0 529544 650002

52-95-44-65
(107.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9 - 10

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по механике и математическому моделированию
профиль олимпиады

Мухина Ивана Павловича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

выход 13:28
возврат 13:32

Дата
«30» марта 2025 года

Подпись участника
Мухин

90(Девяносто)

№ 3

Учитывая, что скачивание идёт со скоростью $v = const$ (постоянной), её можно найти как:

$v = \dfrac{N_2 - N_1}{T_2 - T_1}$, где N_2 – объём данных в момент времени 2, N_1 – объём данных в момент времени 1,

$T_2 = T_0 - 12$, $T_1 = T_0 - 30$,

T_0 – общее время скачивания

$v = \dfrac{96 - 84}{T_0 - 12 - T_0 + 30} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}\ \dfrac{МБ}{сек}$

За 12 сек скачается $12 \cdot \dfrac{2}{3} = 8$ МБ

Общий объём $= 96 + 8 = 104$ МБ

Общее время $T_0 = \dfrac{104}{2/3} = 156$ сек $= 2$ мин 36 сек

Время на часах в конце:

12:00:00 + 00:00:30 = 12:00:30

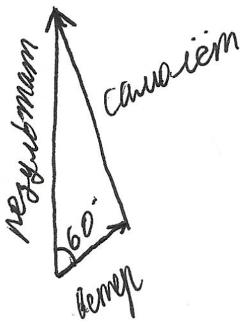
Время на часах в начале:

12:00:30 − 00:02:36 = 11:57:54

Ответ: 11:57:54

№ 2

Чтобы лететь параллельно меридиану, самолёт должен лететь под некоторым углом к горизонту (иначе он не будет компенсировать горизонтальную составляющую скорости ветра).



Результирующая скорость должна быть $\frac{1000 \text{ км}}{2 \text{ часа}} = 500 \frac{\text{км}}{\text{час}}$

Скорость ветра: $v_в = 8\frac{1}{3} \frac{\text{м}}{\text{сек}}$

$$v_в = \left(8\frac{1}{3} \cdot 3{,}6\right) \frac{\text{км}}{\text{час}} = \frac{25}{3} \cdot \frac{36}{10} = 30 \frac{\text{км}}{\text{час}}$$

(перевод из $\frac{\text{м}}{\text{сек}}$ в $\frac{\text{км}}{\text{час}}$)

По теореме косинусов находим скорость самолёта:

$$v_{сам}^2 = v_в^2 + v_р^2 - 2 \cdot v_в \cdot v_р \cdot \cos 60° =$$

$$= 30^2 + 500^2 - 2 \cdot 30 \cdot 500 \cdot \frac{1}{2} = 900 + 250000 - 15000 =$$

$$= 235900$$

$$v_{сам} = \sqrt{235900} \frac{\text{км}}{\text{час}} = 10\sqrt{2359} \frac{\text{км}}{\text{час}}$$

По грубым оценкам приближённое значение $v_{сам}$ находится в границах:

$$480 \frac{\text{км}}{\text{час}} < v_{сам} < 490 \frac{\text{км}}{\text{час}}$$

Проверим значение $485 \frac{\text{км}}{\text{час}}$

$$\begin{array}{r} 485 \\ \times\ 485 \\ \hline 2425 \\ +\ 38800 \\ +\ 194000 \\ \hline 235225 \end{array}$$

При значении $486 \frac{\text{км}}{\text{час}}$

$486^2 = 236195$ (это ближе)

Ответ: $v_{сам} = 10\sqrt{2359} \frac{\text{км}}{\text{час}} \approx 486 \frac{\text{км}}{\text{час}}$

№4

Дано:

$l_1 = 2$ м

$h = 80$ см

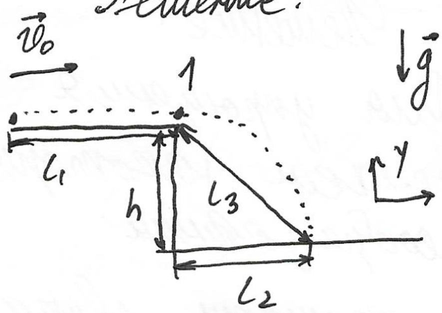
$v_0 = 5\ \frac{м}{с}$

$\mu = 0.4$

$g = 10\ \frac{м}{с^2}$

$l_3 = ?$

Решение:



$l_3 = \sqrt{l_2^2 + h^2}$ (теор. Пифагора)

$l_2 = v_1 \cdot t_1$ v_1 – скорость бруска в точке 1

t_1 – время свободного падения тела

Найдем v_1:

$l_1 = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2a}$ $v_0^2 - v_1^2 = 2al$

$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2al}$ $a = \frac{F}{m}$ (II з. Ньютона)

$F = F_{тр} = \mu N = \mu mg$ $a = \frac{\mu mg}{m} = \mu g$

$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2al} = \sqrt{v_0^2 - 2\mu gl} =$

$\boxed{\cancel{= \sqrt{25 - 2 \cdot 0.4 \cdot 10 \cdot 0.8} = \sqrt{25 - 6.4} = \sqrt{18.6}\ \frac{м}{с}}}$

$v_1 = \sqrt{25 - 2 \cdot 0.4 \cdot 10 \cdot 2} = \sqrt{25 - 16} = 3\ \frac{м}{с}$

Найдем t_1:

Для оси y: $0 = h - \frac{g t_1^2}{2}$

$t_1 = \boxed{\cancel{\sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0.8} =}} =$

$= \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.8}{10}} = 0.4$ сек

$l_2 = v_1 t_1 = \sqrt{(v_0^2 - 2\mu gl)\frac{2h}{g}} = 3 \cdot 0.4 = 1,2$ м

$l_3 = \sqrt{1,2^2 + 0,8^2} = \sqrt{1,44 + 0,64} = \sqrt{2,08}$ м

В общем виде: $l_3 = \sqrt{\frac{2v_0^2 h}{g} - 4\mu l g + h^2}$

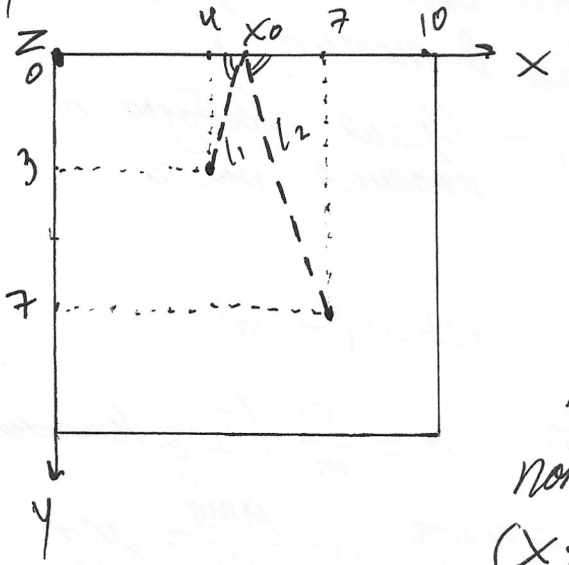
Ответ: $l_3 = \boxed{\cancel{2{,}08}}\ \sqrt{2,08}$ м

№5

Дано:
$x_1 = 4$ $x_2 = 7$
$y_1 = 3$ $y_2 = 7$
$z_1 = 3$ $z_2 = 0$

Решение:
Для упрощения задачи сделаем некоторые преобразования:

1) Посмотрим на комнату сверху



Так как улитке, чтобы спуститься, надо доползти до стены, то она быстрее преодолеет путь, спускаясь по стене, граничащей с осью ox потому что

$\begin{cases} x_2 - x_1 < y_2 - y_1 \\ x_1 > y_1 \end{cases}$

(проекция пути на ox меньше)

находится дальше от oy, чем от ox

Теперь задача сводится к выбору такой точки x_0 на оси ox, при ~~которой~~ путь будет минимален.
Выведем зависимость длины пути от выбора точки x_0, учитывая, что путь по стене всегда один и тот же, и не включая его в уравнение:

$l_1 = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + y_1^2}$ $l_2 = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + y_2^2}$

$l = l_1 + l_2 = \sqrt{(x_0 - 4)^2 + 9} + \sqrt{(7 - x_0)^2 + 49}$

Теперь можно свести задачу к нахождению минимума функции $l(x_0)$, 52-95-44-65 (107.1)

