



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Москва  
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"  
наименование олимпиады

по математике  
профиль олимпиады

Яшмолкиной Надежды Юрьевны  
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Ван

90 (девятидесяти)

70-00-95-51

(161.32)

ЧИСТОВИКЗадача 1

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} + \sqrt{9x^2 - 12x + 4} - (\sqrt{x-1})^2 = \sqrt{6+\sqrt{20}} - \sqrt{6-\sqrt{20}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{(3x-2)^2} - (\sqrt{x-1})^2 = \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |2x-3| + |3x-2| - (x-1) = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |2x-3| + |3x-2| - x + 1 = |\sqrt{5}+1| - |\sqrt{5}-1| \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{При } x \geq 1 \quad 3x-2 \geq 3-2=1 \Rightarrow |3x-2| = 3x-2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{5} > 1 \Leftrightarrow 5 > 1 \Rightarrow |\sqrt{5}-1| = \sqrt{5}-1$$

$$\begin{cases} |2x-3| + 2x-1 = \sqrt{5}+1 - \sqrt{5}+1 \\ x \geq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 1,5 \\ 4x-4=2 \\ 1 \leq x < 1,5 \\ 3-2x+2x-1=2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1,5 \\ x = 1,5 \\ 1 \leq x < 1,5 \\ 2=2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 1,5$$

Ответ:  $[1; 1,5]$ .Задача 4

$$\sin^3(\pi x) + \sin^3(2\pi x) - \sin^3(4\pi x) = (\sin(\pi x) + \sin(2\pi x) - \sin(4\pi x))^3$$

Пусть  $a = \sin(\pi x)$ ,  $b = \sin(2\pi x)$ ,  $c = \sin(4\pi x)$ , тогда

$$a^3 + b^3 - c^3 = (a+b-c)^3 \quad \Leftrightarrow$$

$$a^3 + b^3 - c^3 = (a+b)^3 - 3(a+b)^2 \cdot c + 3(a+b) \cdot c^2 - c^3$$

$$a^3 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3(a+b)^2 \cdot c + 3(a+b) \cdot c^2 - c^3 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$ab(a+b) - (a+b)^2 \cdot c + (a+b) \cdot c^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(a+b)(c^2 - (a+b) \cdot c + ab) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(a+b)(c-a)(c-b) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b = -a \\ c = a \\ c = b \end{cases}$$

ЧИСТОВНИК

Вернемся к незаданной переменной:

$$\begin{cases} \sin(2\pi x) = -\sin(\pi x) \\ \sin(4\pi x) = \sin(\pi x) \\ \sin(4\pi x) = \sin(2\pi x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2\pi x) = \sin(-\pi x) \\ 4\pi x = \pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 4\pi x = \pi - \pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 4\pi x = 2\pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 4\pi x = \pi - 2\pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\pi x = -\pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = \pi + \pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2k}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{1+2k}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ x = k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{1+2k}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2k}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 1+2k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{1+2k}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ x = k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{1+2k}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$[0,3; 1,8]: \quad 1) 0,3 \leq \frac{2k}{3} \leq 1,8 \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad 2) 0,3 \leq 1+2k \leq 1,8 \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$0,45 \leq k \leq 2,7 \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad -0,35 \leq k \leq 0,4 \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} k=1: x = \frac{2}{3} \\ k=2: x = \frac{4}{3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} k=0: x = 1 \end{cases}$$

$$3) 0,3 \leq \frac{1+2k}{5} \leq 1,8 \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad 4) 0,3 \leq k \leq 1,8 \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$0,25 \leq k \leq 4 \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad k=1: x = 1$$

$$\begin{cases} k=1: x = \frac{3}{5} \\ k=2: x = 1 \\ k=3: x = \frac{7}{5} \\ k=4: x = \frac{9}{5} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 5) 0,3 \leq \frac{1+2k}{6} \leq 1,8 \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$0,4 \leq k \leq 4,9 \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} k=1: x = \frac{1}{2} \\ k=2: x = \frac{5}{6} \\ k=3: x = \frac{7}{6} \\ k=4: x = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\text{Итого: } x \in \left\{ \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; 1; \frac{3}{5}; \frac{7}{5}; \frac{9}{5}; \frac{1}{2}; \frac{5}{6}; \frac{7}{6}; \frac{3}{2} \right\}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; 1; \frac{3}{5}; \frac{7}{5}; \frac{9}{5}; \frac{1}{2}; \frac{5}{6}; \frac{7}{6}; \frac{3}{2} \right\}.$$



