0 378989 850009

37-89-89-85
(159,3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Якуткина Михаила Владимировича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

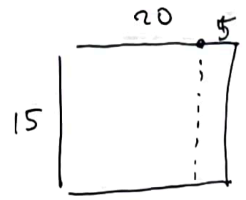
Подпись участника

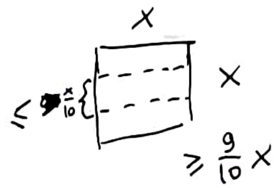
...я из ... листа вкладыша запрещается!

37-89-89-85
(1593)

60 (шестьдесят)

Черновик





$x \leq 15$

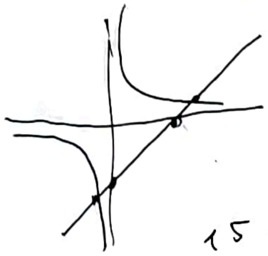
$x \cdot x$

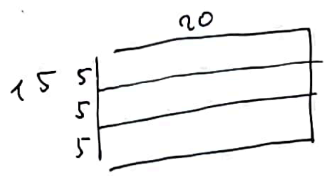
$\frac{9}{10}x \cdot x$

$\frac{1}{100}\left(\frac{9}{10}x^2\right) =$

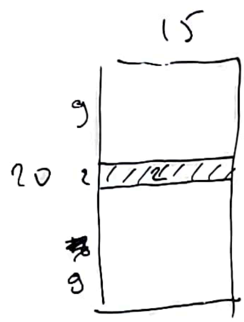
$= \frac{9}{1000}x^2$

$\frac{1}{10}x \cdot \frac{9}{10}x$





$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$



$x^3 - x^2 + x + 2 = 12x - 13$

$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$

$-8 \quad 4 \quad 22 \quad 15$

$x \geq 1$

$(x-1)x^2 - 11x + 15 = 0$

$x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13$

$(x-1)x^2 - \cancel{11x}$ vs $11\cancel{x}$

$3 \quad 4$

1) $x^2 - x - 2 \geq 0 \iff x \in (-\infty; -2] \cup [1; \infty)$

$x_1 = -2$

$x_2 = 1$

$64 - 16 - 52 + 11 = 0$

$x^3 - x^2 - x - 2 = 12x - 13$

$75 - 68$

$x^3 - x^2 - 13x + 11 = 0$

$8 - 4 - 26 + 11$

$27 - 9 - 39 + 11$

38

Черновик

$\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ $4\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}<3$

