



47-19-90-94

(162.17)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7-8

Место проведения Красноярск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов“
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Юрчик Максимас Павловича

фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

« 13 » апреля 2025 года

Подпись участника

65 шестьдесят пять

Чистовик

№2

УМ

Если число счастливое, значит сумма его цифр : 2
 Если к счастливому числу, оканчивающемуся не
 на цифру 9, то добавив к нему 1, сумма его цифр
 станет больше на 1 $\Rightarrow$ оно станет таким, что сум-
 ма цифр : 2 $\Rightarrow$ оно не может быть счастливым.

Получается суперсчастливое число должно окан-
 чиваться на 9. Давайте проверим, может ли дву-
 значное число быть суперсчастливым.

Так как оно должно оканчиваться на 9 и оно
 состоит только из двух цифр, первая цифра дол-
 жна быть равна второй, которая равна 9. Значит
 остаётся проверить 99 - суперсчастливое или нет.

$$99 + 1 = 100 \quad 100 - \text{несчастливое}$$

Вывод: одно и двузначные числа не могут быть
 суперсчастливыми; суперсчастливое число должно
 оканчиваться на 9 и его сумма цифр четна.

Давайте рассматривать трехзначные числа,
 выпишу минимальные (не все) числа подорожные по
 порядку:

109	439
129	459 ①
149	479
189	499
189 ①	509
219	529
239	549 ①
259	пока все
279 ①	
299	
309	
329	
349	
369 ①	
389	
419	

Я отметил некоторые чис-
 ла ①, ~~которые~~ которые счастли-
 вые. Проверим их на суперсас-
 тливост.

$$189 + 1 = 190 \quad \text{несчастл.}$$

$$279 + 1 = 280 \quad \text{несчастл.}$$

$$369 + 1 = 370 \quad \text{несчастл.}$$

$$439 + 1 = 440$$

$$459 + 1 = 460 \quad \text{несчастл.}$$

$$549 + 1 = 550 \quad \text{счастл. и зна-}$$

чит 549 суперсчастливое
 число и к тому же минималь-
 ное

Ответ: 549

(n - целое неотриц. число)

№ 3

Число	остаток от деления на 10
8^0	1
8^1	8
8^2	4
8^3	2
8^4	6
8^5	8

Получается, что

$$8^{4n+1} \equiv 8 \pmod{10}$$

Чистовик

Число	остаток от деления на 4
2025^0	1
2025^1	1

Получается, что

$$2025^n \equiv 1 \pmod{4}$$

$$2025^n = n \cdot 4 + 1$$

$$8^{2025^{2025}} \equiv 8^{2025} \equiv 8^1 \pmod{10}$$

Ответ: 8

№ 46

Найдём максимально возможное кол-во решённых задач, чтоб не ~~намотать~~ условие: „обязательно найдётся задача, которую решило не менее половины класса“ - было не верно. Так будет ~~а~~ в случае, когда все 100 задач решили по 9 учеников класса

$$100 \cdot 9 = 900 \text{ задач}$$

То есть если ученики решили в сумме не менее 901 задачи, то условие указанное выше в кавычках окажется верным.

Если каждый ученик решил не менее n задач и какой-то 1 ученик решил больше второго, то мин. возможное кол-во решённых задач будет $20n + 1$

Теперь шумим минимальный n такой, чтоб

$$\begin{aligned} 1) \quad 20n + 1 &\geq 901 \\ 20n &\geq 900 \\ n &\geq 45 \end{aligned}$$

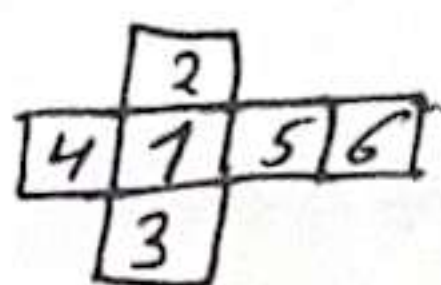
$$2) \text{ При } n = 45$$

(он и является минимальным подходящим) условие показывается верным

$$3) \text{ Ответ: } 45$$

N5

У каждой грани 4 грани по соседству (у них общее ребро). Мы ищем максимальное кол-во жуков, которые могли попасть на какую-то грань. Представим, что во всех 4 соседних грани жуки пошли именно на эту (те которые на ней были-ушли). Найдем максимальное кол-во жуков на этих 4 гранях. Нарисуем обертку кубика. Пускай та "эта" грань, на которую идут жуки, будет максимума, имеет №1. На грань номер 1 могут попасть жуки с 4 граней с номерами 2, 3, 4, 5. Как мы знаем, на противоположных гранях в сумме 7 жуков, значит на 2 и 3 грани 7 жуков и на 4 и 5 гранях 7 жуков. Значит на грань №1 могут пойти не более $7 \cdot 2 = 14$ жуков.