ЧИСТОВИК

Задача 5

$$f_1(x) = (x+a_1)(x^2+b_1x+12) = x^3 + (a_1+b_1)x^2 + (a_1b_1+12)x + 12a_1$$

$$f_2(x) = (x+a_2)(x^2+b_2x+18) = x^3 + (a_2+b_2)x^2 + (a_2b_2+18)x + 18a_2$$

$$f_3(x) = (x+a_3)(x^2+b_3x+24) = x^3 + (a_3+b_3)x^2 + (a_3b_3+24)x + 24a_3$$

т.к. по условию  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$ , то  
 $f_2(x) - f_1(x) = f_3(x) - f_2(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , но степени  $(f_2(x) - f_1(x))$  и  $(f_3(x) - f_2(x)) \leq 2 \Rightarrow$  они не могут иметь бесконечно много корней, если не  $\equiv 0 \Rightarrow$  т.к.  $f_2(x) - f_1(x) = f_3(x) - f_2(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , то  $f_2(x) - f_1(x) \equiv 0$  и  $f_3(x) - f_2(x) \equiv 0$ . Значит,  $f_1(x) \equiv f_2(x) \equiv f_3(x)$  и коэф. при  $x^3, x^2, x$  и свободные члены у  $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$  равны. Тогда получаем:

$$\begin{cases} a_1+b_1 = a_2+b_2 = a_3+b_3 \\ a_1b_1+12 = a_2b_2+18 = a_3b_3+24 \\ 12a_1 = 18a_2 = 24a_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+b_1 = a_2+b_2 = a_3+b_3 \\ a_1b_1+12 = a_2b_2+18 \quad (1) \\ a_1b_1+12 = a_3b_3+24 \quad (2) \\ 2a_1 = 3a_2 = 4a_3 \end{cases}$$

Пусть  $a_1+b_1 = a_2+b_2 = a_3+b_3 = A$  и  $2a_1 = 3a_2 = 4a_3 = C$ , тогда  $a_1 = \frac{C}{2}, a_2 = \frac{C}{3}, a_3 = \frac{C}{4}, b_1 = A - \frac{C}{2}, b_2 = A - \frac{C}{3}, b_3 = A - \frac{C}{4}$ .

Подставим эти значения в (1) и (2):

$$\begin{cases} \frac{AC}{2} - \frac{C^2}{4} = \frac{AC}{3} - \frac{C^2}{9} + 6 \\ \frac{AC}{2} - \frac{C^2}{4} = \frac{AC}{4} - \frac{C^2}{16} + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5C^2}{36} - \frac{AC}{6} + 6 = 0 \\ \frac{3C^2}{16} - \frac{AC}{4} + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{5C^2}{36} - AC + 36 = 0 \\ \frac{3C^2}{4} - AC + 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{5C}{6} + \frac{36}{C} \\ \frac{C^2}{12} - 12 = 0 \end{cases} \begin{matrix} C > 0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} A = 13 \\ C = 12 \end{cases}$$

По условию  $a_1 = \frac{C}{2} > 0 \Rightarrow C > 0$ .

Тогда  $a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3 = 3A = 3 \cdot 13 = 39$ .

Ответ: 39.



ЧИСТОВНИКЗадача 2

Покажем, что если  $a < 4^5 + 1 = 1025$ , то найдется  $x_0 > 0$ , который удовлетворяет неравенству.

Пусть  $a = 4^5 + 1 - t$ , ~~где~~  $0 < t < 4^5 + 1$ , тогда  $0 < a < 4^5 + 1$

~~где  $t = 4^5 + 1 - a$~~

~~Пусть  $y = \log_4(4^5 + 1 - t)$~~

$$\sin 2^x = -1 \quad \Leftrightarrow$$

$$2^x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = \log_2 \left( \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0$$

$$4^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 2^x = 4^5 + 1 - t - 1 = 4^5 - t$$

~~Пусть~~ 1) Если  $4^5 - t \leq 0$ , то  $4^{5-\frac{1}{x}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$  удовлетв. неравенству  $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ .

