



97-88-76-49  
(162.14)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9

Место проведения Енабуха  
город

+1 мес

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов  
наименование олимпиады

по математике  
профиль олимпиады

Иудиной Айгуль Марселевны  
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Чистовик.

№2.

$$x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13$$

Разберем 2 случая:

$$1) x^2 - x - 2 \geq 0 \Rightarrow y \text{ нас } y\text{-ие } x^3 - x^2 + x + 2 = 12x - 13$$

$$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$$

$$(x-3)(x^2 + 2x - 5) = 0$$

$$\text{Тогда: } x = 3 \text{ или } x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$D = 2^2 + 4 \cdot 5 = 24$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{2} = -1 \pm \sqrt{6}$$

$$2) x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow y \text{ нас } x^3 + x^2 - x - 2 = 12x - 13$$

$$x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0$$

$$(x-1)(x^2 + 2x - 11) = 0$$

$$\text{Тогда } x = 1 \text{ или } x^2 + 2x - 11 = 0$$

$$D = 2^2 + 4 \cdot 11 = 48$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{48}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } x = \{ 3; 1; -1 + \sqrt{6}; -1 - \sqrt{6}; -1 + 2\sqrt{3}; -1 - 2\sqrt{3} \}$$

$$a \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline \end{array} \quad \text{№3.}$$

Пусть есть прямоугольники со сторонами  $(a; b)$  и  $(x; y)$ . Тогда по условию:

$$2x + 2y = xy \Rightarrow (x-2)(y-2) = 4 \stackrel{=1 \cdot 4 = 2 \cdot 2}{=} \Rightarrow \text{есть решение:}$$

$$(x; y) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Пусть без огранич. области  $x \leq y$ . Аналогично  $2a + 2b = ab \Rightarrow (a-2)(b-2) = 4$

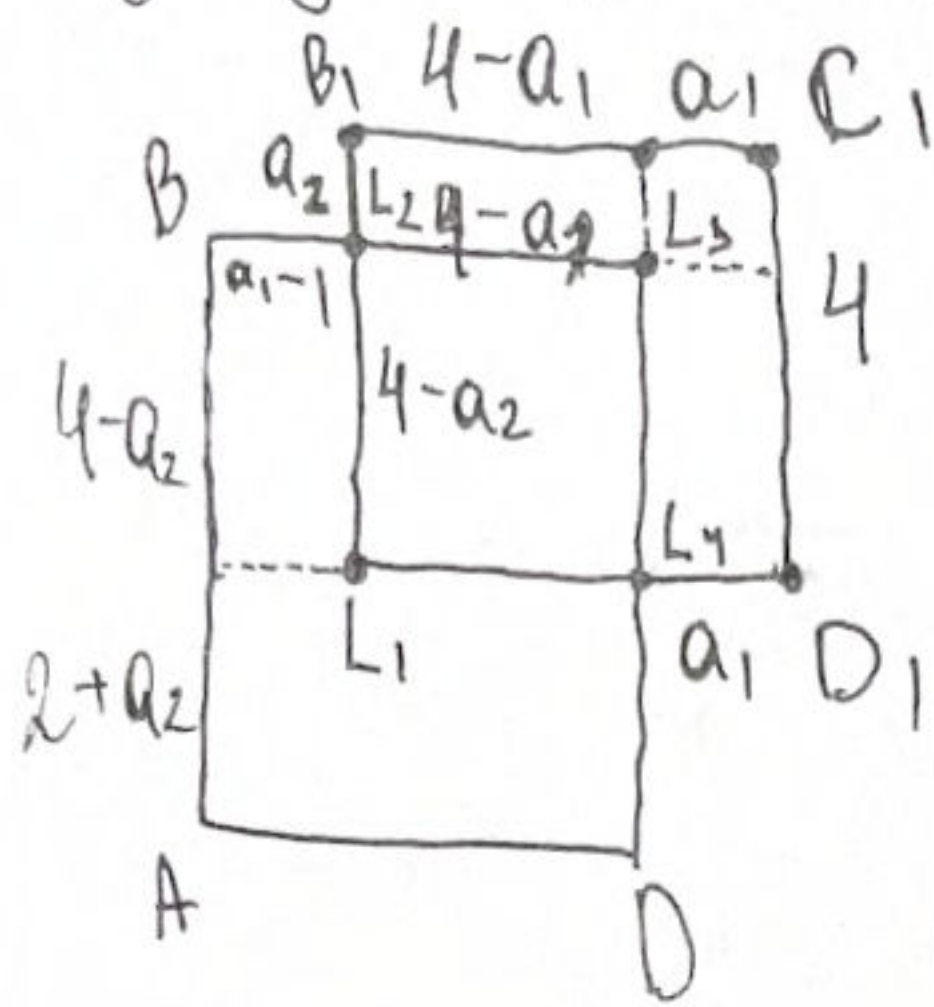
$$(a; b) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ Пусть } a \leq b.$$

Чистовик

По условию прямоугольники не равны  $\Rightarrow$  единственная возможная комбинация - это 3  $\begin{matrix} 6 \\ \square \end{matrix}$  и 4  $\begin{matrix} 4 \\ \square \end{matrix}$

Сначала положим квадрат  $4 \times 4$ . Потом, без ограни.

Общности положим  $3 \times 6$  вертикально. У них есть общ. часть.

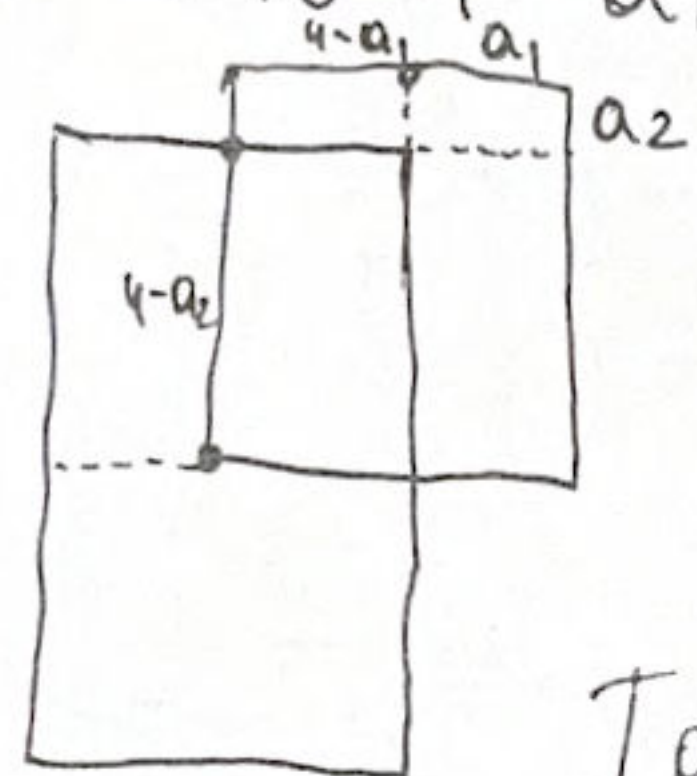


Пусть есть общ. часть  $L_1 L_2 L_3 L_4$  - это какой-то прямоугол. Прямоугольни-ки:  $AB L_3 D$  и  $L_1 B C D$

Пусть  $L_4 D_1 = a_1$  и  $B L_2 = a_2$

Посчитаем отрезки как на рисунке.

Тогда одна сторона  $L_1 L_2 L_3 L_4$  - это  $4 - a_2$ , а дру-гая - это  $4 - a_1$ . Тогда площадь общей части - это



$$(4 - a_1)(4 - a_2)$$

$$\text{Всего площадь: } 4 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 16 + 18 = 34$$

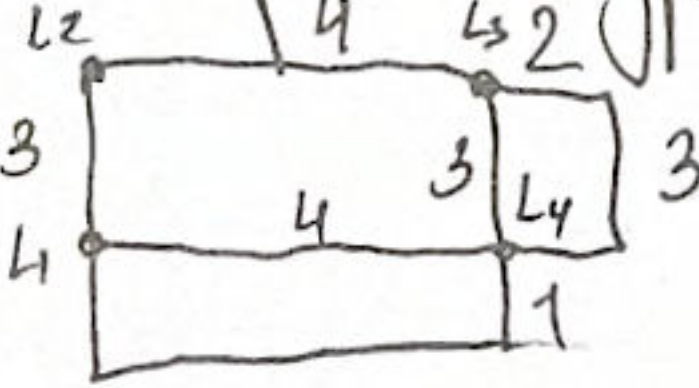
Тогда площадь одного слоя бумаги:

$$34 - 2 \cdot (4 - a_1)(4 - a_2)$$

Это значение минима-льно, когда макс. Площадь  $L_1 L_2 L_3 L_4$ . Максимум достигается, если стороны максимум  $L_1 L_2$  - это минимальная сторона одного  $\square$ , т.е 4.