Ответ: 14 жуков.

N4

Пускай коза стоит в координатах $(0; 0)$, одна пшавка в $(0; 1)$, а вторая $(0; -1)$, α и направление движения козы равно L , считая, что если коза ^{идет} ^{с координат} $(0; 0)$ в $(1; 1)$, то $L = 0^\circ$, а если с $(0; 0)$ в $(1; 1)$ то $L = 45^\circ$.

Пусть h_1 это расстояние от точки $(0; 0)$ до ^{тра-} ^{ектории} круга пшавки №1 по направлению $= L$, тогда

$$(\sin L \cdot h_1 - 0)^2 + (\cos L \cdot h_1 - 1)^2 = 2^2$$

2 - это радиус круга

$$(\sin L)^2 h_1^2 + (\cos L)^2 h_1^2 + 1 - 2 \cos L \cdot h_1 - 4 = 0$$

$$h_1^2 ((\sin L)^2 + (\cos L)^2) - 2 \cos L \cdot h_1 - 4 + 1 = 0$$

слагаемые $\pm$ поставили +, так как h должен быть > 0

$$h_1^2 - 2 \cos L \cdot h_1 - 3 = 0$$

$$D_1 = (\cos L)^2 \cdot 4 + 12$$

$$h_1 = \cos L \cdot 2 + \sqrt{(\cos L)^2 \cdot 4 + 12}$$

14 (продолжение), Числовик

Если теперь взять h_2 который эквивалентен h_1 , но ^{учитывая} не до I-го круга, а до II-го, то получим это

$$(\sin L \cdot h_2 - 0)^2 + (\cos L \cdot h_2 + 1)^2 = 2^2$$

... (те же действия что и с h_1)

$$h_2^2 + 2 \cos L \cdot h_2 - 3 = 0$$

$$D_1 = (\cos L)^2 + 3$$

$$h_2 = -(\cos L) \pm \sqrt{(\cos L)^2 + 3}$$

Теперь сложим h_1 и h_2

$$h_1 + h_2 = -(\cos L) + \cos L + 2 \sqrt{(\cos L)^2 + 3} = 2 \sqrt{(\cos L)^2 + 3}$$

Максимальное значение $h_1 + h_2$ будет при макс. ~~значении~~ $(\cos L)^2$, а это будет при $\cos L = -1$ или $\cos L = 1$, то есть при $L = 0^\circ$ или $L = 180^\circ$, то есть когда зай-
мы идти по направлению к одной из 2 помех.
люк.

15 7

Ответ: 114

Общее кол-во вариантов с 5 правыми и 5 левыми = $C_{10}^5 = \frac{10!}{5!5!} = 252$

Рассмотрим кол-во плохих вариантов с 1 ошибкой

5		5		7		5		4		10001		10001	
10001	-----			10001	-----			10001	-----			10001	-----
00111	—	2 ошибки		1110	—	00	111	—		00	111	—	
01011	+			1101	—	01	011	+		01	011	+	
01101	+			1011	+	01	101	+		01	101	+	
01110	—	2 ошибки		0111	—	01	110	—		01	110	—	
10011	+			0011	+	10	011	+		10	011	+	
10101	+			0101	+	10	101	+		10	101	+	
10110	+			0110	+	10	110	—		10	110	—	
11001	—			1001	+	11	001	—		11	001	—	
11010	+			1010	+	11	010	—		11	010	—	
11101	—			1100	—	11	100	—		11	100	—	
11101	—												

5 шт.

6 шт.

4

47-19-90-94
(162.17)

17 (продолж.)

Чистовик

$$(5+6+4) \cdot 2 = 30$$

100001
0111 -
1011 +
1101 -
1110 -

1 шт.

100001
0111 -
1011 +
1101 -
1110 -

2 шт.

100001
11
11
10
01

0 шт.

$$(1+2) \cdot 2 = 6$$

1000001 111 1000001 11

0 шт.