2) Если  $4^5 - t > 0$ , то т.к.  $t > 0$ , то  $4^5 - t < 4^5 \Rightarrow \log_4(4^5 - t) < 5$ .

$$4^{5-\frac{1}{x}} \geq 4^5 - t \quad 4 > 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$5 - \frac{1}{x} \geq \log_4(4^5 - t) \quad x > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x \geq \frac{1}{5 - \log_4(4^5 - t)}$$

$$\log_2 \left( \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right) \geq \frac{1}{5 - \log_4(4^5 - t)} \quad 2 > 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$2\pi k \geq -\frac{3\pi}{2} + 2^{\frac{1}{5 - \log_4(4^5 - t)}}$$

$$k \geq \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{3\pi}{2} + 2^{\frac{1}{5 - \log_4(4^5 - t)}} \right) \quad (*)$$

т.к.  $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$ , то мы сможем взять большее  $k_0$ , удовн. неравенству (\*),  $k_0 \geq 0, k_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  получим  $x_0 = \log_2 \left( \frac{3\pi}{2} + 2\pi k_0 \right)$ , которое будет удовлетворять неравенству  $4^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 2^x$ .

Значит,  $a < 1025$  не подходит.

Покажем, что  $a = 1025 = 4^5 + 1$  подходит,  
то есть  $\forall x > 0 \quad 4^{5-\frac{1}{x}} < a + \sin 2^x$

ЧИСТОВИК

$$\forall x > 0 \quad \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow 5 - \frac{1}{x} < 5$$

$$\forall x > 0 \quad \sin 2^x \geq -1$$

Тогда  $4^{5-\frac{1}{x}} < 4^5$  и  $a + \sin 2^x \geq 4^5 + 1 - 1 = 4^5$

$$4^{5-\frac{1}{x}} < 4^5 \leq a + \sin 2^x$$

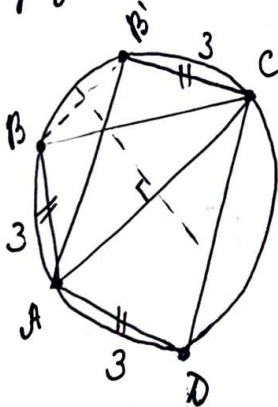
Значит, неравенство  $4^{5-\frac{1}{x}} > a + \sin 2^x$  не имеет решений  $x > 0$   
при  $a = 1025$ .

Ответ:  $a = 1025$ .

### Задача 3

$AB = AD = 3$   
(не унаши общности, ~~AB=AD=3~~)

Если у четырехуг.  $ABCD$  2 соседние стороны равны 3 и 3,  
то перейдем к четырехуг.  $AB'C'D$ : отложим сер. пер. к  $AC$   
отразим т.  $B$  и получим т.  $B'$ , тогда  $\triangle ABC = \triangle CB'A$  и  
 $AB' = BC$ ,  $B'C = AB = 3$ ,  $\angle ABC = \angle AB'C$ ,



$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle CB'A}$$

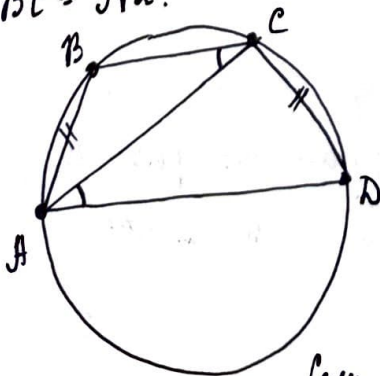
$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = S_{\triangle CB'A} + S_{\triangle ACD} = S_{AB'C'D}$$

$ABCD$  был вписан в окр-ть  $\Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} \angle ABC + \angle ADC &= 180^\circ \\ \angle ABC &= \angle AB'C \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle AB'C + \angle ADC = 180^\circ \text{ и}$$

$AB'C'D$  также  
вписан в ту же  
окр-ть, что и  $ABCD$

Значит, достаточно найти макс.  $S_{ABCD}$ , если у  $ABCD$  две  
противоположные стороны равны 3, пусть  $AB = CD = 3$ ,  
 $BC = 3\sqrt{2}$ .