$L_2 L_3$  - это min сторона другого  $\square$ , т.е 3.

$$34 - 2 \cdot 3 \cdot 4 = 10$$

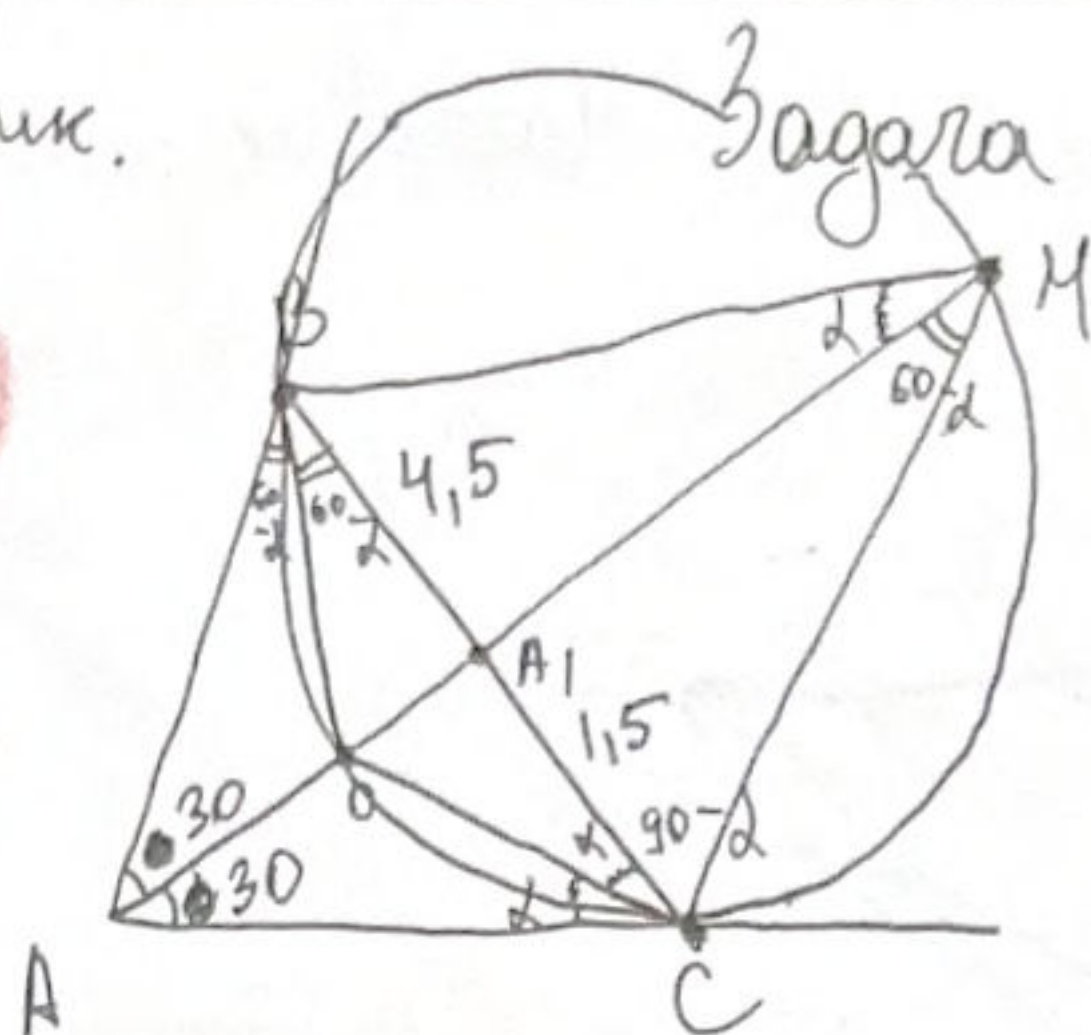


Пример

Чистовик.

Задача 4.

2



$$BC = 6$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{1}, \angle BAC = 60^\circ$$

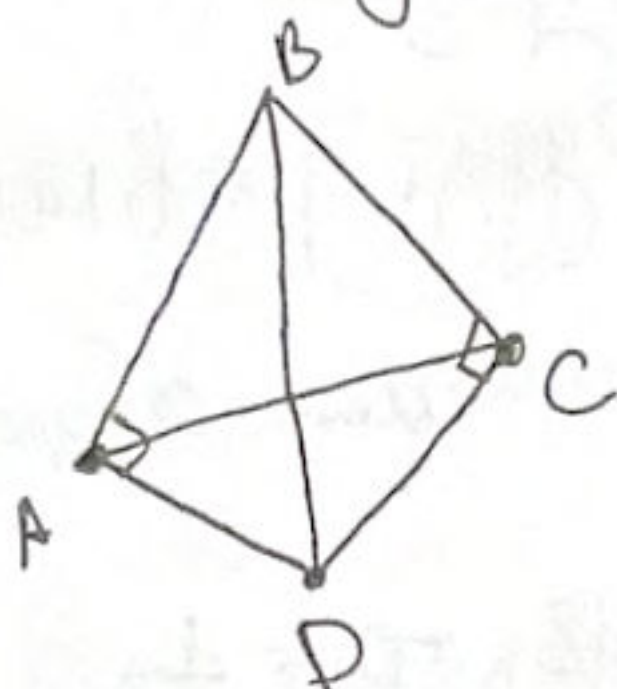
Пусть прямая AO  
пересекает BC в точке A1

$$\text{Тогда } \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{1}. \quad BA_1 + A_1C = 4x = 6 \Rightarrow x = 1.5.$$

$$\text{Тогда } BA_1 = 4.5, A_1C = 1.5. \quad \angle A = 2\alpha = 60^\circ, \alpha = 30^\circ$$

$$\text{Пусть } \angle B. \quad \text{Тогда } BA_1 = 4.5, A_1C = 1.5. \quad \angle BAA_1 = 30^\circ.$$

$$\text{Пусть } \angle BCA = 2\alpha \Rightarrow \angle ABC = 60 - \alpha. \quad \angle BDA_1 = 60 - \alpha + 30 = 90 - \alpha = \angle BCM \Rightarrow \angle OCM = 90 - \alpha + \alpha = 90^\circ \Rightarrow OM - \text{диаметр.} \quad \angle BMC = \alpha + 60 - \alpha = 60^\circ \Rightarrow \angle BOC = 120^\circ.$$



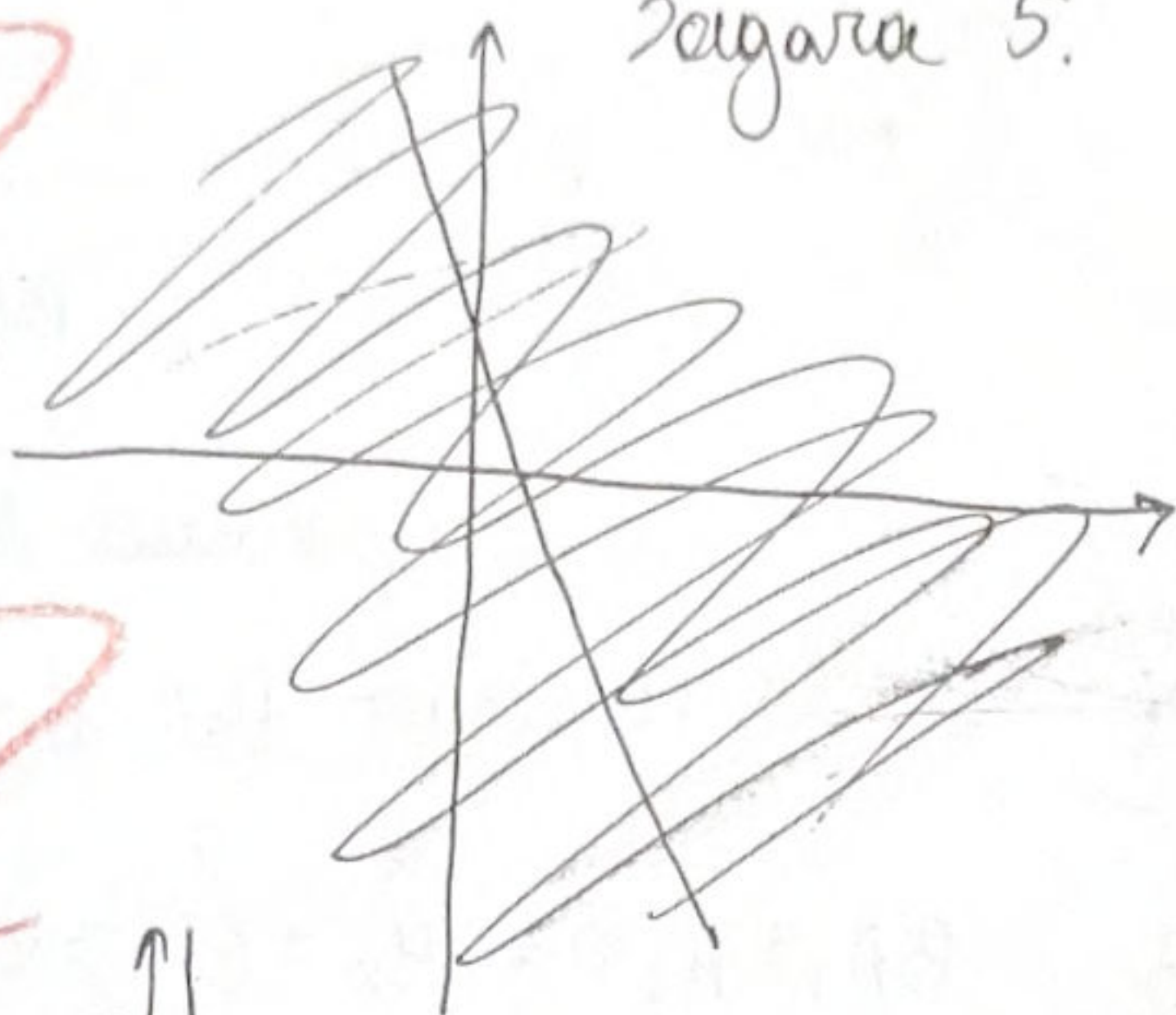
$$\text{Тогда } \frac{BC}{\sin \angle BOC} = 2R, \text{ где } R - \text{это}$$

радиус окружности (BOC)  $\Rightarrow$

$$\frac{6}{\sin(120^\circ)} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 2R = OM, \text{ т.к.}$$

$$OM - \text{это диаметр.} \Rightarrow OM = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

# Задача 5. Чистовик.



Если на прямой  
высекается 3 равных  
отрезка, то когда мы  
из точек пересечения

опустим ~~прямую~~ проекции,

то по т. Фалеса отрезки  
 $Ax Bx, Bx Cx, Cx Dx$  будут равны.

У всех этих точек ордината 0. Посчитаем абсциссы.