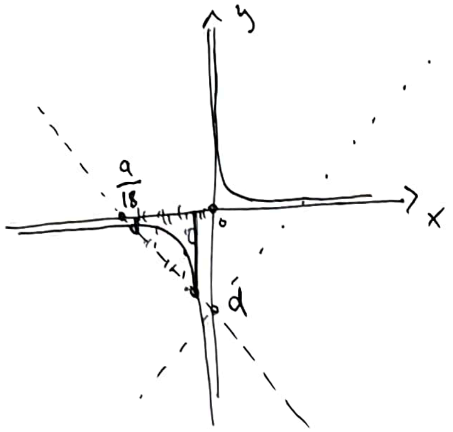
6

$S \geq 4k$

$y=-18x+a$

$y=-18x+a$

$y=\frac{1}{x}$



$\frac{1}{x}=-18x+a$

$1=-18x^2+ax$

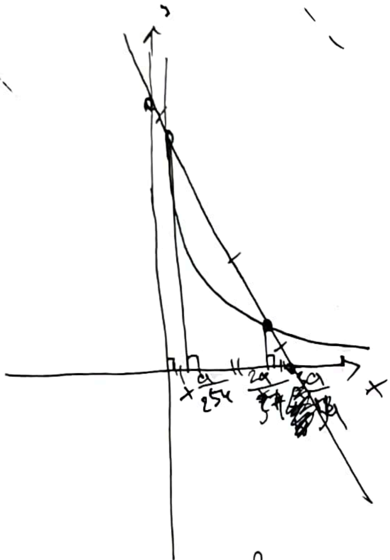
$18x^2-ax+1=0$

$x_1+x_2=\frac{a}{18}$

$\cancel{x_1=x_2=\frac{a}{36}}$

$x_1+x_2=\frac{a}{18}$

x_1



$x_1=\cancel{\frac{a}{54}}\ \cancel{\frac{a}{27}}\ \cancel{\frac{a}{18}}$

$x_1=\frac{a}{54}$

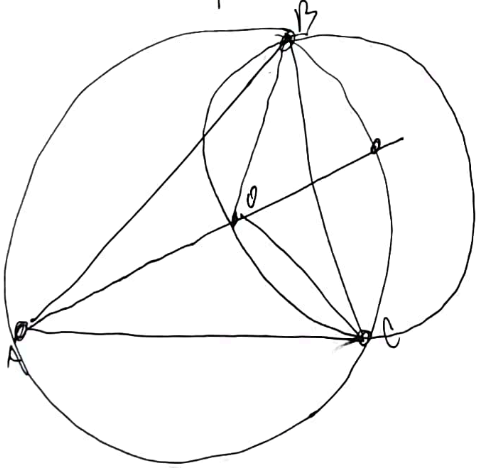
$x_2=\frac{2a}{54}$

$\frac{3a}{54}$

$x_1+x_2=\frac{a}{18}$

$x_1x_2=\frac{1}{18}$

$\frac{a}{54}\cdot\frac{2a}{54}=\frac{1}{18}$



$2a^2=\frac{54^2}{18}=54\cdot 3$

$a^2=27\cdot 3=81$

$a=\pm 9$

Чистовик

Задача №5

Рассмотрим точки пересечения прямой и гиперболы.

$$\begin{cases} y = -18x + a \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} = -18x + a \Leftrightarrow 18x^2 - ax + 1 = 0$$

x_1, x_2 – корни, являются точками пересечения. По теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{a}{18}$. С другой стороны найдем точки пересечения прямой с Ox и Oy.

Ox: $-18x + a = 0 \Leftrightarrow \cancel{x} = \frac{a}{18}$, точка A

Oy: $y = a$

Также так как x_1 и x_2 делят отрезок на 3 равные части, то по теореме Фалеса равны также и проекции этих отрезков на Ox, т.е. $Ox_1 = x_1x_2 = x_2A$ (x_1 - точка соотв. корню x_1)

Тогда $x_1 = \frac{a}{54}$, $x_2 = \frac{2a}{54}$, $A = \frac{3a}{54} = \frac{a}{18}$

(без ограничение общности $x_1 = \frac{a}{54}$ из-за равноправие x_1 и x_2). Тогда так как $x_1 x_2 = \frac{1}{18}$ также по теореме Виета, то $\frac{a}{54} \cdot \frac{2a}{54} = \frac{1}{18} \Leftrightarrow 2a^2 = \frac{54^2}{18} = 54 \cdot 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 = 27 \cdot 3 = 81 \Rightarrow a = \pm 9$