$\angle BCA = \angle CAD$  как впис., опр. на равные  
корды  $\Rightarrow BC \parallel AD$  и  $ABCD$  -  $\rho$ -б трапеция  
По т. синусов для  $\triangle ABC$ :

$$\frac{3}{2 \sin \angle BCA} = 3 \Rightarrow \sin \angle BCA = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \angle BCA = 30^\circ \\ \angle BCA = 150^\circ \end{cases}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2 \sin \angle BAC} = 3 \Rightarrow \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \angle BAC = 45^\circ \\ \angle BAC = 135^\circ \end{cases}$$

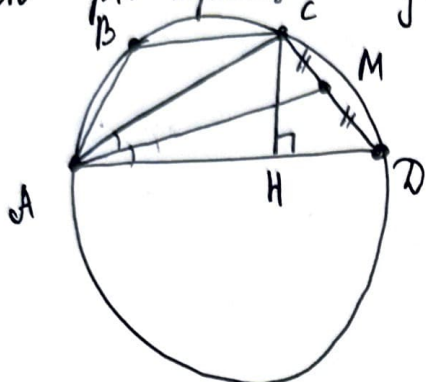
Если  $\angle BCA = 150^\circ$ , то  $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD \geq 150^\circ + 45^\circ > 180^\circ$ ,  
что невозможно  $\Rightarrow \angle BCA = 30^\circ$



# ЧИСТОВИК

Если  $\angle BAC = 135^\circ$ , то  $\angle BAD = 165^\circ \Rightarrow \angle ABC = \angle BCD = 15^\circ$

но  $\angle BCA = 30^\circ \neq \angle BCD = 15^\circ$ , противоречие  $\Rightarrow \angle BAC = 45^\circ$  и  $\angle ABC = 105^\circ$  — р/б трапеции с углами  $75^\circ$  и  $105^\circ$ .



$$\angle ACD = \angle BCD - \angle BCA = 105^\circ - 30^\circ = 75^\circ \Rightarrow$$

$\triangle ACD$  — р/б

Пусть  $CH$  — высота трапеции,  
 $AM$  — биссектриса, медиана и  
 высота р/б  $\triangle ACD$ .

$$\begin{aligned} \angle MAD = 15^\circ \Rightarrow \\ MD = \frac{CD}{2} = \frac{3}{2} \quad AD = \frac{MD}{\sin 15^\circ} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = 3\sqrt{2+\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos 30^\circ &= 1 - 2\sin^2 15^\circ \\ \sin 15^\circ &> 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$AD = AC = 3\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\text{В прямоуго. } \triangle ACH \quad \angle CAD = 30^\circ \Rightarrow CH = \frac{AC}{2} = \frac{3\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

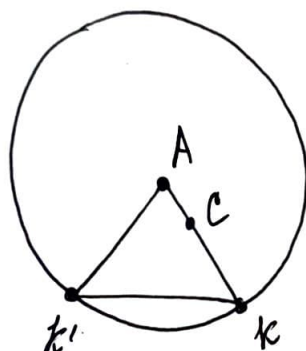
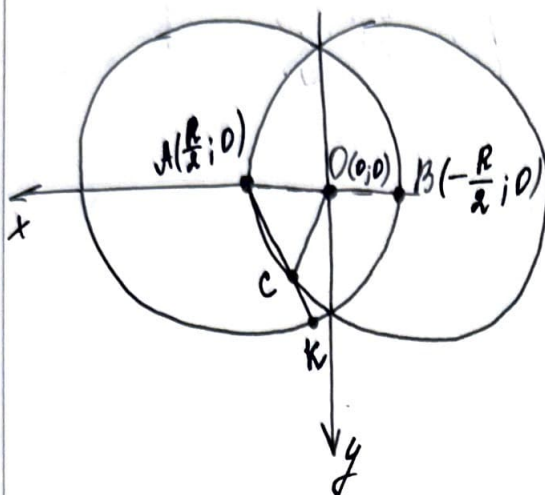
$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{BC+AD}{2} \cdot CH = \frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{9}{4} (2+\sqrt{3}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}) = \\ &= \frac{9}{4} (2+\sqrt{3}+\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}) = \frac{9}{4} (3+2\sqrt{3}) \quad (\text{кв. ед.}) \end{aligned}$$

Ответ: макс. возможная площадь равна  $\frac{9(3+2\sqrt{3})}{4}$  (кв. ед.).