У  $Ax = 0$ . Решим у-це:  $-18x + a = \frac{1}{x}$

$$-18x^2 + ax = 1 \Rightarrow 18x^2 - ax + 1 = 0. D = a^2 - 4 \cdot 18 = a^2 - 72.$$

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 72}}{36}. \text{ Т.е. у точки } Bx \text{ абсцисса } \frac{a - \sqrt{a^2 - 72}}{36},$$

у точки  $Cx: \frac{a + \sqrt{a^2 - 72}}{36}$ . Посчитаем у  $Dx$ .

$$-18x + a = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{-18} = \frac{a}{18}. \text{ у } Dx \text{ абсцисса } \frac{a}{18}.$$

Нам надо:  $A \times B_x = C \times B_x = D \times C_x$ , т.е. Чистовик.

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - 72}}{36} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 72}}{36} - \frac{a - \sqrt{a^2 - 72}}{36}$$

$$\frac{a}{18} - \frac{a + \sqrt{a^2 - 72}}{36} =$$

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - 72}}{36} = \frac{2\sqrt{a^2 - 72}}{36} \Rightarrow a = 3\sqrt{a^2 - 72} \Rightarrow a > 0$$

$$a^2 = 9(a^2 - 72)$$

$$9 \cdot 72 = 8a^2$$

$$a^2 = 81 \Rightarrow \boxed{a = \pm 9}$$

$$\frac{2\sqrt{a^2 - 72}}{36} = \frac{a - \sqrt{a^2 - 72}}{36} \Rightarrow a = 3\sqrt{a^2 - 72}, \text{ что то же}$$

$$\text{равенство} \Rightarrow \boxed{a = \pm 9}, \text{ но у нас было } a \geq 0$$

$$\Rightarrow a = 9 \quad \text{Ответ: } a = 9.$$

Задача 7.

Всего есть 100 задач, 10 человек. Сделаем таблицу из людей и задач, на пересечении будем ставить

1, если человек решил задачу, и 0, если не решил.

1ч  
2ч  
...  
19ч  
20ч

1 2 3 ... 100.

Пусть каждую задачу решено  $\leq 9$  человек. Найдите

максимальное  $n$ , при котором такое возможно.

Чистовик

В каждом столбце у нас тогда  $\leq 9$  "1". В каждой строке  $\geq n$  "1", но т.к. есть Петя, который решил больше Васю, то у Пети  $\geq (n+1)$  "1". Всего "1"  $\geq 19n + (n+1) = 20n + 1$ . ~~Или~~ А с другой стороны всего "1" в таблице  $\leq 900$ .  $\Rightarrow 900 \geq 20n + 1 \Rightarrow 899 \geq 20n$ .

$n \leq 44$ . Т.е. такая ситуация возможна, если  $n \leq 44$ . А при  $n \geq 45$  минимальная сумма всех "1" равна  $19 \cdot 45 + 46 > 900 \Rightarrow$  у какой-то задачи в столбце будет  $\geq 10$  "1".

При  $n=44$  если каждый человек решил по 44 задачи, а один 45, то  $44 \cdot 19 + 45 < 900 \Rightarrow$  гарант не будет.

Ответ:  $n=45$

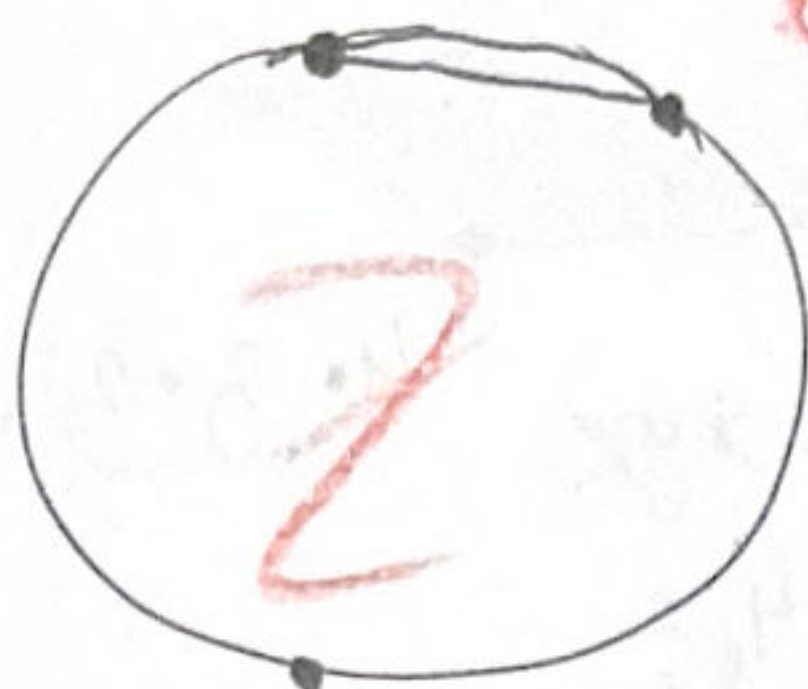
Черновик. (13)

2

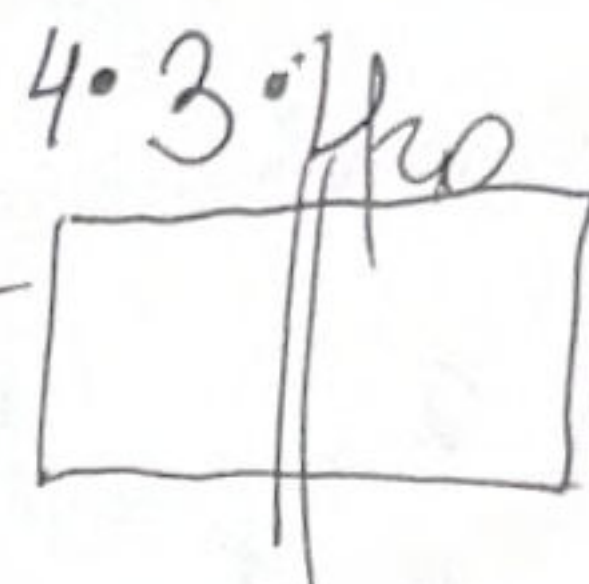
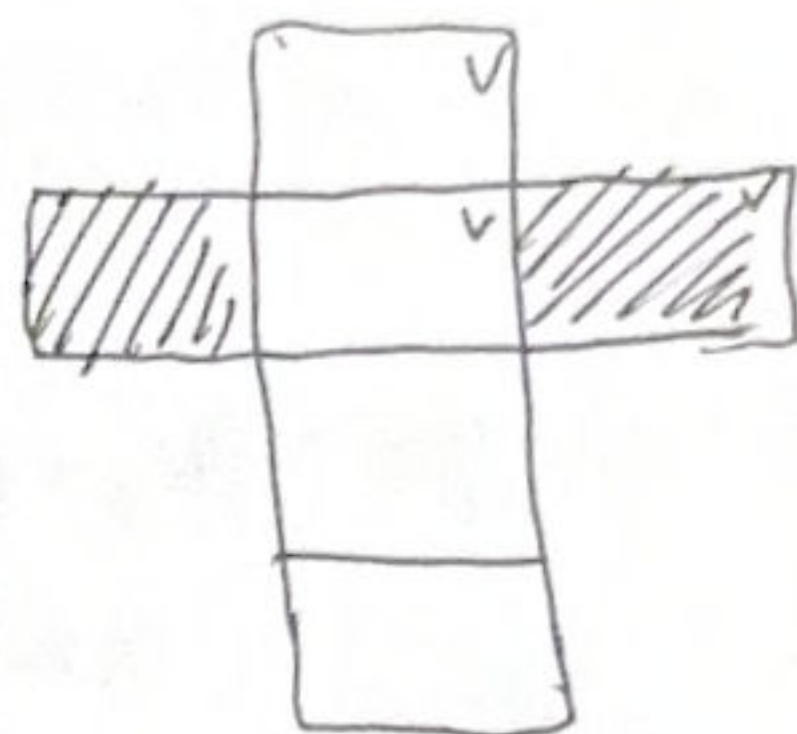


44  
45

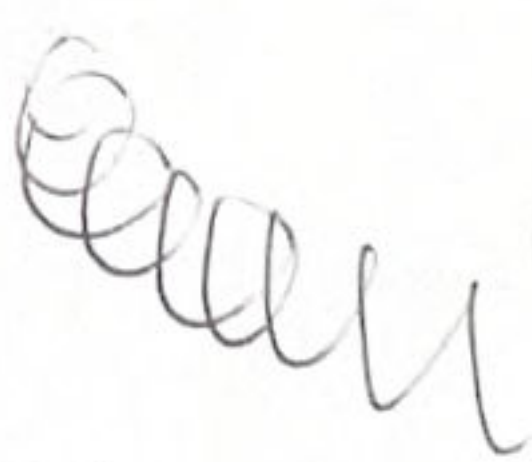
44  
x 19



2



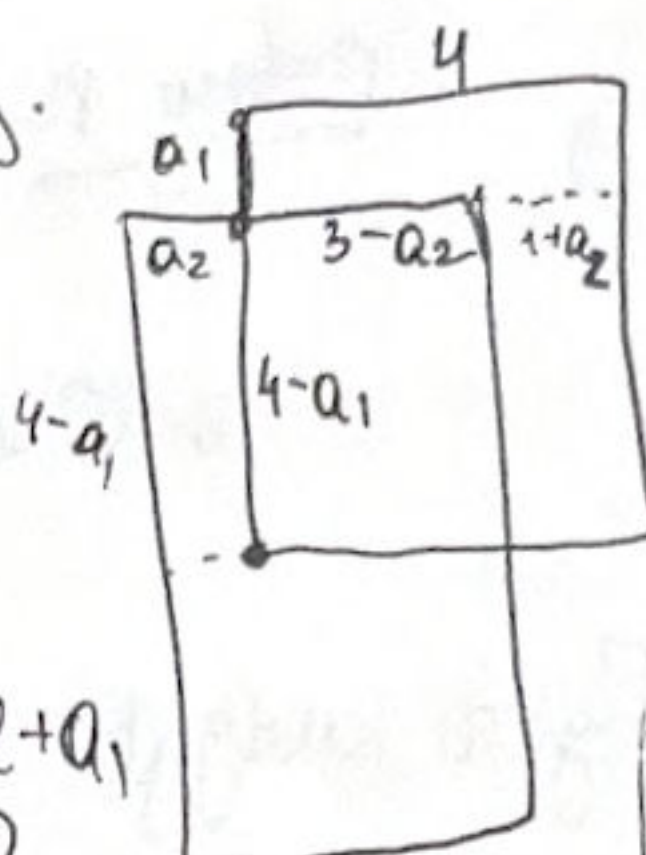
$n=45$ . ( $n=44$ )? не может.



