0 985267 160004

98-52-67-16
(161.34)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения МОСКВА
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Ярды Александра Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» 04 2025 года

Подпись участника

80 (восемьдесят) ЛИСТ-ВКЛАДЫШ /Нечаев

98-52-67-16 (161.34)

Чистовик. N.1. Кремена

$$\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{9x^2-12x+4}-\left(\sqrt{(x-1)^2}\right)^2=\sqrt{6+\sqrt{20}}-\sqrt{6-\sqrt{20}}$$

$$\sqrt{(2x-3)^2}+\sqrt{(3x-2)^2}-\left(\sqrt{x-1}\right)^2=\sqrt{(\sqrt5+1)^2}-\sqrt{(\sqrt5-1)^2}$$

Так как $\sqrt{x-1}\in\mathbb{R}$, то $x\geq1$, но тогда $3x-2\geq1$, значит $\sqrt{(3x-2)^2}=|3x-2|=3x-2$. $\sqrt{(\sqrt5+1)^2}=|\sqrt5+1|=\sqrt5+1$, $\sqrt{(\sqrt5-1)^2}=$ $=|\sqrt5-1|=\sqrt5-1$, тогда с учётом $\sqrt{(2x-3)^2}=|2x-3|$:

~~$\begin{cases}x\geq1\\|2x-3|+3x-2=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1\leq x\leq1{,}5\\3-2x+3x-2=2\end{cases}\\\begin{cases}x>1{,}5\\2x-3+3x-2=2\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1\leq x\leq1{,}5\\x=1\end{cases}\\\begin{cases}x>1{,}5\\x=\end{cases}\end{array}\right.$~~

$$\begin{cases}x\geq1\\|2x-3|+3x-2-x+1=\sqrt5+1-\sqrt5+1\end{cases}$$

$2x-3\geq0$ при $x\geq1{,}5$, $2x-3<0$ при $x<1{,}5$, тогда:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1\leq x<1{,}5\\3-2x+3x-2-x+1=2\end{cases}\\\begin{cases}1{,}5\leq x\\2x-3+3x-2-x+1=2\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1\leq x<1{,}5\\2=2\end{cases}\\\begin{cases}x\geq1{,}5\\x=1{,}5\end{cases}\end{array}\right.$$

Тогда $x\in[1;1{,}5]$.

Ответ: $x\in[1;1{,}5]$.

N.2.

$4^{5-\frac1x}\geq a+\sin2^x$; $4^{5-\frac1x}-\sin2^x\geq a$. Заметим, что $4^{5-\frac1x}<4^5=1024$ при $x>0$. Покажем, что $a=1025$ подойдет и минимально. Подойдет оно потому, что $4^{5-\frac1x}<1024$ при $x>0$

Чистовик.

и $-\sin 2^x \le 1$, значит $4^{5-\frac{1}{x}} - \sin 2^x < 1025$, значит решений $x>0$ нет. Для доказательства минимальности покажем, что $\forall a<1025\ \exists x:\ 4^{5-\frac{1}{x}}-\sin 2^x \ge a$. Будем рассматривать x такие, что $\sin 2^x=0$, то есть $\cancel{x=}\ 2^x=\pi n, n\in \mathbb{Z}$ (в силу $x>0$ рассматриваем $n\in N$), $x=\log_2 \pi n, n\in N$. При таких x $4^{5-\frac{1}{x}}-\sin 2^x = 4^{5-\frac{1}{\log_2\pi n}}+1 = 4^{5-\log_{\pi n}2}+1$

$4^{5-\log_{\pi n}2}+1 \ge a$

$4^{5-\log_{\pi n}2}\ge a-1$, $a<1025$, тогда $a-1<1024$. В силу

$4^{5-\log_{\pi n}2}>0$ и $a-1>0$ прологарифмируем по основанию 4:

$5-\log_{\pi n}2 \ge \log_4(a-1)$, но $\log_4(a-1)<\log_4 1024<5$, тогда

~~поскольку~~ обозначим $5-\log_4(a-1)=k$; $k\ge\log_{\pi n}2$, или $k\in(0;\cancel{5}+\infty)$

$k\cdot\log_2\pi n\ge 1$ ($\log_2\pi n>0$ при $n\in N$, знак нер-ва не меняем), тогда достаточно взять такое n, что $\log_2 \pi n\ge \frac{1}{k}$, в силу того, что $f(n)=\log_2\pi n$ при $n\in N$ имеет $E(f)=[\log_2\pi;+\infty)$ такое n найдется*. Значит, $a<1025$ не подойдут.