## Задача 6

Пусть  $D$  — точка линии,  $A$  и  $B$  — центры кругов, где стоят поковки,  $C(x_0; y_0)$  — точка на границе круга с центром  $B$ , лежащая на пути линии. Чтобы линию намокнуть меньше всего, она должна пробегать от границы круга с центром в т.  $A$  до т.  $C$  по прямой, затем пробегать от  $C$  до  $D$  по прямой.

ЧИСТОРИЗИК



Обозначим  $R = \frac{3}{2+\sqrt{2}}$ .

Предположим, что до перес. с границей круга в т. К. Покажем, что СК - мин. расстояние от С до точки на границе круга.

Пусть на границе круга есть т. К': СК' < СК.

Если К' ∈ АК, то т.к. С лежит на отрезке АК, то СК' ≥ R ≥ СК, противоречие.

Иначе ∠АКК' - тупой ⇒ ∠АК'К = ∠АКК' - ∠СК'К = ∠АК'К - ∠АК'С ≤ ∠АК'К = ∠АКК'

∠СК'К ≤ ∠АКК' ⇒ в ∆СК'К СК ≤ СК', противоречие.

Значит, СК - мин. расстояние от С до границы круга.

Не умаляя общности, можем считать, что  $x_0, y_0 \geq 0$

Чтобы найти наперед наименьшее всего, нужно найти минимум ф-ии

$$f = 2\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + R - \sqrt{\left(x_0 - \frac{R}{2}\right)^2 + y_0^2} \quad \text{при} \quad \left(x_0 + \frac{R}{2}\right)^2 + y_0^2 = R^2$$

$$y_0^2 = \frac{3R^2}{4} - x_0^2 - x_0 R$$

$$f = 2\sqrt{\frac{3R^2}{4} - x_0 R} + R - \sqrt{R^2 - 2x_0 R}$$

$$f' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{3R^2}{4} - x_0 R}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2x_0 R}}$$