44  
x 20

880  
881

~~n=44~~



2 5 2



$$(4-a_1)a_2 + (2+a_1) \cdot 3 + (1+a_2)(4-a_1) +$$



88. 899 / 20

44

900

44

880

899 / 20  
- 80  
99  
- 80  
19

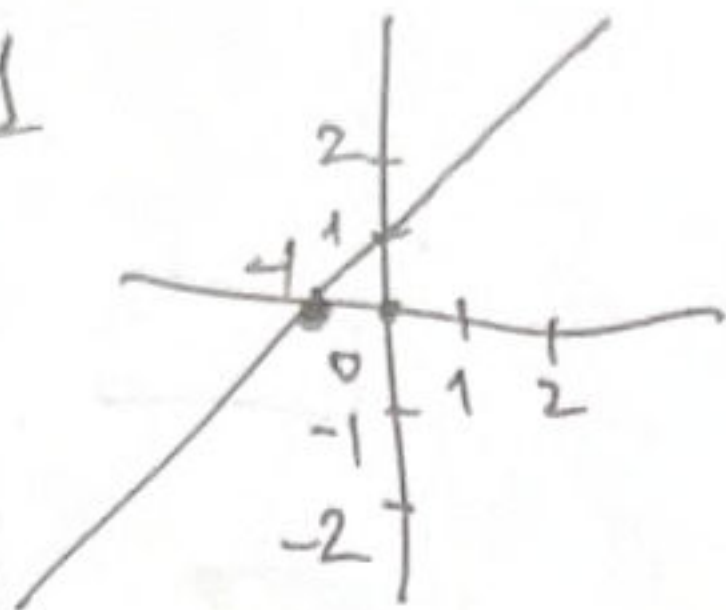
$n \leq 44 \frac{19}{20}$

3.4

2

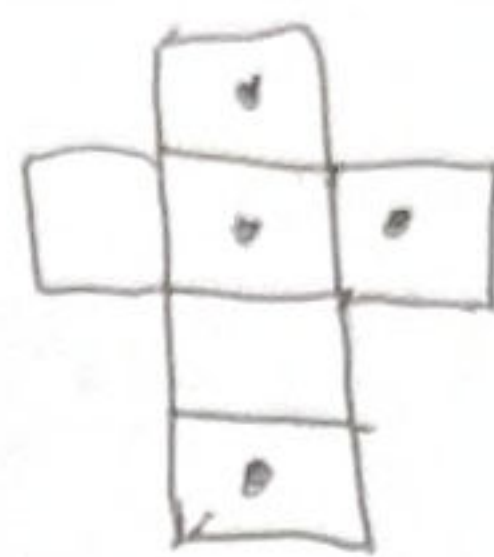
Чертовик.

$$y = x + 1$$



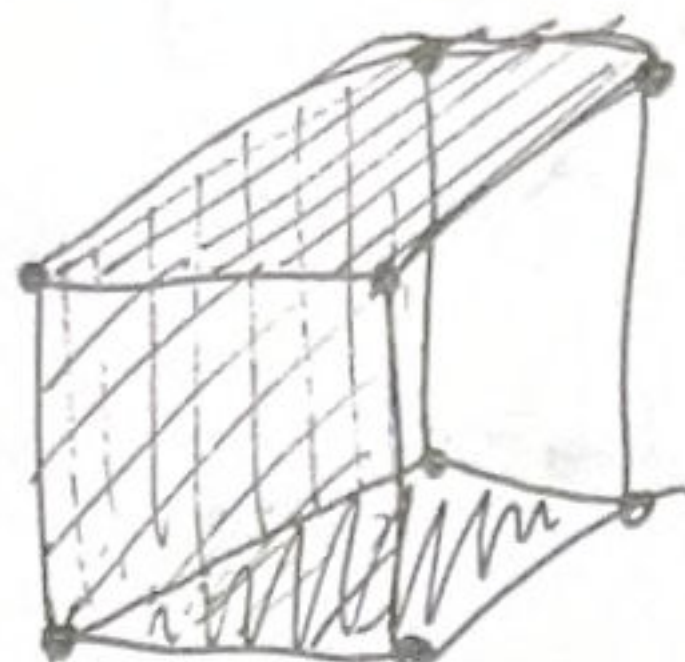
$$y = -18x + a = 0$$

$$x = \frac{a}{18}$$



6 жуков.  
4 варианта.

$$4^6$$



10 человек.

1 жук.

$$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2$$

$$4^6$$

п>в.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 1000. \\ 1_2 & 0 & 1 & 1 \\ 2_2 & 1 & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & 1 \end{matrix} \left. \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right\} 9.$$

ровно n.

$$10$$

≥ 10 человек. надо.

$$18_2$$

В.

Пусть каждому по 9 человек, тогда

$$900 \geq 20n + 1$$

$$n \leq 44 \frac{19}{20}$$

$$n = 44.$$

$$\begin{array}{r} n \leq 899 \\ - 80 \\ \hline 99 \\ - 80 \\ \hline 19 \end{array} \quad \begin{array}{r} 20 \\ + 44 \\ \hline 880 \\ + 45 \\ \hline 925 \end{array}$$

$$n \leq (44)$$

Все по 44. и один тел 45.

$$20n \quad n \geq 45.$$

$$900 \geq 20n + 1$$

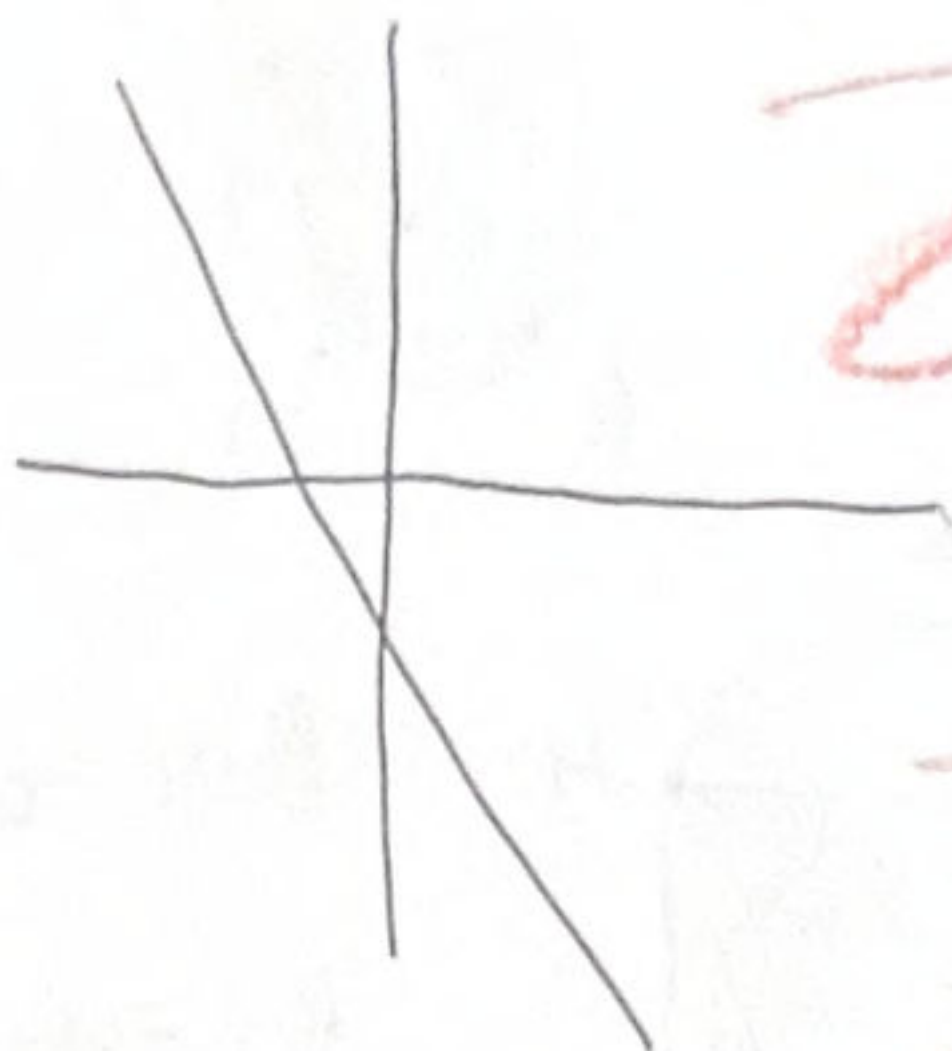
$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 20 \\ \hline 900 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times 20 \\ \hline 880 \\ + 45 \\ \hline 925 \end{array}$$