(* $\log_2\pi n\ge\frac{1}{k} \Leftrightarrow 2^{\log_2\pi n}\ge 2^{\frac{1}{k}}$, $\pi n\ge 2^{\frac{1}{k}}$, тогда подойдут $n\ge\frac{2^{\frac{1}{k}}}{\pi}=\cancel{\frac{2\left(\frac{1}{5+\log_4(a-1)}\right)}{\pi}}\ \frac{2^{\frac{1}{5-\log_4(a-1)}}}{\pi}$).

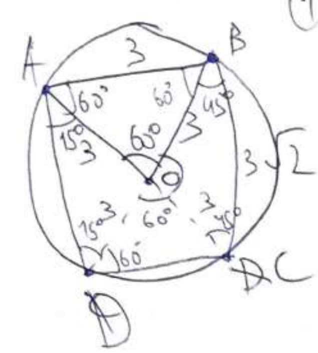
Ответ: $a=1025$.

№3.

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
98-52-67-16		+	+	±	+	+	±	0	–

98-52-67-16
(161.34)

Чистовик.



① O – центр окружности, ABCD – искомый четырехугольник, $AB=3$, $CD=3$, $BC=3\sqrt{2}$. $OA=OB=OC=OD=3$. Тогда ΔAOB и ΔODC – равносторонние (все стороны 3), значит $\angle AOB=\angle COD=60^\circ$. В силу $3^2+3^2=(3\sqrt{2})^2$ ΔBOC – прямоугольный равнобедренный, $\angle BOD=90^\circ$. Тогда $\angle AOD=360^\circ-2\cdot60^\circ-90^\circ=150^\circ$. Тогда $\angle ABD=\frac{1}{2}\angle AOD=75^\circ$, $\angle DOA=\frac{180^\circ-150^\circ}{2}=15^\circ$, $\angle DAB=15^\circ+60^\circ=75^\circ$, $\angle ADB=\frac{1}{2}\angle AOB=30^\circ$, тогда ΔABD – остроугольный, значит O внутри него, значит O внутри ABCD, значит

$$S_{ABCD}=S_{AOB}+S_{OBC}+S_{OCD}+S_{AOD}=\frac{1}{2}\cdot3^2\cdot(\sin60^\circ+\sin90^\circ+\sin60^\circ+\sin150^\circ)=4{,}5\cdot\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{9\cdot(2\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)}{4}$$

② Если соседние стороны по 3: $AB=BC=3$, $CD=3\sqrt{2}$.

Аналогично $\angle AOD=150^\circ$, $\angle ABD=\frac{1}{2}\angle AOD=75^\circ$, $\angle DAB=\frac{180^\circ-150^\circ}{2}+60^\circ=75^\circ$, $\angle ADB=180^\circ-75^\circ-75^\circ=30^\circ$, значит ΔABD – остроугольный, тогда O внутри ΔABD, значит внутри ABCD, значит $S_{ABCD}=S_{AOB}+S_{BOC}+S_{COD}+S_{DOA}=\frac{1}{2}\cdot3^2(\sin60^\circ+\sin60^\circ+\sin90^\circ+\sin150^\circ)=\frac{9\cdot(2\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)}{4}$.

Ответ: $S_{ABCD}=S_{max}=\frac{9\cdot(2\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)}{4}$.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик. N.4.

$\sin^3(\pi x)+\sin^3(2\pi x)-\sin^3(4\pi x)=(\sin(\pi x)+\sin(2\pi x)-\sin(4\pi x))^3$

$\sin\pi x=a,\ \sin 2\pi x=b,\ \sin 4\pi x=c$:

$a^3+b^3-c^3=(a+b-c)^3$

$(a+b-c)^3=(a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ac)(a+b-c)=a^3+b^3-c^3+$