0 шт.

$$5+6=11$$

$$30+6=36$$

Теперь варианта с несколькими

$$C_5^2 \cdot 10 + C_5^2 \cdot 6 + C_4^1 \cdot 5 + 1 \cdot 4 = 10 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 4 = 84$$

$$252 - 84 - 36 = 252 - 120 = 132$$

Ответ: 132

Черновики

Пример 1

$2^n - 1$

10001

.....
00 1 1 1 ✓
0 1 0 1 1 ✓
0 1 1 0 1 ✓
~~0 1 1 1 0~~
1 0 0 1 1 ✓
1 0 1 0 1 ✓
1 0 1 1 0 ✓
~~1 1 0 0 1~~
~~1 1 0 1 0~~
~~1 1 1 0 0~~

10·6+

+5+

4·5+4

= 60+20+4=84

10001

10001

00 1 1 ✓
0 1 0 1 ✓
0 1 1 0 ✓
1 0 0 1 ✓
1 0 1 0 ✓
~~1 1 0 0~~
~~1 1 1 0~~
~~1 1 0 1~~
1 0 1 1 ✓
0 1 1 1 ✓

6

+

7

+

100001

10001

00 1 1 1
0 1 0 1 1 ✓
0 1 1 0 1 ✓
~~0 1 1 1 0~~
1 0 0 1 1 ✓
1 0 1 0 1 ✓
~~1 1 0 0 1~~
~~1 1 0 1 0~~
~~1 1 1 0 0~~
~~1 1 1 1 0~~

4

·2

34

+

20

54

1000001

0 1 1 1 ✓
1 0 1 1 ✓
~~1 1 0 1~~
~~1 1 1 0~~

2

+

2

+

2

+

2

+

2

1000001 111

10000011111
10000101111
10000110111
0001101101
0001101011
0001011011
0001010111
0011011010
0011011001
0011010101
0011010011
0011010110
0011001101
0011001011
0010010111
0010010011
0010100111
0010100111
0010101101
0010101011

Черновик

$$x, y, \angle, r \quad x=0 \quad r=2 \quad y=\pm 1$$

$$(\sin \angle \cdot h - x)^2 + (\cos \angle \cdot h - y)^2 = r^2$$

$$(\sin \angle)^2 h^2 + (\cos \angle)^2 h^2 + y^2 - 2h(y \cdot \cos \angle) - r^2 = 0$$

Q

$$h^2 + y^2 - 2h(y \cdot \cos \angle) - 4 = 0$$

$$D = 4y^2 (\cos \angle)^2 - 4(-4 + y^2) = 4y^2 (\cos \angle)^2 - 4y^2 + 16$$

$$h = \frac{y \cdot \cos \angle + \sqrt{y^2 (\cos \angle)^2 - y^2 + 4}}{1}$$

$$h_1 = \cos \angle + \sqrt{(\cos \angle)^2 + 3}$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

$$h_2 = -\cos \angle + \sqrt{(\cos \angle)^2 + 3}$$

$$h_1 + h_2 =$$

0000029111

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5!5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 4 \cdot 7 \cdot 9 = 28 \cdot 9 = 180 + 72 = 252$$

54

84

~~ПАААА~~

~~ПАААА~~

~~ПАААА~~

$$C_5^2 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

9

~~ПАА~~

~~ААА~~

~~ПАААААААА~~

~~ПАААААААААА~~

π

$$2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$252 - (54 + 84) =$$

$$= 252 - 138 = 114$$

Черновик

109

189
279
459
369
549

число остаток от дел на 10

8^0	1	2025^0	ост. от дел. на 10
8^1	8	2025^1	7
8^2	4	2025^2	1
8^3	2	$x_1, y_1, r=2$	
8^4	6	$\angle \alpha$	
8^5	8	$(\sin \angle \cdot K - x_1)^2 + (\cos \angle \cdot h - y_1)^2 = r^2$	