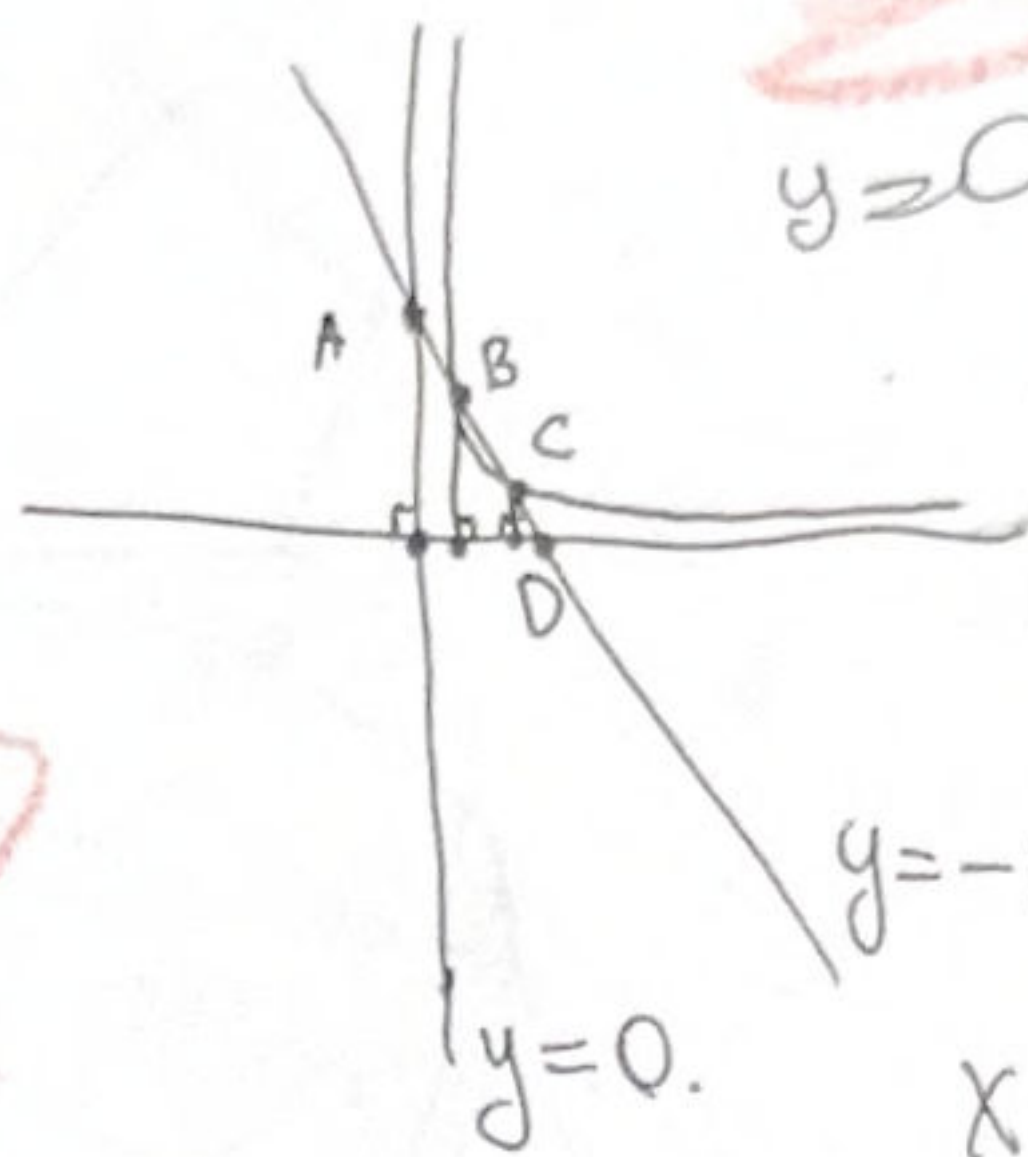
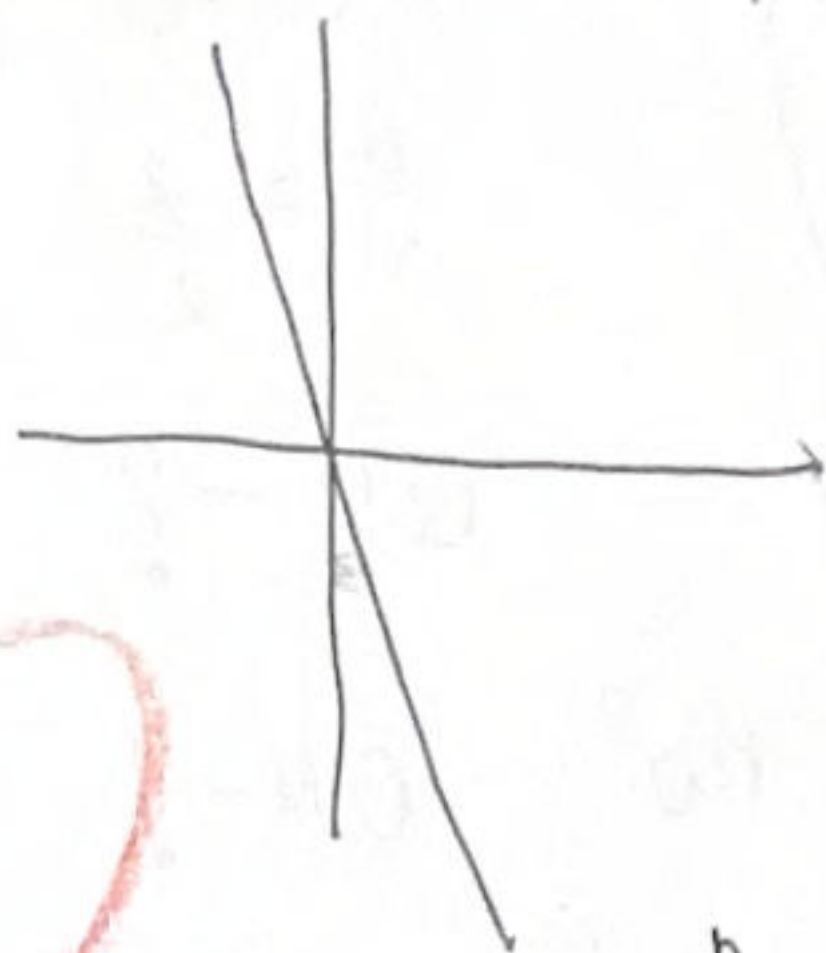
$$n = 44.$$

Черновик.

2



$a \neq 0$ .



$y=0$ .

$y=-18x+a$

$y=0$ .

$x=0$

~~AB~~  
A

$BC = \frac{1}{3} AD$   
 $AB = CD$

$$-18x + a = 0$$

A.  $x = -\frac{a}{-18} = \frac{a}{18}, y = 0.$

B.  $y = \frac{1}{x}, y = -18x + a.$

$$\frac{1}{x} = -18x + a \Rightarrow 1 = -18x^2 + ax$$

$$18x^2 - ax + 1 = 0.$$



$$D = a^2 - 72$$

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 72}}{36}$$

$\frac{18}{4}$

$$A_x B_x = \left\{ 0; \frac{a - \sqrt{a^2 - 72}}{36} \right\}$$

$$B_x C_x = \left\{ \frac{a - \sqrt{a^2 - 72}}{36}; \frac{a + \sqrt{a^2 - 72}}{36} \right\}$$

$$y = -18x + a.$$

$$C_x D_x = \left\{ \right.$$

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - 72}}{36} = \frac{2\sqrt{a^2 - 72}}{36}$$