$$\frac{3R^2}{4} - x_0 R = R^2 - 2x_0 R \quad (\Rightarrow)$$

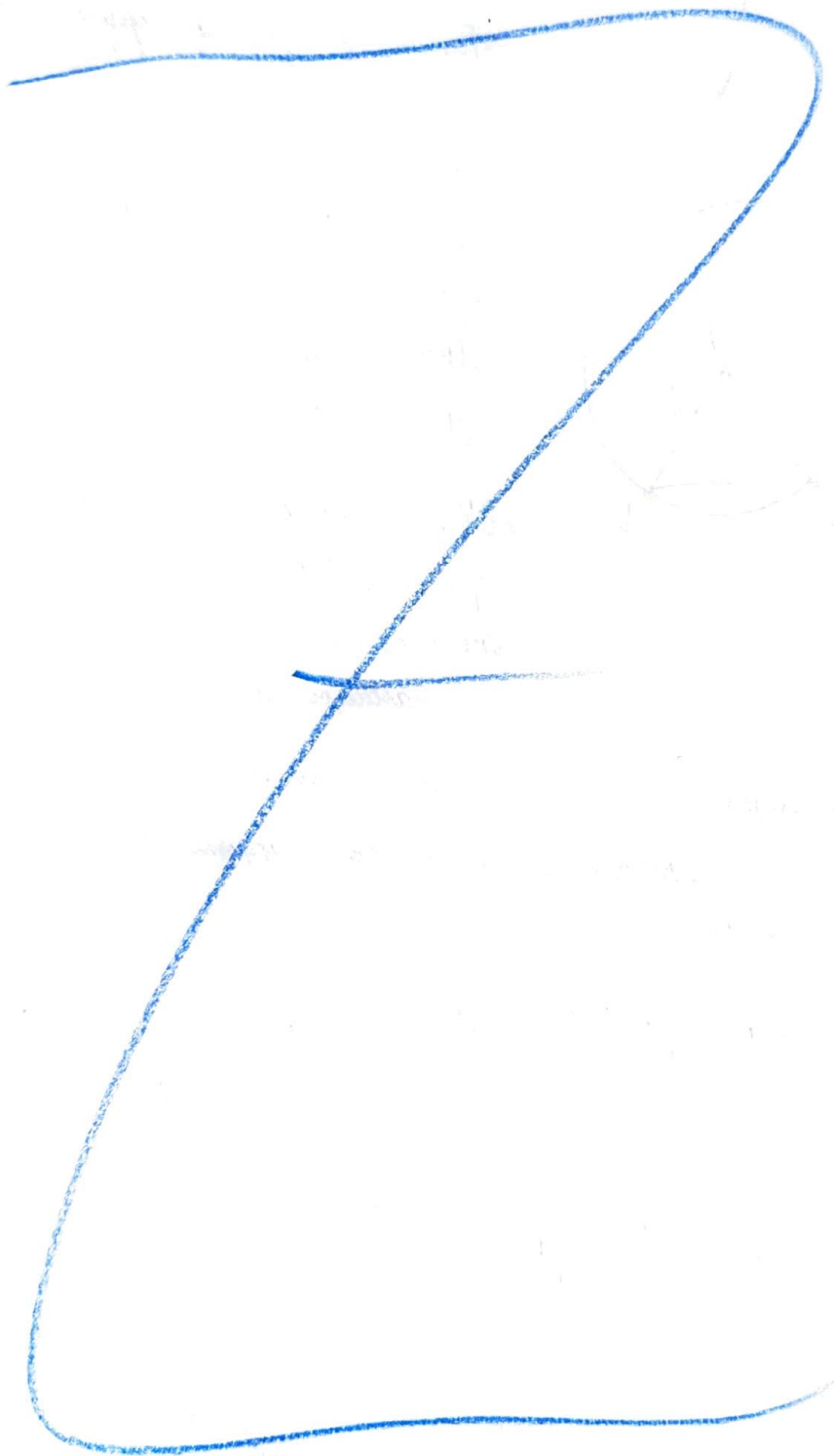
$$x_0 = \frac{R}{4} \quad (\Rightarrow)$$



ЧИСТОВИК

Тогда путь равен  $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + R - \sqrt{(x_0 - \frac{R}{2})^2 + y_0^2} = R = \frac{3}{2 + \sqrt{2}}$

Ответ:  $\frac{3}{2 + \sqrt{2}}$ .



ЧЕРНОВИК

$$\frac{3C^{2/3}}{4} - \frac{5C^{2/3}}{6} + 12 = 0$$

$$12 = \frac{C^{2/3}}{12}$$

$$C = 12$$

$$AC = \frac{5C^2}{6} + 36$$

$$A = \frac{5C}{6} + \frac{36}{C} = \frac{5 \cdot 12}{6} + \frac{36}{12} = 10 + 3 = 13$$

$$3(a_1 + b_1) = 3A = 39$$

$v = \text{const}$

$$\frac{S_1}{v} + \frac{2S_2}{v}$$

$$0 \leq x_0 \leq \frac{R}{2}$$

$$0 \leq y_0 \leq R$$

$$\begin{cases} (x_0 + \frac{R}{2})^2 + y_0^2 = R^2 & x_0^2 + x_0 R + \frac{R^2}{4} + y_0^2 = R^2 \\ (x - \frac{R}{2})^2 + y^2 = R^2 & x^2 - xR + \frac{R^2}{4} + y^2 = R^2 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + 2\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \rightarrow \min$$

$$2\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + R - \sqrt{(x_0 - \frac{R}{2})^2 + y_0^2} \rightarrow \min$$