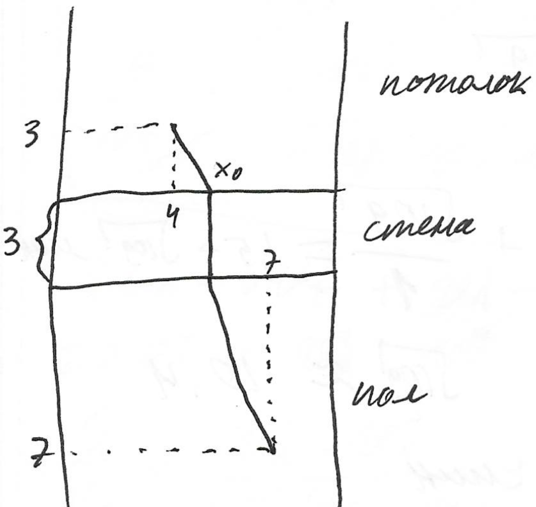
упростив нахождение минимума:
Переменными являются $(x_0-4)^2$ и $(7-x_0)^2$, поэтому:

$$l_3(x_0) = (x_0-4)^2 + (7-x_0)^2 = x_0^2 - 8x_0 + 16 + 49 - 14x_0 + x_0^2 =$$
$$= 2x_0^2 - 22x_0 + 65$$

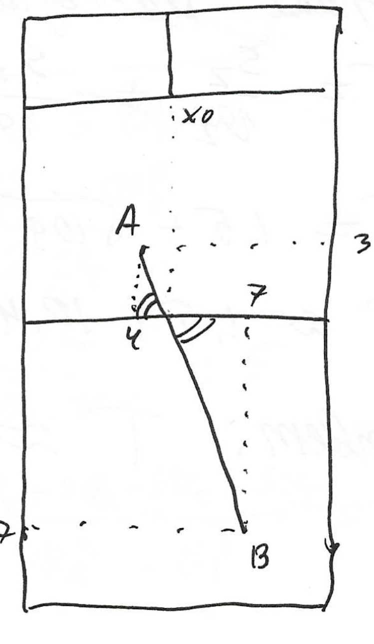
Находим производную и приравниваем её к нулю:

$$\frac{d\, l_3(x_0)}{d\, x_0} = 4x_0 - 22 = 0 \rightarrow x_0 = 5,5$$

Попробуем найти x_0 другим способом (через подобие)
Это будет правильнее, так как
"развернув" (сделав развёртку) комнату, мы получим:



Переставив стену наверх:



Кратчайшее расстояние между точками прямая, поэтому отмеченные углы равны

Из подобия треугольников (по прямому и равному углам):

$$\frac{x_0-x_1}{y_1}=\frac{x_2-x_0}{y_2}$$

$$\frac{x_0-4}{3}=\frac{7-x_0}{7} \qquad 7x_0-28=21-3x_0$$

$$10x_0=49 \to \boxed{x_0=4.9}$$

Кстати, для решения задачи необязательно было его находить, но можно для полноты картины.

Полный путь находим как

$$S=l_1+l_2+h$$

$$S=h+\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2+y_1)^2}$$ (видно из развёртки комнаты)

$$S=3+\sqrt{(7-4)^2+(7+3)^2}=$$

$$=3+\sqrt{9+100}=3+\sqrt{109}$$

Время находим как:

$$T=\frac{S_z}{\vartheta_z}+\frac{S_{xy}}{\vartheta_{xy}}=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{109}}{1}=1{,}5+\sqrt{109}\text{ мин}$$

$$T=1{,}5+\sqrt{109}\text{ мин} \qquad \sqrt{109}\approx 10{,}4$$

$$T\approx 1{,}5+10{,}4\approx 11{,}9\text{ мин}$$

Ответ: $T\approx 11{,}9$ мин.