$$a = 3\sqrt{a^2 - 72}$$

$$a^2 = 9(a^2 - 72)$$

$$9 \cdot 72 = 8a^2$$

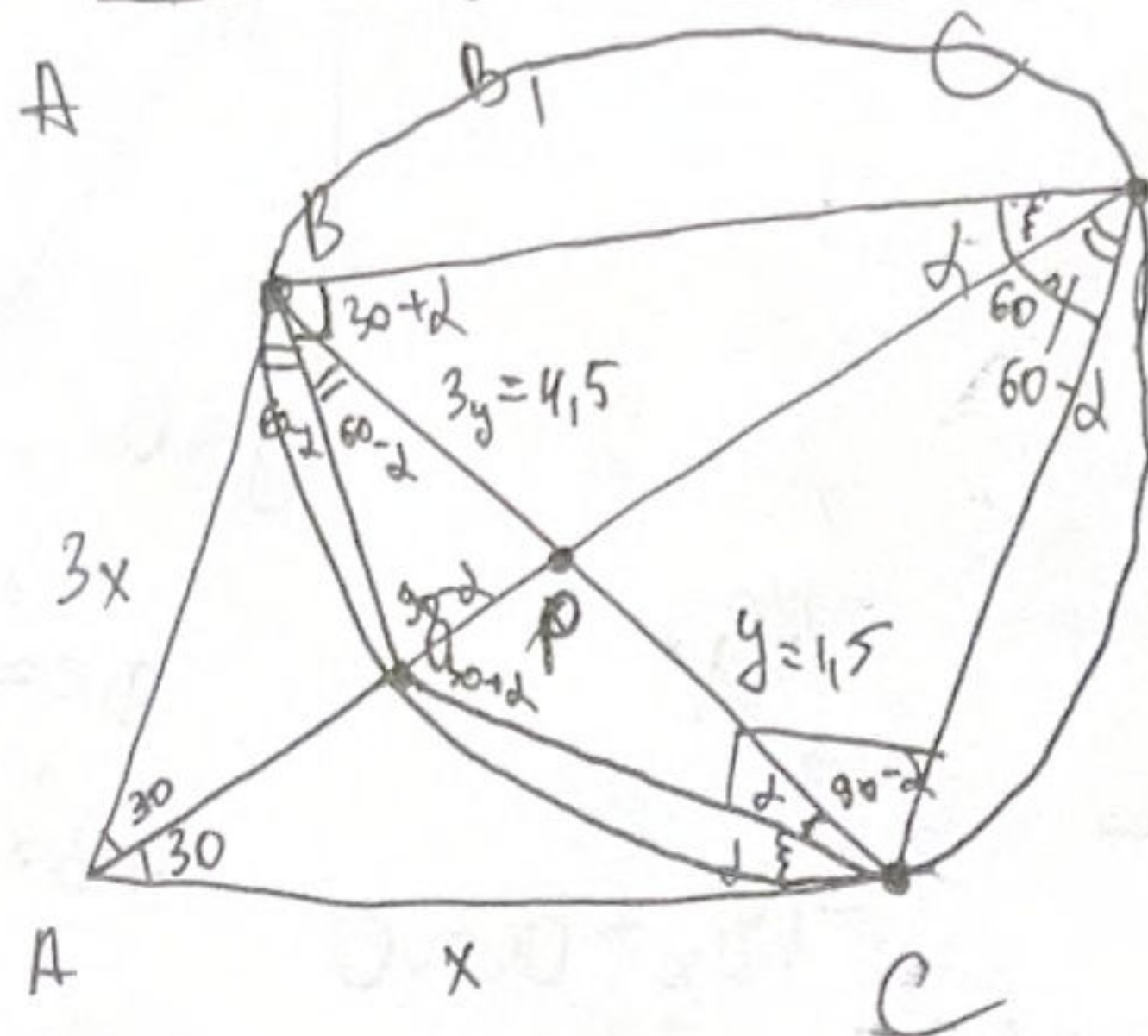
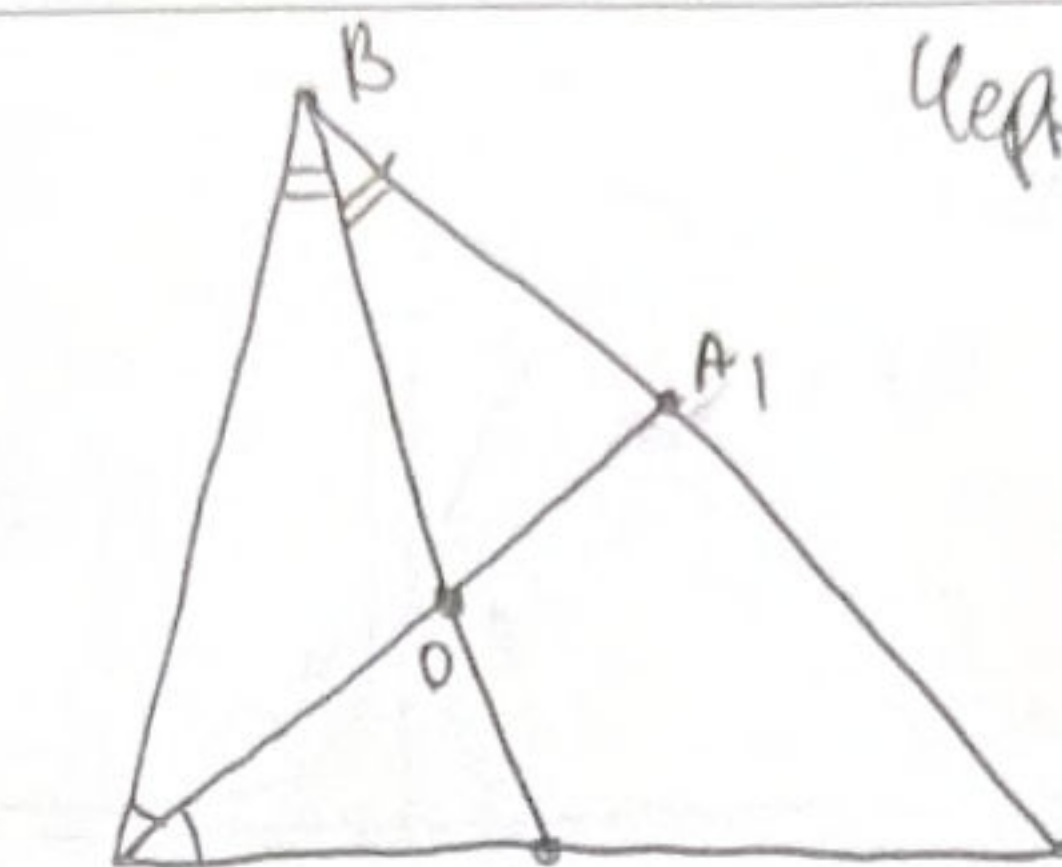
$$81 = a^2 \Rightarrow a = 9$$



$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 - 13x + 11 \mid x-1 \\ \underline{x^3 - x^2} \phantom{+ 11} \\ 2x^2 - 13x + 11 \\ \underline{2x^2 - 2x} \phantom{+ 11} \\ -11x + 11 \\ \underline{-11x + 11} \\ 0 \end{array}$$

2

Черновики.



$$\angle BMC = 60^\circ$$

$$BC = 6.$$

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$OM = ?$$

$$OM = ?$$

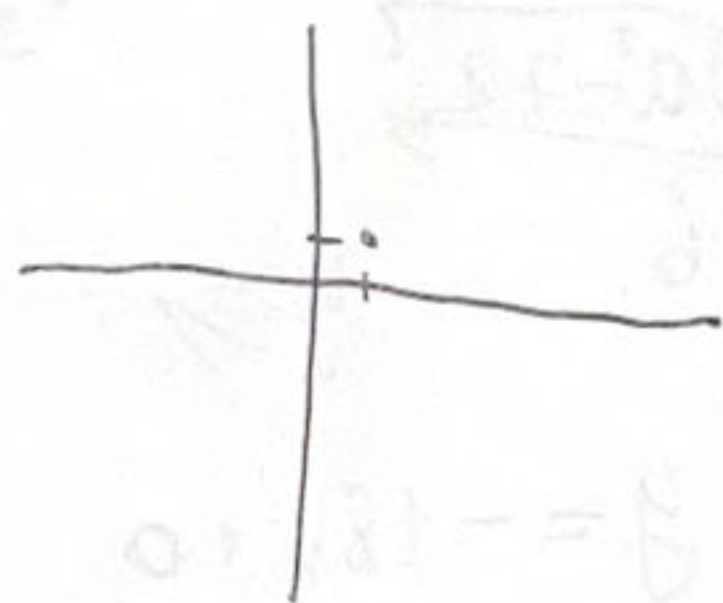
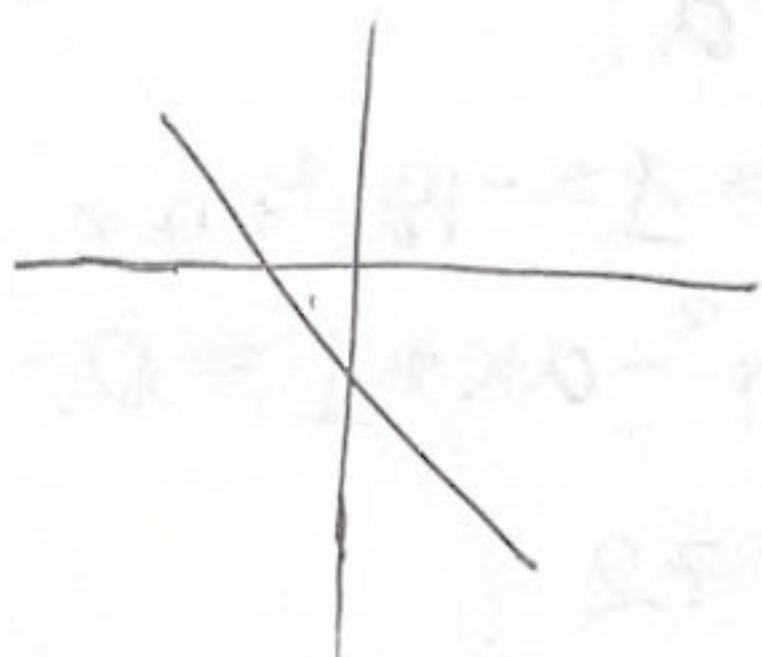
он- диаметр.

120.

он-

он-?

150-2  
g



$$OP \cdot PM = BP \cdot PC = 4,5 \cdot 1,5$$

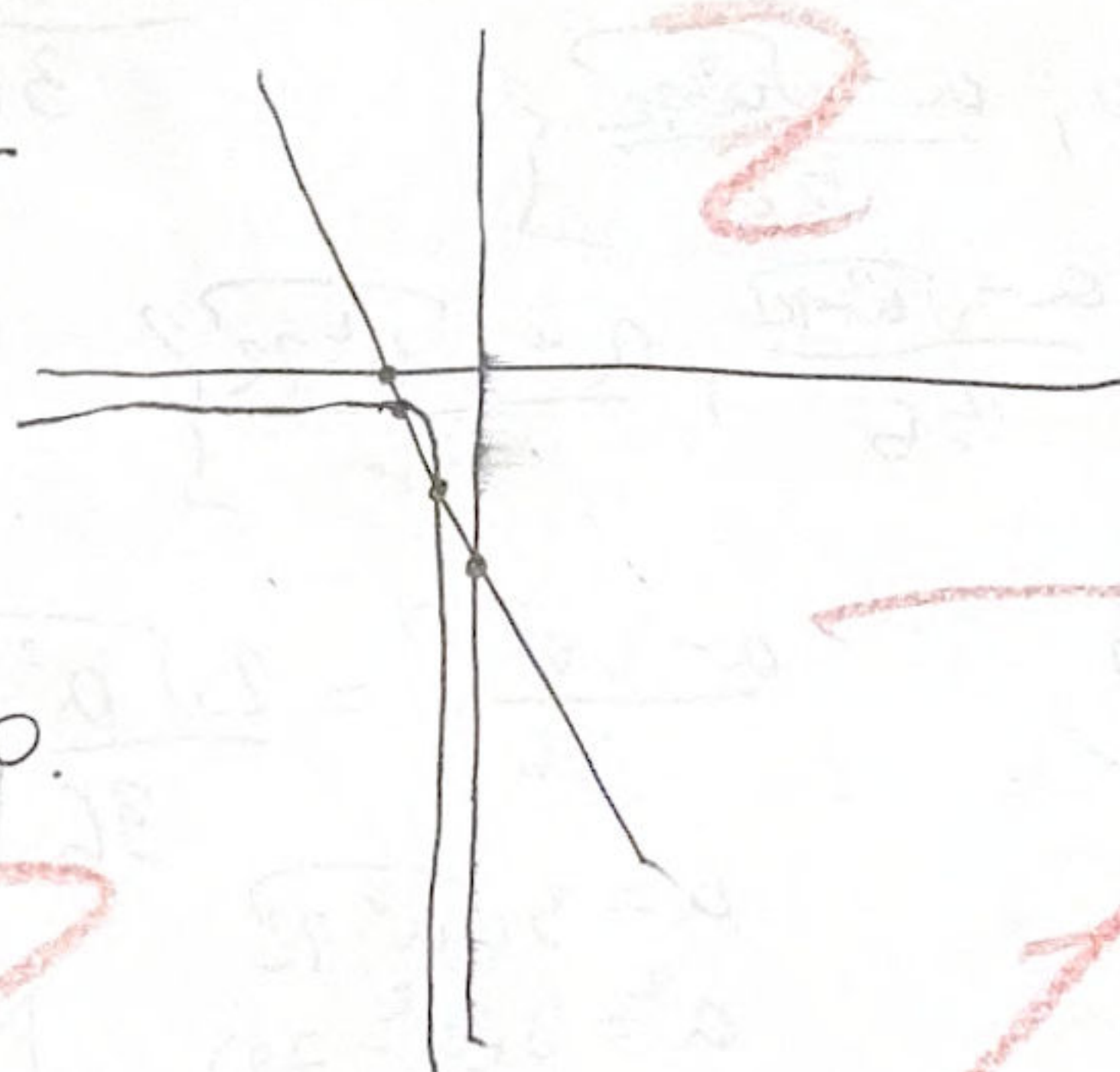
$$\frac{PM}{\sin(90-2)} = \frac{1,5}{\sin(60-2)}$$

$$\frac{OP}{\sin 2} = \frac{1,5}{\sin(30+2)}$$

$$y = -18x + a.$$

$$y = -18x + a = 0$$

$$y = -18x + a \sim y = 0.$$



Черновик.