$$x_0^2 - x_0 R + \frac{R^2}{4} + y_0^2$$

$$y_0^2 = \frac{3R^2}{4} - x_0 R - x_0^2$$

$$x_0 = \frac{R}{4} \text{ min}$$

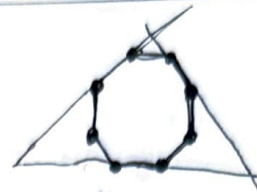
$$2\sqrt{\frac{3R^2}{4} - x_0 R} + R - \sqrt{R^2 - 2x_0 R} \rightarrow \min$$

$$\text{Пусть: } \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + R - \sqrt{(x_0 - \frac{R}{2})^2 + y_0^2} - \sqrt{\frac{3R^2}{4} - x_0 R} - \frac{-R}{2\sqrt{R^2 - 2x_0 R}} = 0$$

$$y_0^2 = \frac{3R^2}{4} - \frac{R^2}{4} - \frac{R^2}{16} =$$

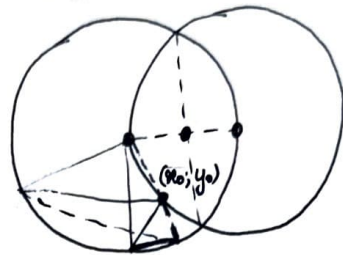
$$= \frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{16} = \frac{7R^2}{16}$$

$$\sqrt{\frac{R^2}{2} + \frac{7R^2}{16}} + R - \sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{7R^2}{16}} = R$$



$$\frac{64}{16} = 4$$

$$\frac{384}{64} = 6$$



~~43/16~~

$$\sqrt{\frac{3R}{4} - x_0} \leq \sqrt{R - 2x_0}$$

$$\frac{3R}{4} - x_0 \leq R - 2x_0$$

$$x_0 \leq \frac{R}{4}$$



ЧЕРНОВИК

$$a^3 + b^3 - c^3 = (a+b-c)^3 \quad \begin{aligned} a &= \sin(\pi x) \\ b &= \sin(2\pi x) \\ c &= \sin(4\pi x) \end{aligned}$$

$$(a+b)^3 - 3(a+b)^2 \cdot c + 3(a+b)c^2 - c^3$$

$$a^3 + b^3 - c^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 - c^3$$

$$a^2b + ab^2 - (a^2 + 2ab + b^2) \cdot c + ac^2 + bc^2$$

$$ab(a+b) - (a+b)^2 \cdot c + c^2(a+b) = 0$$

$$\begin{cases} a = -b \\ ab - (a+b)c + c^2 = 0 \\ (c-a)(c-b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a &= -b \\ c &= a \\ c &= b \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi x) = \sin(-2\pi x) \rightarrow \begin{cases} \pi x = -2\pi x + 2\pi n \\ \pi x = \pi + 2\pi x + 2\pi n \\ 3\pi x = 2\pi n \\ x = \frac{2n}{3} \end{cases} \\ \sin(4\pi x) = \sin(\pi x) \\ \sin(4\pi x) = \sin(2\pi x) \end{cases}$$

$$4\pi x = \pi x + 2\pi n$$

$$x = \frac{2n}{3}$$

$$4\pi x = \pi - \pi x + 2\pi n$$

$$x = \frac{1+2n}{5}$$

$$4\pi x = 2\pi n + 2\pi x \quad x = n$$

$$4\pi x = \pi - 2\pi x + 2\pi n \quad x = \frac{1+2n}{6}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2n}{3} \\ x = \frac{1+2n}{5} \\ x = \frac{1+2n}{6} \\ x = -1-2n \\ x = n \end{cases}$$

$$0,9 \leq 2n \leq 5,4 \quad [0,3; 1,8]$$

$$0,45 \leq n \leq$$

$$f_1(x) = x^3 + (a_1 + b_1)x^2 + (a_1b_1 + 12)x + 12a_1$$

$$f_2(x) = x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_2b_2 + 18)x + 18a_2$$

$$f_3(x) = x^3 + (a_3 + b_3)x^2 + (a_3b_3 + 24)x + 24a_3$$

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 = A \quad a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 = 3(a_1 + b_1)$$

