й

5 риниши те псе, кр. (краи) 13-10 (8 чел.)

№6-9 решить те, ~~же~~ кто решил №5 + 2-й (9 чел.)

№10 решил те, кто решил №6-9, кр. 14-го (8 чел.)

Аналогично, все задачи с номерами, кратными 5, решил по 8 чел. (кр. 140), а все ост. — по 9 чел.

№ 40 решила ровно 9 чел. (те, кто решил № 36-39, включая 20-го).

Значит, какаг. загачу пеммо меее 10 чел. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow m \neq 44 \Rightarrow n \min 45$

2) Пример: при $n = 45$ задача решена хотя бы

$$45 \cdot 19 + 46 = 45 \cdot 20 + 1 = 901.$$

(Потом решил
Байбик Васю,
Вася - min 45).

Пусть ~~было~~ нет задачи, кот. решили не менее
половины класса (10ч), ~~каждый решил не~~
~~более~~ $\rightarrow$ тогда всего решено не более $100 \cdot 9 =$
 $= 900$ задач, а их не менее 901, $\Rightarrow$ предположе-
ние неверно $\Rightarrow$ ^{при $n=45$} найдется задача, которую
решили хотя бы 10 чел. (половина класса).

$\Rightarrow$ Ответ: 45.

13.

1) Определим, каких размеров могут
быть эти п/у-ки. Пусть стороны п/у
равна a и b , тогда:

$$a \cdot b = 2a + 2b$$

$$\begin{cases} a = \frac{2b}{b-2} \\ b = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{2b}{b-2} \\ b = 2 \end{cases} \quad a = \frac{2b}{b-2} \quad a, b \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} 2a = 2a + 4 \\ 0 = 4 \end{cases}$$

$$a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow 2b : (b-2) \Leftrightarrow 2 \cdot (b-2) + 4 : (b-2)$$

$$2 \cdot (b-2) + 4 \equiv 4 \pmod{(b-2)}$$

$$2b \equiv 4 \pmod{(b-2)}$$

$$b \equiv 2 \pmod{(b-2)}$$

$$\begin{cases} b : (b-2) \textcircled{1} \\ b-2 : 2 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 3 \\ b = 4 \\ b : 2 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} b : (b-2) \Leftrightarrow \text{НОД}(b; b-2) = b-2$$

$$\text{НОД}(b;$$

$$2b : (b-2) \Leftrightarrow \text{НОД}(2b; b-2) = b-2$$

$$\text{НОД}(2b; b-2) = \text{НОД}(b+2; b-2) = \text{НОД}(4; b-2)$$

$$\Rightarrow \text{НОД}(4; b-2) = b-2 \Leftrightarrow 4 : (b-2) \Rightarrow b-2 \in \{1; 2; 4\}$$

$$b \in \{3; 4; 6\}$$

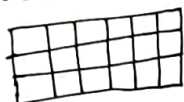
$$\begin{cases} a = \frac{2b}{b-2} \\ b = 3 \\ b = 4 \\ b = 6 \end{cases} \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \text{ I} \\ a = b = 4 \\ a = 3 \\ b = 6 \text{ II} \end{cases}$$

I и II случаи идентичны $\Rightarrow$ д.о.о. $\begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \\ a = 4 \\ b = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow \exists$ всего 2 разных п/у-ка, удовлетв. усл.

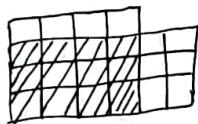
$\Rightarrow$ их и вырезаем именно их.

2) Нужно min S , накрытая одним слоем $\Rightarrow$ посчитаем max S , накрытую двумя слоями. Расположим п/у 3×6 горизонтально:



При наложении кв. 4×4 по верт. пересек. max 3 строки (т.к. в п/у всего 3 строки), а по горизонт. пересек. max 4 столбца (т.к. в кв. всего 4 столбца).