$+a^2b-a^2c+b^2a-b^2c+c^2a+c^2b+2a^2b+2ab^2-2abc-2abc-2b^2c+$

$+2bc^2-2a^2c-2abc+2ac^2=a^3+b^3-c^3+3a^2b-3a^2c+3b^2a-3b^2c+3c^2a+$

$+3c^2b-6abc$

$0=3\cdot(a^2b+b^2a+c^2a+c^2b-a^2c-b^2c-2abc)$

$0=a^2b+b^2a+c^2a+c^2b-a^2c-b^2c-2abc$

~~$(b-c)(ab+a)b(a-c)+(c^2+a^2-ac))=0$~~

$a^2(b-c)+ab(b-c)+ac(c-b)+cb(c-b)=0$

$(b-c)(a^2+ab-ac-bc)=0$

$(b-c)(a+b)(a-c)=0$

$\left[\begin{array}{l}b=c\\a=-b\\a=c\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\sin 2\pi x=\sin 4\pi x\\\sin\pi x=-\sin 2\pi x\\\sin\pi x=\sin 4\pi x\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}2\sin\pi x\cdot\cos 3\pi x=0\\2\sin 1{,}5\pi x\cos 0{,}5\pi x=0\\2\sin 1{,}5\pi x\cos 2{,}5\pi x=0\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\sin\pi x=0\\\cos 3\pi x=0\\\sin 1{,}5\pi x=0\\\cos 0{,}5\pi x=0\\\cos 2{,}5\pi x=0\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\pi x=\pi n,\ n\in Z\\3\pi x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\\1{,}5\pi x=\pi n,\ n\in Z\\0{,}5\pi x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\\2{,}5\pi x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}x=n,\ n\in Z\\x=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}n,\ n\in Z\\x=\frac{2}{3}n,\ n\in Z\\x=1+2n,\ n\in Z\\x=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}n,\ n\in Z.\end{array}\right.$

98-52-67-16 (161.34)

Чистовик.

На $[0{,}3; 1{,}8]$ (n - целое).

$$\left[\begin{array}{l} 0{,}3 \leq n \leq 1{,}8 \\ 0{,}3 \leq \frac{1}{6} + \frac{n}{3} \leq 1{,}8 \\ 0{,}3 \leq \frac{2n}{3} \leq 1{,}8 \\ 0{,}3 \leq 1 + 2n \leq 1{,}8 \\ 0{,}3 \leq 0{,}2 + 0{,}4n \leq 1{,}8 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ll} 0{,}3 \leq n \leq 1{,}8 & n = 1 \\ \frac{2}{5} \leq n \leq 4{,}9 & n = 1,2,3,4 \\ 0{,}45 \leq n \leq 2{,}7 & n = 1,2 \\ -0{,}35 \leq n \leq \cancel{0{,}95}\, 0{,}4 & n = 0 \\ 0{,}25 \leq n \leq 4 & n = 1,2,3,4. \end{array}\right.$$

Корни: $x = 1$; $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{5}{6}$, $x = \frac{7}{6}$, $x = 1{,}5$; $x = \frac{2}{3}$, $x = \frac{4}{3}$; $x = 1$ (уже было); $x = 0{,}6$; $x = 1$ (уже было); $x = 1{,}4$; $x = 1{,}8$.

Ответ: ~~$x = 0{,}6$; $x = \frac{1}{2}$; $0{,}5$; $0{,}6$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$; 1; $\frac{7}{6}$; $1{,}4$; $1{,}5$;~~
1, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{6}$, $1{,}5$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$; $0{,}6$; $1{,}4$; $1{,}8$.

№5.

$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ - многочлены 3-ей степени. В силу $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$ при $x \in R$ все их коэффициенты равны. ~~Тогда~~ Свободные члены равны: $12a_1 = 18a_2 = 24a_3$, тогда $a_1 = 2a_3$ и $a_2 = \frac{4}{3}a_3$. ~~Также равны коэффициенты при x и x^2:~~

~~$a_1b_1 + 12 = a_2b_2 + 18 = a_3b_3 + 24$~~ Также ясно, что $-a_1, -a_2, -a_3$ - корни $f(x)$, тогда коэффициент при x^2 равен $-(-a_1 - a_2 - a_3) = a_1 + a_2 + a_3$, с другой стороны он равен $a_1 + b_1$ у f_1, $a_2 + b_2$ у f_2, $a_3 + b_3$ у f_3, ~~a_4+b_4~~ откуда $b_1 = a_2 + a_3$, $b_2 = a_1 + a_3$, $b_3 = a_1 + a_2$, $b_1 = \frac{7}{3}a_3$, $b_2 = 3a_3$, $b_3 = \frac{10}{3}a_3$. Наконец, их коэффициенты при x равны: $a_1b_1 + 12 = a_2b_2 + 18 = a_3b_3 + 24$, откуда

Чистовик.

$\frac{14}{3}a_3^2+12=4a_3^2+18=\frac{10}{3}a_3^2+24$, откуда $\frac{2}{3}a_3^2=\cancel{9}\,6$, $a_3^2=\cancel{4,5}\,9$,

$a_3=\pm3$. Если $a_3=3$, то $a_1=6, a_2=4, b_1=7, b_2=$ $=9, b_3=10$, $f_3(x)=(x+3)(x^2+10x+24)$, $f_2(x)=(x+4)\cdot$ $(x^2+9x+18)$, $f_1(x)=(x+6)(x^2+7x+12)$, и

$f_1(x)=f_2(x)=f_3(x)=(x+3)(x+4)(x+6)$. Тогда $a_1+b_1+a_2+$ $+b_2+a_3+b_3=\underbrace{6+7+4}_{17}+\underbrace{9+3+10}_{22}=39$.