$$x^2 - x - 2 < 0.$$

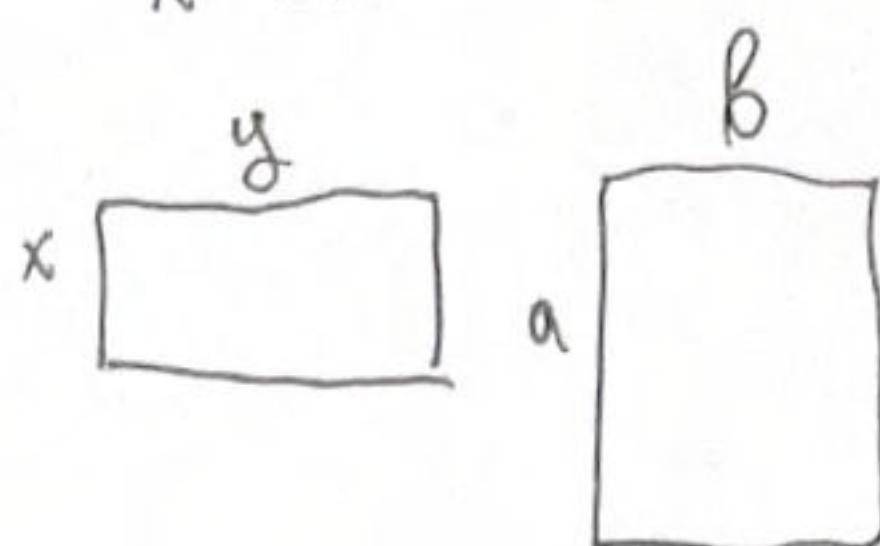
$$-x^2 + x + 2$$

$$x^3 + x^2 - x - 2 = 12x - 13.$$

$$x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0.$$

$$x = 1.$$

$$x^3 + x^2$$



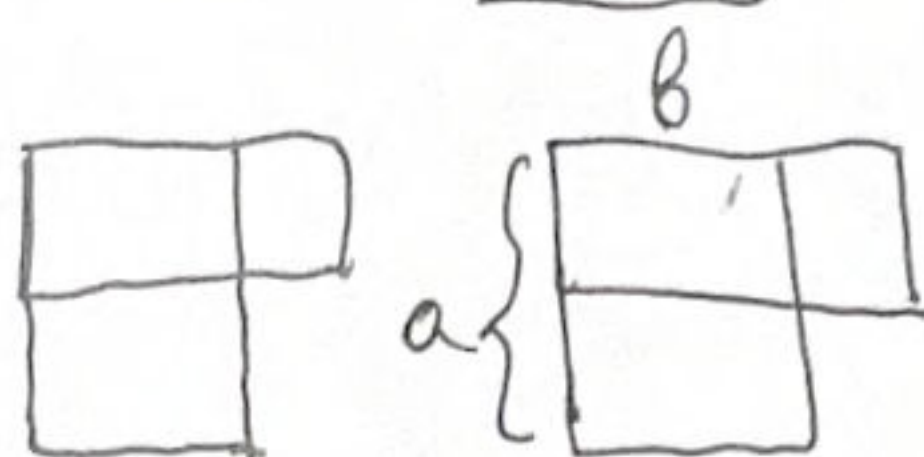
$$xy = 2x + 2y$$

$$ab = 2a + 2b$$

$$x \neq y$$

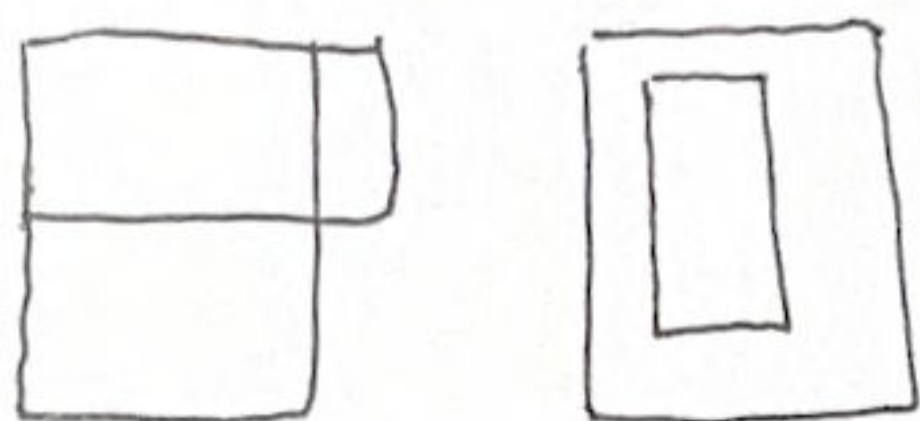
$$x \leq y$$

$$a > b.$$



$$a > b > y > x$$

$$a >$$



$$xy - 2x - 2y + 4 = 4.$$

$$(x - 2)(y - 2) = 4$$

$$x = 4, y = 4$$

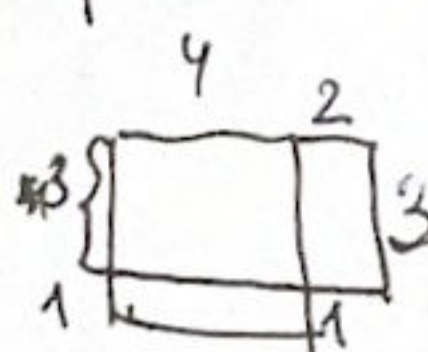
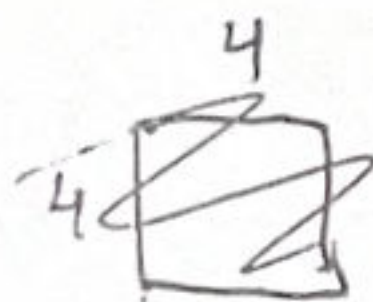
$$x = 3, y = 6$$

$$a = 4, b = 4$$

$$a = 3, b = 6.$$

$$(a - 2)(b - 2) = 4.$$

$$1 \cdot 4$$



$$4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 10.$$

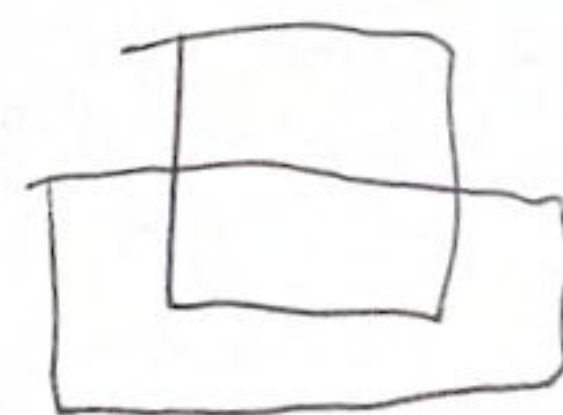
$$1 \cdot 8$$

$$2 \cdot$$

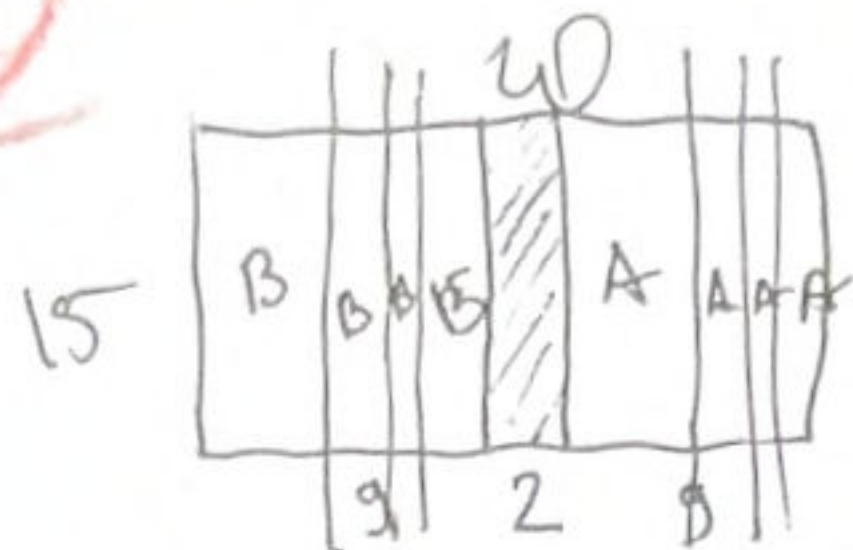
$$3 \cdot 4.$$

$$1 \cdot 24$$

$$3 \cdot$$



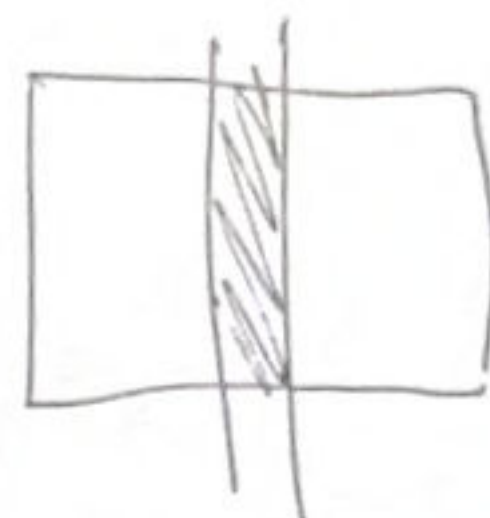
Черновик  
А.м.



