0 057940 790003

05-79-40-79
(106.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс 251

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по механике и математическому моделированию
профиль олимпиады

Шурыгина Егора Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«30» марта 2025 года

Подпись участника

100 (сто)

Чистовик

№1

u – скорость теч-я   l – расстояние м/у В и Н

v – скорость лодки

$\frac{l}{v+u}+6=\frac{l}{u}$ (1) $\frac{l}{v+u}+1=\frac{l}{v-u}$ (2) $\frac{l}{u}$ – ?

$lu+6vu+6u^2=lv+\cancel{lu}$ $lv-lu+v^2-u^2=lv+lu$

$6vu+6u^2=lv$ $v^2-u^2=2lu$

$v=\frac{6u^2}{l-6u} \longrightarrow \frac{36u^4}{l^2-12lu+36u^2}=u^2+2lu$

$\cancel{36u^4}=u^2l^2-12lu^3+\cancel{36u^4}+2l^3u-24l^2u^2+72lu^3$

$60lu^3-23u^2l^2+2l^3u=0.$

Т.к. $l\neq0$ и $u\neq0$: $60lu^3-23u^2l^2+2l^3u=0 \mid :lu$

$\cancel{30u^2-12ul+l^2=0}$ $60u^2-23ul+2l^2=0$

$\cancel{u=\frac{12l\pm\sqrt{144l^2-120l^2}}{60}}$ $l=\frac{23\pm\sqrt{23^2-480}}{4}u=$

$\times$23
23
69
46
529

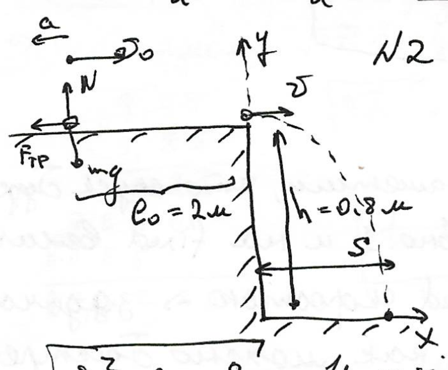
$=\frac{23\pm\sqrt{49}}{4}u=\frac{23\pm7}{4}u=\{4u;\ 7,5u\}$

$v(l=4u)=\frac{6u^2}{4u-6u}=-3u<0$ – не подходит

$v(l=7,5u)=\frac{6u^2}{7,5u-6u}=\frac{6}{1,5}u=4u>u$ – подходит (т.к. лодка по усл. плывёт противтеч-я)

$t_{min}=\frac{l}{u}=\frac{7,5u}{u}=\boxed{7,5\ (ч)}$

№2



$N=mg \Rightarrow F_{тр.ск}=\mu N=\mu mg \Rightarrow$

$\Rightarrow a=\frac{\mu mg}{m}=\mu g=const.$

II-й з-н Ньютона.

$l_0=\frac{v_0^2-v^2}{2a} \Rightarrow v^2=v_0^2-2\mu g l_0$

$v=\sqrt{v_0^2-2\mu g l_0}$. Найдём время падения. Т.к. $v_y=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow h=\frac{gt^2}{2} \Rightarrow t=\sqrt{2\frac{h}{g}}$, т.к. по Ox в процессе падения силы не действуют $\Rightarrow$ $s=vt=\sqrt{2v_0^2\frac{h}{g}-4\mu h l_0}=\sqrt{2\cdot25\cdot\frac{0,8}{10}-4\cdot0,4\cdot0,8\cdot2}=$

$a=0 \Rightarrow v=const$

$=\sqrt{4-8\cdot0,32}=2\sqrt{1-0,64}=2\cdot0,6=\boxed{1,2\ (м)}$

Чистовик

№3.

x – общий размер ролика υ – скорость загрузки

$$\frac{(1-0{,}35)x}{\upsilon} = 35 \quad (1)$$

$$13\upsilon = x - 35 \quad (2)$$

$$(1)\cdot(2):\ 13\cdot 0{,}65x = 35x - 35^2$$

$13 \times 0{,}65$: 65, 78, 8,45

$$8{,}45x = 35x - 35^2$$

35×35: 175, 105, 1225

$$1225 = 26{,}55x$$

$$x = \frac{122500}{2655} = \frac{24500}{531} = 46\frac{74}{531} \approx 46{,}139 \text{ Мб}$$

$$24500 = 5\cdot10\cdot10\cdot7^2 = 2^2\cdot5^3\cdot7^2$$

$531 \not\vdots\, 2 \quad \not\vdots\, 5 \quad \not\vdots\, 7$

24500 : 531 = 46,1393
−2124; 3260; −3186; 740; −531; 2090; −1593; 4970; −4779; 1910