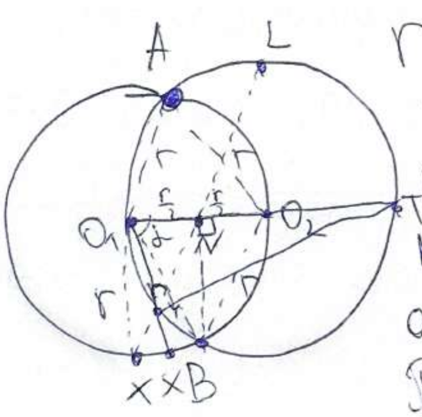
~~Если $a_3=-3$, то $a_1=-6, a_2=-4, b_1=-7, b_2=-9, b_3=-10$, и~~

~~$f_1(x)=(x-6)(x^2-$~~

Так как $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ — положительные, то $a_3=-3$ невозможен. Тогда единственный ответ это 39.

Ответ: 39.

№6.



$r=\frac{3}{2+\sqrt{2}}$, $V=1$ — объём воды, выливаемый на мышь одной поливалкой за пройденное под ней расстояние 1. O_1, O_2 — центры поливалок, N — нора (середина O_1O_2), $A, B=$ окр$(O_1;r)\cap$окр$(O_2;r)$, $O_1O_2=r$.

Пусть мышь впервые раз попала под воду в точке X, ~~т.к.~~ НУО $X\in$ окр$(O_1;r)$, а под действие 2-х — в точке Y, НУО Y на дуге BO_1. ~~Тогда наименьший объём воды на ней равен $XY+2YN$, причём X, Y, N лежат на 1 прямой. Тогда $XY\cap$окр$(O_2;r)=L\neq Y$, тогда Pow(N, окр$(O_1;r)$)=Pow(N, окр$(O_2;r)$)$=-\frac{r}{2}\cdot\frac{3r}{2}$, при композиции симметрий отн. O_1O_2 и AB окр$(O_2;r)\to$окр$(O_1;r)$,~~

Чистовик

N остаётся на месте, LN: L перейдет в X (т.к. $N \in AB$, то (LN) остается на месте, значит L перейдет в пересечение образа окр$(O_2; r)$ и (LN), лежащее снизу O_1O_2, т.е. в X), тогда $LN = NX$. Тогда $XY = LN - NY$, но $NY = \frac{3r^2}{4} : LN$, тогда $XY + 2YN = LN - NY + 2YN = LN + YN =$

$$= \frac{3r^2}{4LN} + LN \geq 2\sqrt{\frac{3r^2}{4}} = r\sqrt{3}$$ по нер-ву о средних,

причём достигается оно при $\frac{3r^2}{4LN} = LN$, $LN^2 = \frac{3r^2}{4}$,

$LN = \frac{\sqrt{3}r}{2}$, то есть $L = A$ (AN — высота равност. $\triangle O_1O_2A$, $AN = r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$).

Тогда наим. V всегда равен $XY + 2YN$, причём $X = [O_1Y) \cap$ окр$(O_1; r)$. Пусть $\angle YO_1O_2 = \alpha$, $O_1O_2 \cap$ окр$(O_2; r) = T$, $T \neq O_1$. Тогда $\angle O_1YT = 90°$ (O_1T — диаметр окр$(O_2; r)$), $\angle O_1TY = 90° - \alpha$.

Тогда $\frac{O_1Y}{\sin(90° - \alpha)} = 2r$, $O_1Y = 2r\cos\alpha$. Выразим YN:

$$YN = \sqrt{\frac{r^2}{4} + 4r^2\cos^2\alpha - 2 \cdot 2r\cos\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \frac{r}{2}} = r\sqrt{\frac{1}{4} + 4\cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha} =$$
$$= r\sqrt{\frac{1}{4} + 2\cos^2\alpha};$$

$Pow(X; \text{окр}(O_2; r)) = XO_2^2 - r^2 = XY \cdot XO_1 = r \cdot XY$, тогда

$$XY = \frac{XO_2^2 - r^2}{r} = \frac{r^2 + r^2 - 2r^2\cos\alpha - r^2}{r} = r \cdot (1 - 2\cos\alpha)$$ (либо