$\Rightarrow S$ пересек. max $3 \cdot 4 = 12$. Пример:

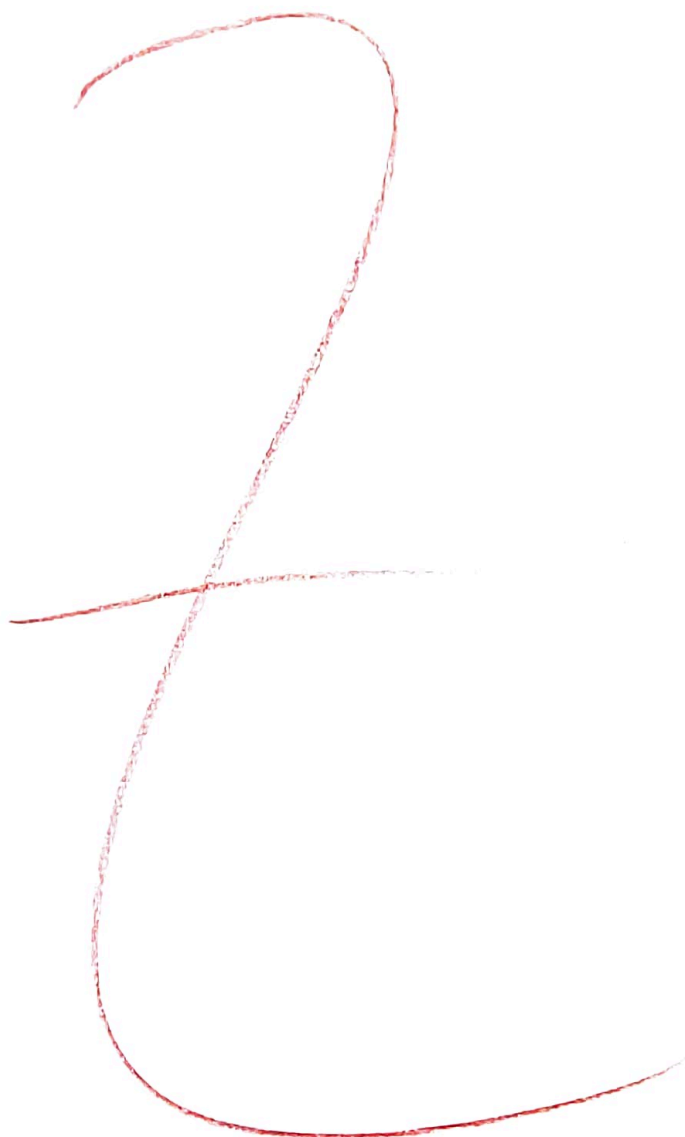
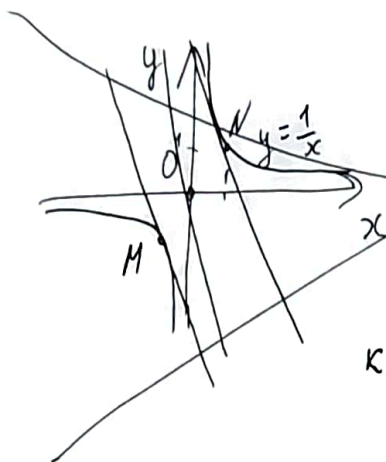


$$3) S_{\text{общ.}} = S_{\text{кв.}} + S_{\text{п/у}} - S_{\text{пересек.}}$$

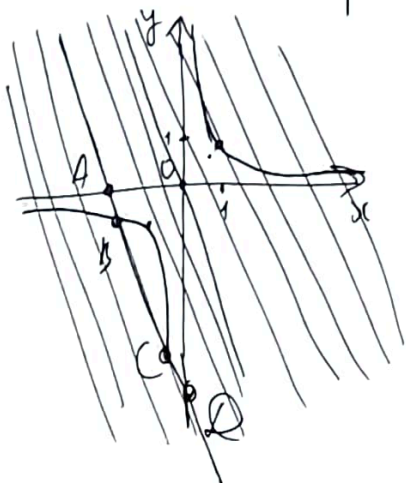
$$S_{\text{общ.}} = S_{\text{пересек.}} + S_{\text{накр. одним слоем}}$$

$$S_{\text{накр. одним слоем}} = S_{\text{кв.}} + S_{\text{п/у}} - 2 S_{\text{пересек.}} = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 6 - 2 \underbrace{S_{\text{пересек.}}}_{\substack{\text{max } 12 \\ \text{min } - 24}} = \min 16 + 18 - 24 = \min 10$$

Ответ: 10.

~~15. черновик~~~~Прямые вида $y = -18x + d$ —
семейство прямых, ||-ых
прямой $y = -18x$.~~~~Если прямая Π перф. в
т. $M(-1; -1)$ или $N(1; 1)$, то~~

черновик.



$y = -18x + a$ — семейство
прямых, л-ых $y = -18x$

Если прямая Π тгетр.
в т. $(-1; -1)$ или $(1; 1)$, то
кас. $\Rightarrow$ всего 2 отр.