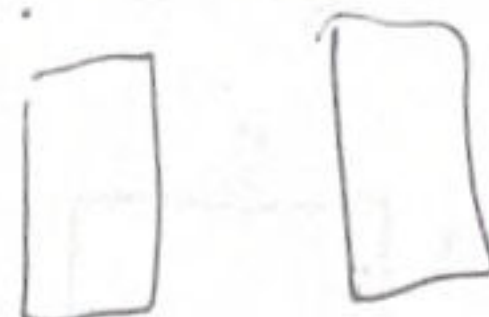
300 cm<sup>2</sup>

$$3 \text{ cm}^2 \leq S \leq 30 \text{ cm}^2$$

$$2 \cdot 15 = 30 \text{ cm}^2$$



А.м.



15 · 2



$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$$

$$x^3 - (x^2 - x - 2) = 12x - 13$$

$$x^3 - (x - 2)(x + 1) = 12x - 13$$

$$x^3 - x^2 + x + 2 = 12x - 13$$

$$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$$

✗



$$22 + 4 = 26$$

$$x^3 - 11x + 15 =$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ + 15 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ + 9 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 11x + 15 \quad | \quad x - 3 \\ - x^3 - 3x^2 \\ \hline 2x^2 - 11x + 15 \\ - 2x^2 - 6x \\ \hline -5x + 15 \end{array}$$

$$(x - 3)(x^2 + 2x - 5) = 0$$

$$x = 3$$

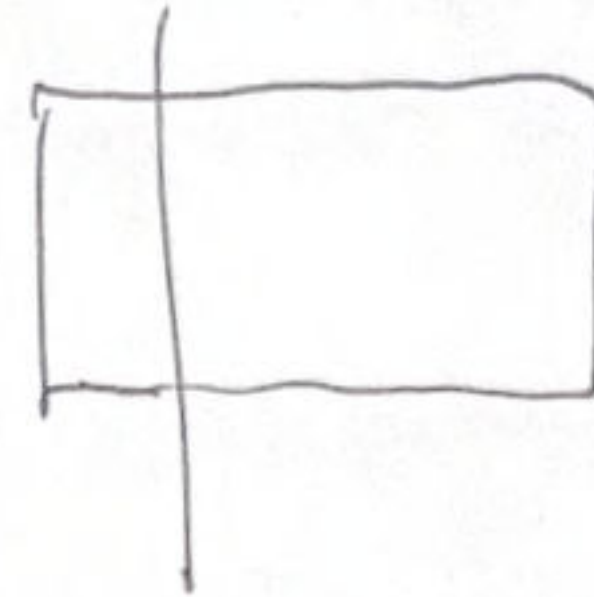
$$D = 4 + 4 \cdot 5 = 24$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{2}$$

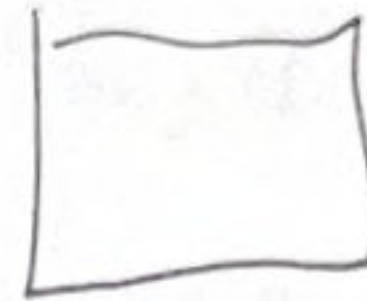
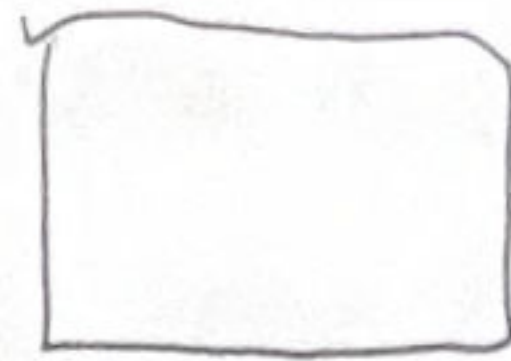
Черновик.

Ваше.

15



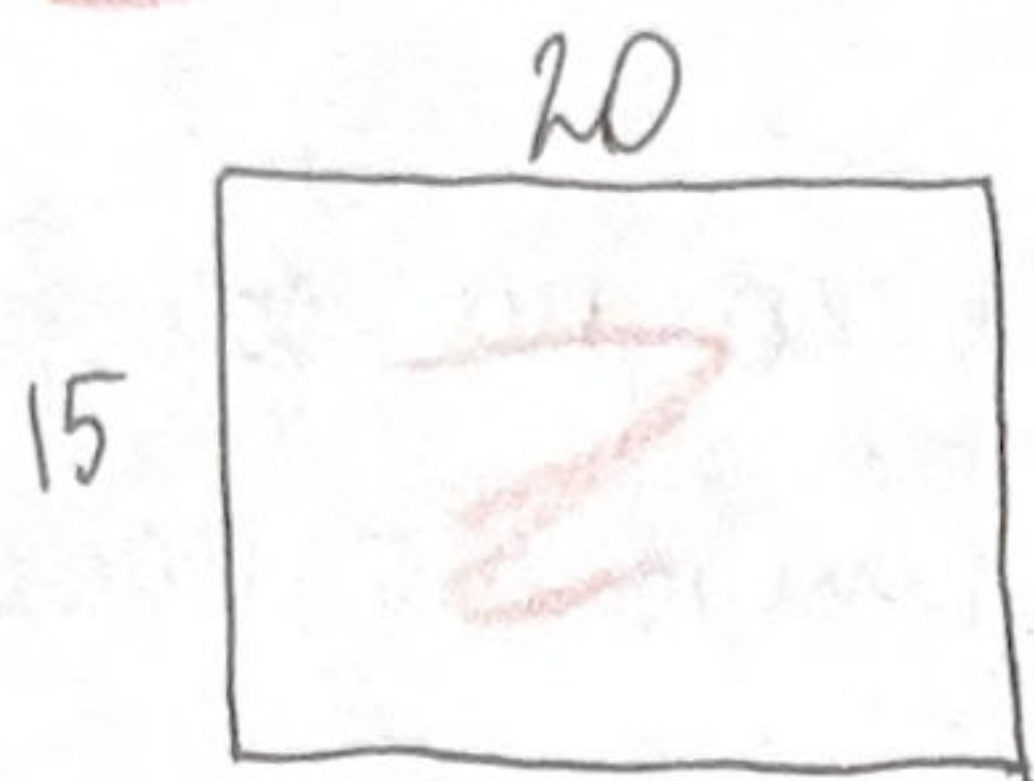
15



$< \frac{1}{100}$  не должно  
получаться

Чистовик.

Задача 1.



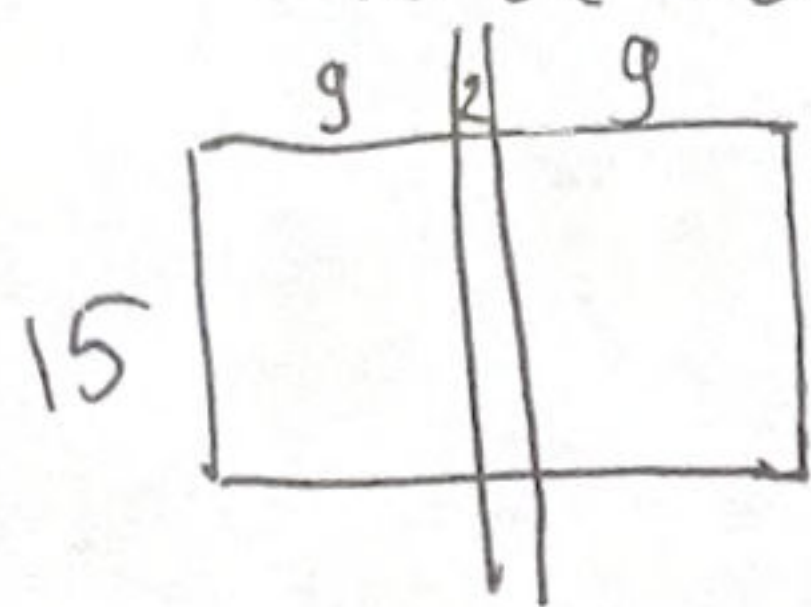
Площадь торта  $20 \cdot 15 = 300 \text{ см}^2$

Тогда площадь куска:  $S_{\text{куска}} \leq a$

За 1 ход можно съесть  $\leq 30 \text{ см}^2$

Пусть Аня первым ходом вырежет из середины кусок

$2 \cdot 15$  и съест его. Тогда останутся 2 одинаковых



куска  $9 \times 15$ . Дальше Аня будет  
Просто копировать ходы Вани, т.е

Если Ваня как-то режет кусок, то Аня ходит также на симметричном куске. Т.к Аня ходит симметрично, то она не может ни отрезать  $< 30 \text{ см}^2$ , ни съесть больше  $30 \text{ см}^2$ , ~~т.к~~ т.к по условию девочка делает  $\leq 2$  разреза (т.е. 0 разрезов), то из-за симметричной стратегии у Ани ~~тоже~~ есть возможность доест торт.

Ответ: Аня выигрывает.

Бен Чистовик.  
Задача 6.

Всего есть 6 граней. У каждого жука на выбор  
есть 4 грани, т.е. всего комбинаций после  
броска  $4^6$  (возможных). Пусть жуки 4.4