$$a_1b_1 + 12 = a_2b_2 + 18 = a_3b_3 + 24 = B$$

$$12a_1 = 18a_2 = 24a_3$$

$$2a_1 = 3a_2 = 4a_3 = C$$

$$a_1 = \frac{C}{2}$$

$$a_2 = \frac{C}{3}$$

$$a_3 = \frac{C}{4}$$

$$b_1 = A - \frac{C}{2}$$

$$b_2 = A - \frac{C}{3}$$

$$b_3 = A - \frac{C}{4}$$

$$\frac{AC}{2} - \frac{C^2}{4} + 12 = \frac{AC}{3} - \frac{C^2}{9} + 18$$

$$\frac{5C^2}{36} - \frac{AC}{6} + 6 = 0$$

$$\frac{AC}{2} - \frac{C^2}{4} + 12 = \frac{AC}{4} - \frac{C^2}{16} + 24$$

$$\frac{3C^2}{16} - \frac{AC}{4} + 12 = 0$$

$$\frac{3C^2}{4} - AC + 48 = 0$$

$$\frac{5C^2}{6} - AC + 36 = 0$$

# ЧЕРНОВИК

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} + \sqrt{9x^2 - 12x + 4} - (\sqrt{x-1})^2 = \sqrt{6+\sqrt{20}} - \sqrt{6-\sqrt{20}}$$

$$\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{(3x-2)^2} - x+1 = \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}$$

$$x \geq 1$$

$$(1+\sqrt{5})^2 \quad (\sqrt{5}-1)^2$$

$$|2x-3| + 3x-2-x+1 = 2\sqrt{5}$$

$$|2x-3| + 2x-1 = 2\sqrt{5}$$

$$x \geq 1,5: 4x-4 = 2\sqrt{5}$$

$$x = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x < 1,5: 2 = 2\sqrt{5}$$

∅

$$4^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 2^x$$

при  $x > 0$   
 $a > 0$

$$\forall x > 0: 4^{5-\frac{1}{x}} < a + \sin 2^x$$

$$4^{5-\frac{1}{x}} < 4^5$$

$$a = 4^5?$$

$$a < 4^5: a = 4^5 - t$$

$$|\sin 2^x| \leq 1 \quad \underline{a = 4^5 + 1}$$

$$a + \sin 2^x \leq 4^5 - t + 1$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$a = 4^5 - t$$

$$a = 4^5 + 1 - t$$

$$4^{5-\frac{1}{x}} < a + \sin 2^x$$

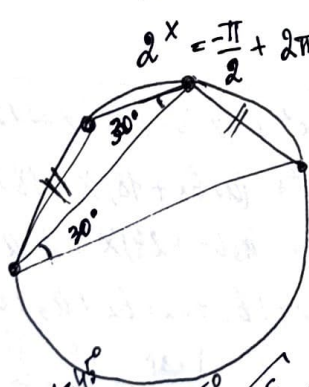
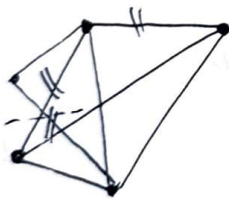
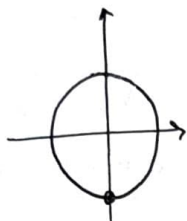
$$4^5 - t < 4^4 \quad y < 5$$

$$4^{5-\frac{1}{x}} > 4^4$$

$$5 - \frac{1}{x} > 4$$

$$\frac{1}{x} < 5 - 4$$

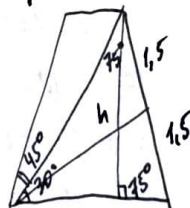
$$x > \frac{1}{5-4}$$



8x3

$$2^x = \frac{-\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

по трапеции

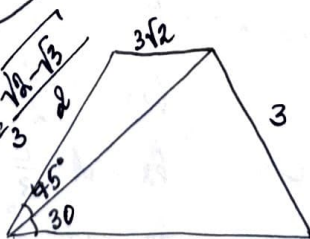


$$\frac{2\sqrt{2}}{\sin \alpha} = 6$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \frac{1-2\sin^2 15^\circ}{2}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$$



$$1,5 = x \cdot \sin 15^\circ$$

$$x = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{2}+\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{4}$$



[illegible]