~~не~~

$$\begin{aligned} -1 &= 18 + a \\ a &= -19 \end{aligned}$$

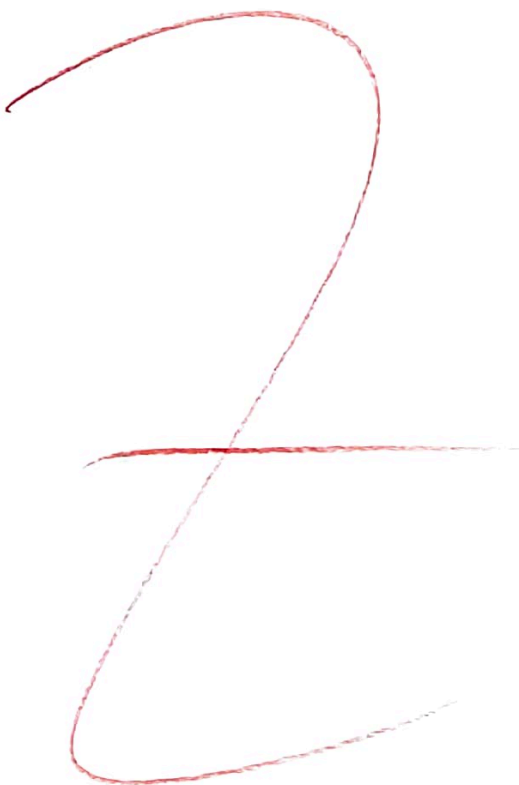
$$\begin{aligned} 1 &= -18 + a \\ a &= 19 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a \in (-\infty; -19) \cup (19; +\infty)$$

$$A: \begin{cases} y = 0 \\ y = -18x + a \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{a}{18} \end{cases}$$

$(\frac{a}{18}; 0)$

$$B, C: \begin{cases} y = -18x + a \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{x} = -18x + a \cdot x \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \begin{cases} 18x^2 - ax + 1 = 0 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$



черновик

$$44 \cdot 19 + 45 = 836 + 45 = 881$$

$$45 \cdot 19 + 46 = 45 \cdot 20 + 1 = 901$$

9 · 100 = 900 — max м.д. решено
для док-ва невозм.

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 19} \\ \underline{76} \\ 26 \\ \underline{836} \end{array}$$

$$1: 1 - 44$$

$$2: 6 - 49$$

$$11 - 54$$

$$16 - 59$$

$$21 - 64$$

$$26 - 69$$

$$31 - 74$$

$$36 - 79$$

$$41 - 84$$

$$46 - 89$$

$$51 - 94$$

$$56 - 99$$

$$61 - 100 + 1 - 4$$

$$66 - 100 + 1 - 9$$

$$71 - 100 + 1 - 14$$

$$76 - 100 + 1 - 19$$

$$81 - 100 + 1 - 24$$

$$86 - 100 + 1 - 29$$

$$91 - 100 + 1 - 34$$

$$96 - 100 + 1 - 39 \text{ (искл.)}$$

$$ab = 2a + 2b$$

$$a = \frac{2b}{b-2}$$

$$\begin{cases} b=2 \\ 2a = 2a + 4 \end{cases}$$

$$a = \frac{2b}{b-2}$$

$$\begin{cases} b=2 \\ 0 = 4 \end{cases}$$

$$a = \frac{2b}{b-2}$$

$$b \in \mathbb{N}$$

$$a \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow b \in \mathbb{N}$$

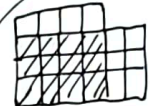
$$0 < \frac{2b}{b-2} \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow b-2 \in \{1, 2\}$$

$$b-2 \in \{1, 2\}$$

$$2b : (b-2)$$

$$\begin{cases} b-2=1 \\ b-2 \in \mathbb{N} \\ 2b : (b-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=3 \\ b=2k \\ 2b : (b-2) \end{cases}$$



44



$$1-4 \rightarrow 9$$

$$5 \rightarrow 8$$

$$6-9 \rightarrow 9$$

$$10 \rightarrow 8$$

$$11-14 \rightarrow 9$$

$$15 \rightarrow 8$$

$$36-39 \rightarrow 9$$

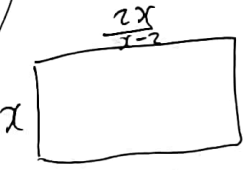
$$40 \rightarrow 9$$

$$41-44 \rightarrow 9$$

$$\begin{cases} a=6 \\ b=3 \\ a=4 \\ b=4 \\ a=3 \\ b=6 \end{cases}$$

одинак.