Ответ: $a = \pm 9$

Черновик

$n \quad t \quad k$

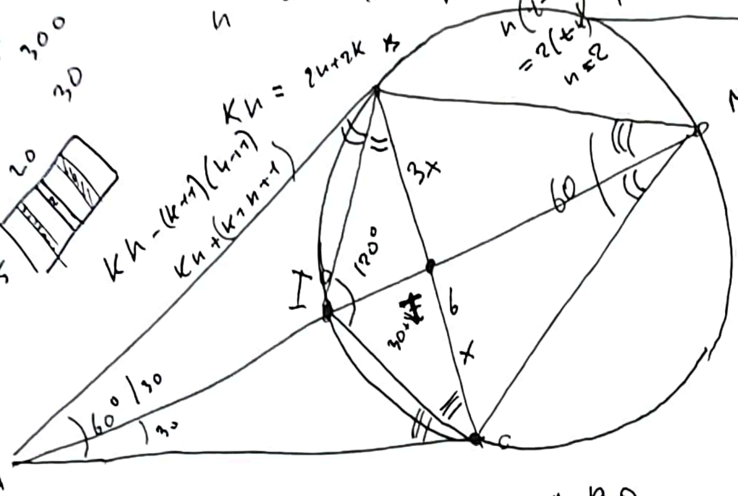
$nt = 2n+2t \qquad n(t-k) = 2t-2k$

$n(t-k) = 2(t-k)$, $n = 2$

$kn = 2n + 2k$

$kn - (k+1)(n+1)$

$kn + (k+n+1)$



$AB = 3AC$

$\triangle AMC \sim \triangle ABO$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MC}{BO} = \frac{AC}{AO}$$

$$\frac{AO + OM}{AB} = \frac{AC}{AO}$$

$$AB \cdot AC = (AO + OM)\,AO$$

37-89-89-85
(1593)

Чистовик

Задача №1

Первым ходом Аля делит пирог на 3 части, съедая полоску 2×15 по середине пирога (делит ‖ стороне 15 в отношении 9:2:9) Тогда она съест ровно $\frac{2 \cdot 15}{20 \cdot 15} = \frac{1}{10}$ пирога. Теперь есть 2 разделенных одинаковых куска пирога. Приведем стратегию за Алю, которая позволит ей выиграть.

Симметрия:

Аля сможет добиться того, чтобы торт был симметричен относительно вырезанной 1 ходом полоски.

Если

Чистовик

Задача №7

Пусть $n \geq 45$. Так как Петя решил больше Васи, а Вася решил $\geq n$, то Петя решил строго $> n$.

$\Rightarrow$ кол-во решенных задач $> 45 \cdot 20 = 900$. Тогда по принципу Дирихле: если каждую задачу решило < 10 человек, то суммарно решений $\leq 9 \cdot 100 = 900$, а решено > 900. Противоречие.

$\Rightarrow$ есть задача, которую решило ≥ 10.

Покажем, что для меньших n утверждение неверно. Для этого достаточно рассмотреть $n = 44$ ($n < 44$ получается из примера на 44) ((удалением некоторых решений.))

Пример

Пусть первые 9 решили первые 44 задачи. Тогда на Петю с 45 и 9 человек с 44 задачами остается $100 - 44 = 56$ задач.

Распределим 9 человек так: (номера нерешенных)

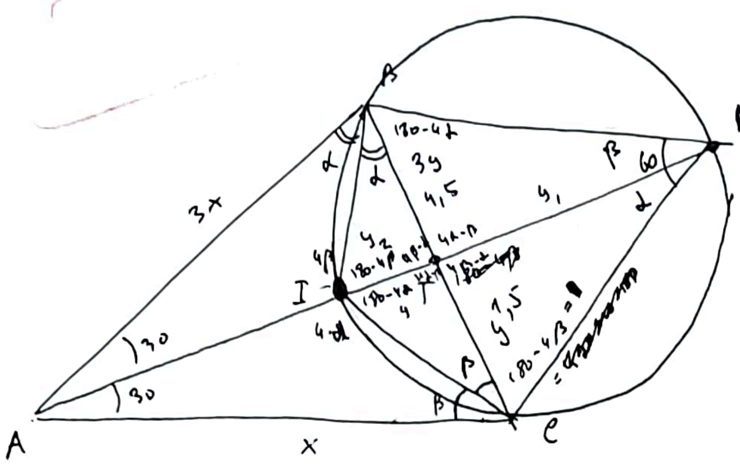
1) 1–12
2) 13–24
3) 25–36
4) 37–48
5) 49–56, 1, 2, 3, 4
6) 5–16
7) 17–28
8) 29–40
9) 41–52.