$XY = r - O_1Y = r(1 - 2\cos\alpha)$). ~~$\alpha \in [60°; 90°]$~~ $\alpha \geq 60°$, ведь $\angle BO_1O_2 = 60°$ и Y на $\cup BO_1$. Тогда $XY + 2YN = r\left(1 - 2\cos\alpha + 2\sqrt{\frac{1}{4} + 2\cos^2\alpha}\right) =$

$= r\left(1 - 2\cos\alpha + \sqrt{1 + 8\cos^2\alpha}\right)$ $\cos\alpha = t$, $f(t) = 1 - 2t + \sqrt{1 + 8t^2}$, $t \in [0; 0{,}5]$.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик.

Найдем точку минимума данной функции на $[0; 0{,}5]$:

$$f' = -2 + \frac{1}{2\sqrt{1+8t^2}}\cdot \cancel{2t}\,16t = -2 + \frac{\cancel{2t}\,\cancel{16t}\,8t}{\sqrt{1+8t^2}} \quad f'=0: \quad t=\pm\sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$\frac{\cancel{16t}\,8t}{\sqrt{1+8t^2}} = 2, \quad \cancel{8t}\,4t = \sqrt{1+8t^2}; \quad \cancel{64t^2}\,16t^2 = 1+8t^2; \quad t = \pm\cancel{\sqrt{\frac{1}{56}}},$$

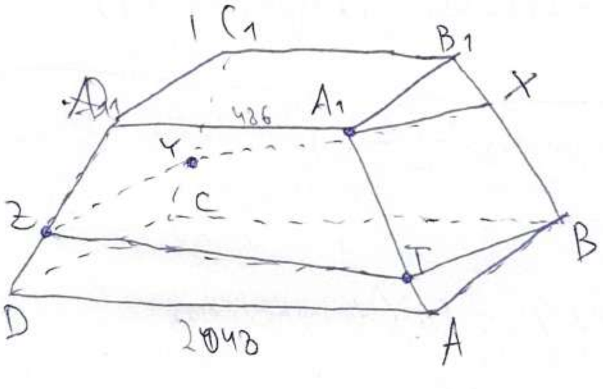
на $[0; 0{,}5]$ $t=\frac{1}{\cancel{\sqrt{56}}\sqrt{8}}$, тогда при $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{8}}$ и достигается наименьшее значение (f' на $[0; \cancel{0{,}5}\sqrt{\frac{1}{8}})<0$, на $(\sqrt{\frac{1}{8}}; 0{,}5]>0$):

$$(XY+2YN)_{min} = r\left(1-2\cdot\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{1+1}\right) = r\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}\right) =$$

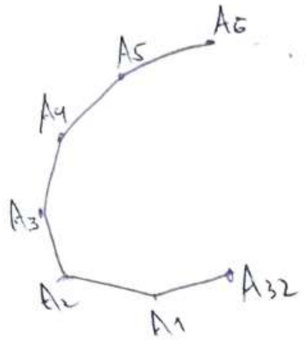
$$= r\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\right) = r\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{2+\sqrt{2}} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

N.7.



Чистовик. №8.



Первую прямую можно выбрать 32 способами, ~~вторую 30 (т.к. они должны пересечься)~~, ~~третью — 28 (не паралл. 1 и 2). Итого 32·28·30 способов~~ пусть это A_1A_2. Так как способы, получаемые поворотом и симметрией не учитываем, то первая прямая - всегда A_1A_2, то вторая прямая A_iA_{i+1}, ~~$A_i \in [2$~~, $i = 2, 3 \dots 16$ (т.к. $A_{17}A_{18}$ уже ~~использ~~ $\parallel A_1A_2$ и способы, когда $i \geq 17$ и ~~тре~~ $j \geq i$ ~~пол.~~ симм. отн. A_1A_{17} получаются), третья — A_jA_{j+1}, $j \geq i$*, $j = i+1, i+2 \dots 32$ (если $j = 32$, то прямая $A_{32}A_1$).

* Т.к. $A_1A_2 \dots A_{32}$ внутри Δ то $j \geq i$

Тогда всего способов $\sum_{i=2}^{i=16}(32-i)$ (при $i=2$ выбираем 3-ю прямую любую; при $i=3$ - любую, кроме A_2A_3; ... при $i=16$ - любую, кроме $A_2A_3, A_3A_4 \dots A_{15}A_{16}$), что равно

$30+29+28+\dots+16 = \frac{46}{2} \cdot 15 = 23 \cdot 15 = 345$. Все способы очевидно различны.

Ответ: 345.