$$\Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=3 \\ a=4 \\ b=4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} b=3 \\ b=2k \\ (4k : 2 \cdot (k-1)) : 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=3 \\ b=2k \\ 2k : (k-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=3 \\ b=2k \\ 2 \cdot (k-1) + 2 : (k-1) \end{cases}$$

$$2k = 2 \cdot (k-1) + 2$$

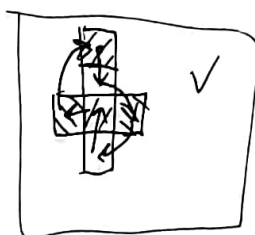
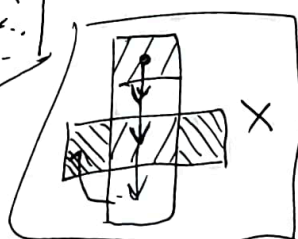
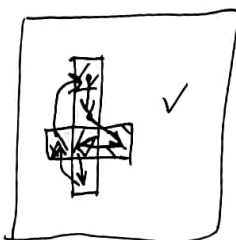
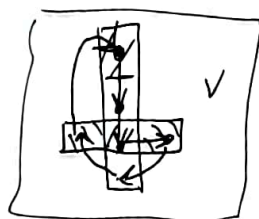
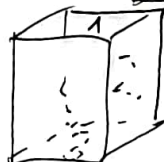
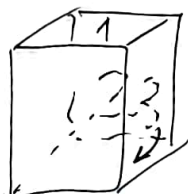
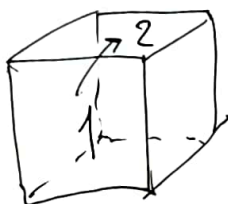
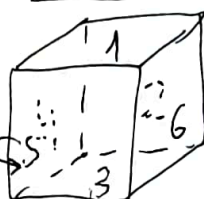
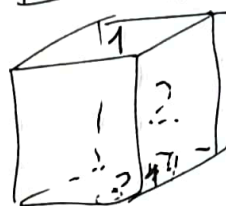
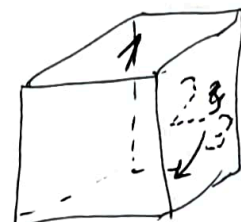
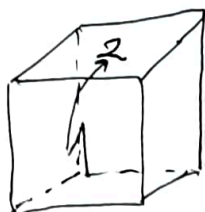
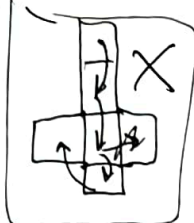
черновик.

a, b, c, d

$$\begin{cases} ab = 2(a+b) \\ cd = 2(c+d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 2x + 2y \\ x = 2 \\ y = \frac{2x}{x-2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{НОД}(2b, b-2) &= b-2 \\ \text{НОД}(2b, b-2) &= \\ &= \text{НОД}(b+2, b-2) = \\ &= \text{НОД}(4, b-2) = \\ &= b-2 \end{aligned}$$



Нам. с 1 → 2,
одинак. ц. не
могут стоять
рядом (1-концы)

1	2	1	3	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	2	1	3	1
1	2	3	1	3	2	1
1	2	1	2			

5-ходов
(6-авт.)

черновики.

$$\begin{cases} x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13 \\ x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0 \\ x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -1 \quad 2 \quad x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 - 4 - 22 + 15 \\ 28 - 9 - 33 + 15 = 42 - 42 \end{array}$$

$$\begin{cases} (x-3)(x^2+2x-5)=0 \\ x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty) \\ (x-1)(x^2+2x-11)=0 \\ x \in (-1; 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ x^2+2x-5=0 \text{ ①} \\ x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty) \\ x=1 \\ x^2+2x-11=0 \text{ ②} \\ x \in (-1; 2) \end{cases}$$

$$\text{① } D = 4 + 20 = 24$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{6}$$

$$\text{② } D = 4 + 44 = 48$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{3}}{2}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ x = -1 + \sqrt{6} \times \\ x = -1 - \sqrt{6} \\ x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ x = -1 - 2\sqrt{3} \times \\ x = -1 + 2\sqrt{3} \times \\ x \in (-1; 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ x = -1 - \sqrt{6} \\ x=1 \end{cases}$$

Ответ: $-1 - \sqrt{6}; 1; 3$.

$$\begin{array}{c|c} 2\sqrt{3}-1 > 2 & -1+\sqrt{6} < 2 \\ 2\sqrt{3} > 3 & \sqrt{6} < 3 \\ 12 > 9 & 6 < 9 \end{array}$$