Тогда каждая из задач 1–52 не решена дважды. Пусть Петя решил с 1 по 45. Тогда задачи 1–45 решены по 9 раз, 46–52 по 8 раз, 53–56 по 9 раз. $\Rightarrow$ ни одна из задач не решена ≥ 10 людьми. ЧТД

Ответ: 45

~~Лист 3 из 4~~

Черновик



$2R\sin 60 = 6$

$R\sin 60 = 3$

$R = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$

$y_1 y_2 = 4,5 \cdot 1,5$

$150-\alpha+\beta$

$30-\beta+\alpha$

$180-3\beta$

$y_1 y_2 = 3 \cdot 1,5^2$

$\frac{y_1}{1,5} = \frac{y_2}{4,5}$

$4,5 y_1 = 1,5 y_2$

$3y_1 = y_2$

$3y_1^2 = 4,5 \cdot 1,5$

$180-3\alpha$

$\frac{x}{\sin 2\alpha} = \frac{3x}{\sin 2\beta}$

$y_1^2 = 1,5^2$

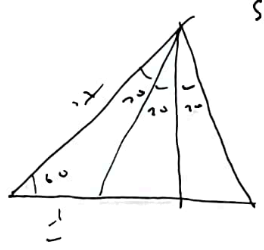
$y_1 = 1,5$

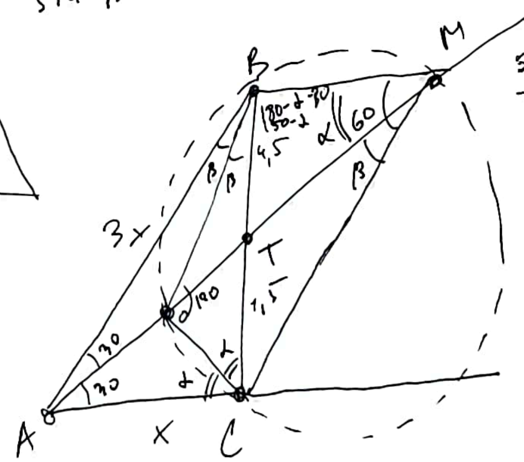
$y_2 = 3,5$

$3\sin 2\alpha = \cancel{\frac{1}{3}}\sin 2\beta$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta} = 3$

$\frac{\sin\beta}{4,5} = \frac{MC}{\cdot}$





$\frac{\sin\alpha}{4,5} = \frac{MB}{\cdot}$

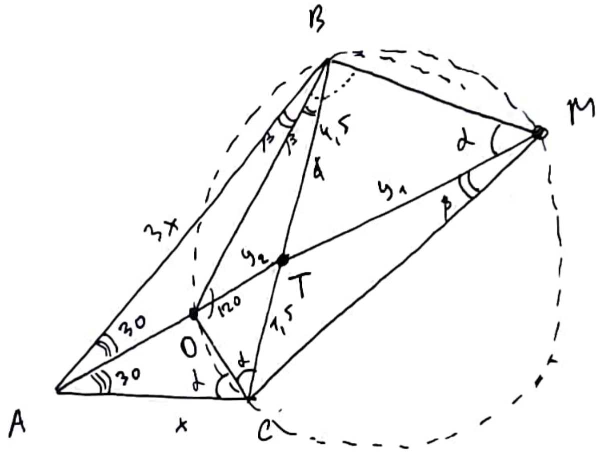
Чистовик

Задача № 4

$T = BC \cap AM$

$\angle ACO = \alpha$

$\angle ABO = \beta$



По св-ву биссектрисы $\frac{BT}{TC} = \frac{AB}{AC} = 3$

$\Rightarrow BT = 4,5;\ TC = 1,5.$

$\angle ABM = 180^\circ - 30^\circ - \alpha$ ($\angle BMA = \angle BCO$ из вписанности)

$\Rightarrow \angle OBM = \angle ABM - \beta = 180^\circ - 30^\circ - \alpha - \beta =$

$= 180^\circ - \frac{1}{2}(60^\circ + 2\alpha + 2\beta) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle OBM = 90^\circ \Rightarrow OM$ - диаметр окружности.

$BC = 2R \sin\angle BMC = 2R\sin 60$ ($\angle BMC = \alpha+\beta = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$)

$\Rightarrow 2R = OM = \frac{BC}{\sin 60} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3}$

Ответ: $OM = 4\sqrt{3}$