№ 1

~~Дано:~~

S – расстояние между В и Н.

v_T – скорость течения реки и плота

$v_Л$ – скорость лодки

1) $\frac{S}{v_T} = \frac{S}{v_T + v_Л} + 6$ $\quad \frac{S}{v_T} = ?$

2) $\frac{S}{v_T + v_Л} + 1 = \frac{S}{v_Л - v_T}$

$$\cancel{\frac{Sv_T - Sv_Л}{v_T^2 - v_Л^2} + \frac{v_T^2 - v_Л^2}{v_T^2 - v_Л^2} = \frac{Sv_T + Sv_Л}{v_T^2 - v_Л^2}}$$

$$\cancel{v_T^2 - v_Л^2 = 2Sv_Л^2 \qquad S = \frac{v_T^2 - v_Л^2}{2v_Л^2}}$$

$$\cancel{\frac{S}{v_T} = \frac{v_T^2 - v_Л^2}{2v_Л^2(v_T + v_Л)} + 6}$$

$$\cancel{\frac{S}{v_T} = \frac{v_T^2 - v_Л^2}{2v_Л^2 \; v_T - v_Л}}$$

$$Sv_Л - Sv_T + v_Л^2 - v_T^2 = Sv_T + Sv_Л$$

$$2Sv_T = v_Л^2 - v_T^2 \qquad S = \frac{v_Л^2 - v_T^2}{2v_T}$$

$$\frac{S}{v_T} = \frac{v_Л^2 - v_T^2}{2v_T(v_T + v_Л)} + 6 = \frac{v_Л^2 - v_T^2}{2v_T(v_Л - v_T)} + 5$$

Из 2) $\quad 1 = \frac{S}{v_Л - v_T} - \frac{S}{v_T + v_Л} = \frac{Sv_T + Sv_Л - Sv_Л + Sv_T}{v_Л^2 - v_T^2} =$

$$= \frac{2Sv_T}{v_Л^2 - v_T^2}$$

Продолжение задачи 1 после задачи 6

№6

Дано:

$M_в = 2m_ж$

$C_B = 4.5 C_ж$

$T_1 = 1{,}05\, Te$

$T_2 = k\,Te$

$k = ?$

Решение:

$Q_1 + Q_2 = Q$ (закон сохр. тепл. энерг.)

Q_1 – кол-во теплоты воды в момент t_1

Q_2 – кол-во теплоты железа в момент t_1

Q – кол-во теплоты в термодинам. равновесии

$$C_B m_B \cdot T_1 + C_ж m_ж \cdot T_2 = (C_B m_B + C_ж m_ж) Te$$

$$4{,}5 C_ж \cdot 2m_ж \cdot 1.05\, Te + C_ж m_ж \cdot k\, Te =$$

$$= (2 \cdot 4{,}5 C_ж m_ж + C_ж m_ж)\, Te$$

Сокращаем $C_ж$, $m_ж$ и Te

$$4{,}5 \cdot 2 \cdot 1.05 + k = 2 \cdot 4{,}5 + 1$$

$$9 \cdot 1.05 + k = 10 \rightarrow k = 10 - 9 \cdot 1{,}05$$

$$k = 10 - 9{,}45 = 0{,}55$$

$$T_2 = 0{,}55\, Te$$

T_2 меньше Te на 45%

Ответ: на 45%

№1 (Продолжение)

$$6 = \frac{12 S v_T}{v_л^2 - v_T^2} \rightarrow \frac{S}{v_T} = \frac{S}{v_л + v_T} + \frac{12 S v_T}{v_л^2 - v_T^2} =$$

$$= \frac{S v_л - S v_T + 12 S v_T}{v_л^2 - v_T^2} = \frac{S v_л + 11 S v_T}{v_л^2 - v_T^2}$$

$$v_T = \frac{v_л^2 - v_T^2}{v_л + 11 v_T} \qquad v_л v_T + 11 v_T^2 = v_л^2 - v_T^2$$

$12 v_т^2 + v_л v_т - v_л^2 = 0$ (связь $v_л$ и $v_т$)

Примем известным $v_л$, тогда:

$D = v_л^2 + 48 v_л^2 = 49 v_л^2$

$v_т = \dfrac{-v_л \pm 7 v_л}{24} = \dfrac{v_л}{4}$ или $-\dfrac{v_л}{3}$

Физ. смысл имеет только $\dfrac{v_л}{4}$

Тогда $S = \dfrac{v_л^2 - v_т^2}{2 v_т} = \dfrac{16 v_т^2 - v_т^2}{2 v_т} = 7{,}5 v_т$

Искомый результат:

$\dfrac{S}{v_т} = \dfrac{7{,}5 v_т}{v_т} = 7{,}5$ часов

Ответ: 7,5 часов