$$h = \pm \cos \angle + 2 \cos \angle + 3$$

$$h_1 + h_2 = 2 \cos \angle + 3$$

$$20n+1 \geq 901$$

$$20n \geq 900$$

$$n \geq 45$$



1
101
1001

x_1, x_2, r

$$4n+1$$

$$2025^n \equiv 1$$

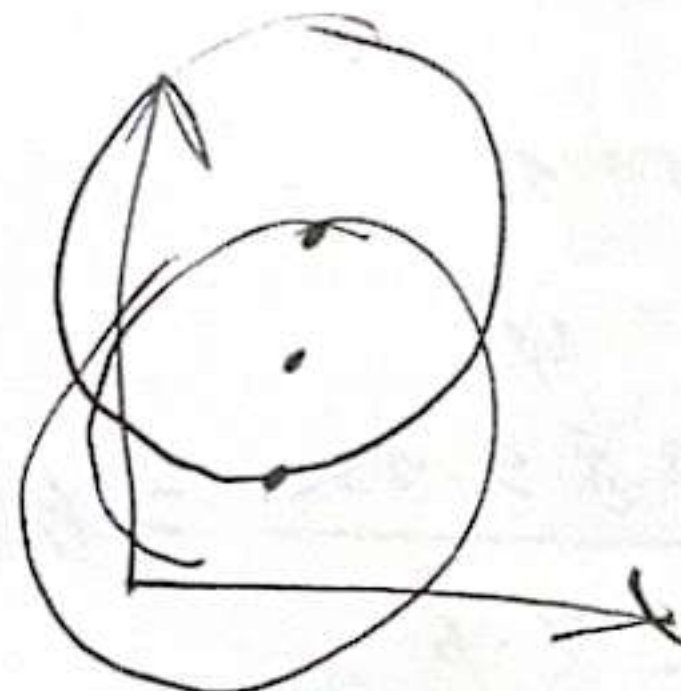
$$D = 4(1/4)(\sin \angle x + \cos \angle y)^2 - 4$$

$$h = \frac{2(\sin \angle x + \cos \angle y) + D}{2}$$

$$9 \cdot 100 = 900$$

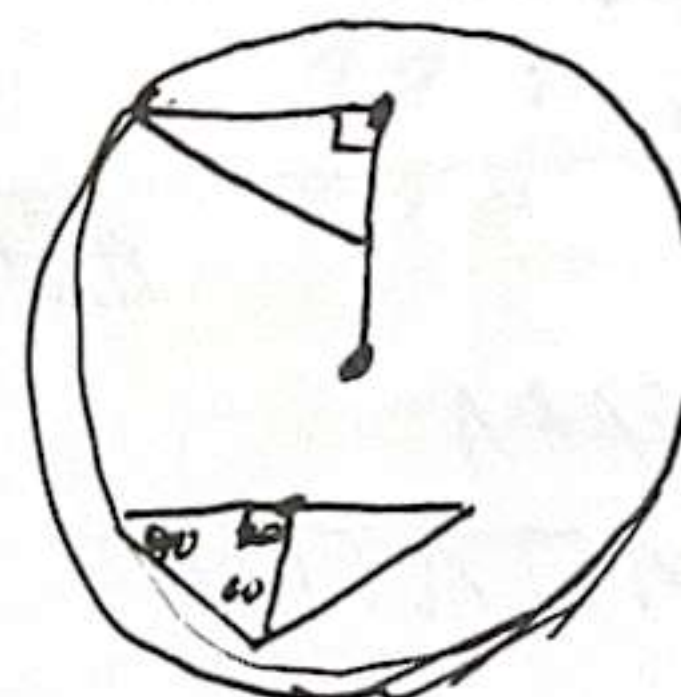
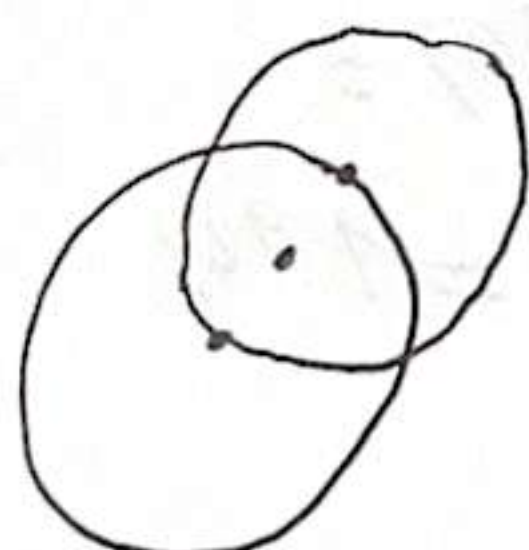
(901)

α
 α
 α



$$8^{2025^{2025}} \equiv 8^{2025} \equiv 8 \pmod{10}$$

$$D = 4(\sin \angle x + \cos \angle y)^2 + 4r^2 - 4$$



$$(\sin \angle)^2 \cdot h^2 + x^2 + (\cos \angle)^2 \cdot h^2 + y^2 + 2h(\sin \angle x + \cos \angle y) - r^2 = 0$$

$$h^2 + x^2 + y^2 - r^2 + 2h(\sin \angle x + \cos \angle y) = 0$$



$$h = \sin \angle \cdot y + 2(\cos \angle y + 1 - \frac{1}{y^2})$$