до 12:00:00 было загружено 35 Мб, при этом ск-ть загрузки $\upsilon = \frac{x-35}{13} \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = \frac{35}{\upsilon} = \frac{35\cdot13}{x-35} =$$

$$= \frac{13}{\frac{x}{35}-1} = \frac{13\cdot531}{169} = \frac{531}{13} \in (40;41)\text{ с} \Rightarrow \text{в начале загрузки}$$

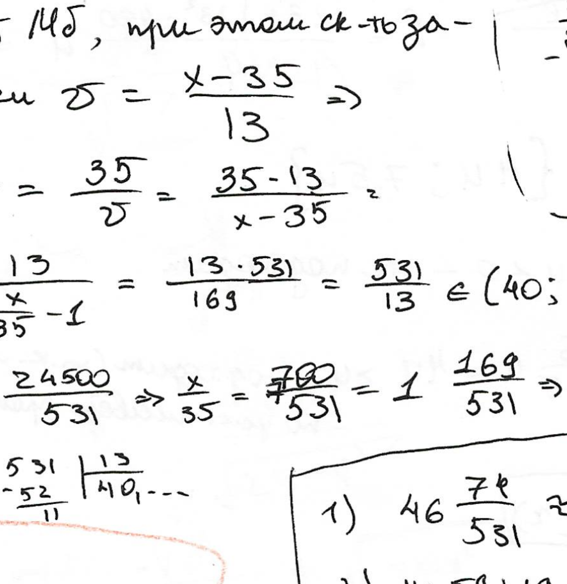
12:00:00 − 41с = 11:59:19

$$x = \frac{24500}{531} \Rightarrow \frac{x}{35} = \frac{700}{531} = 1\frac{169}{531} \Rightarrow \frac{x}{35} - 1 = \frac{169}{531}$$

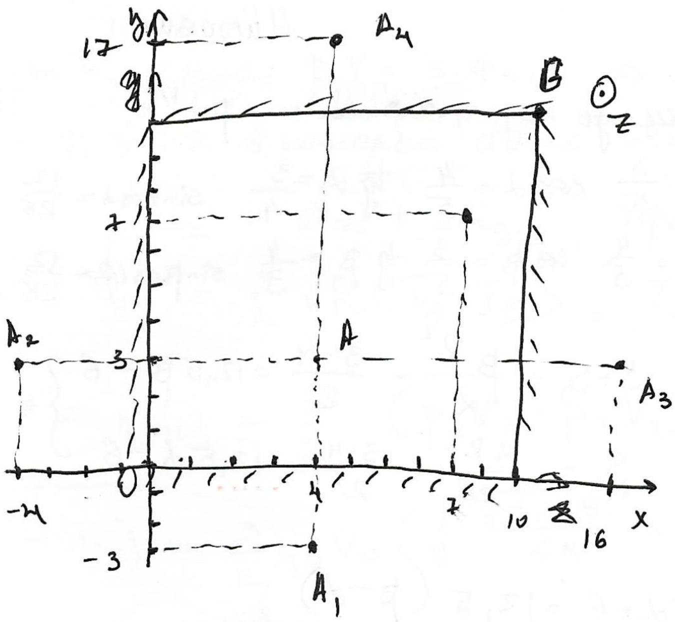
531 : 13 = 40,...
−52; 11

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ 46\frac{74}{531} \approx 46{,}139 \text{ Мб} \\ 2)\ 11:59:19 \end{array}}$$

№4.



Заметим, что спуск будет ровно 1 и на fixed величину с fixed скоростью => задача улитки как можно быстрее добежать до одной из стен, спуститься по ней и добежать в т. B. => найдём место в котором будет спуск за время $\Delta t = \frac{3}{2} = 1{,}5$ (мин). Рассмотрим вид сверху на комнату:



Чистовик

Тогда, ~~через~~ улитка будет двигаться по траектории луча света, пущенного из т. A, который отразившись в одном из зеркал O_y, O_x, G_y, G_x придёт в т. B. Воспользуемся методом изображений, найдя все изображения (в зеркалах) т. A, соединим их с B и выберем из этих отрезков min.

$A_1(4;-3)$ $A_2(-4;3)$ $A_3(16;3)$ $A_4(4;17)$

$B(7;7)$

$(A_1B)^2$: $(7-4)^2+(7+3)^2=9+100=109$

$(A_2B)^2$: $(7+4)^2+(7-3)^2=121+16=137$

$(A_3B)^2$: $(16-7)^2+(7-3)^2=81+16=97$

$(A_4B)^2$: $(7-4)^2+(17-7)^2=100+9=109$.

min — A_3B $\Rightarrow$ $t=\dfrac{\sqrt{(A_3B)^2}}{1}+\Delta t=\sqrt{97}+1{,}5$ (мин)

$\sqrt{97}\in(9;10)$ ближе к 10 $\Rightarrow$ $(9{,}9)^2=(10-0{,}1)^2=100-2+0{,}01=98{,}01$

$(9{,}8)^2=(10-0{,}2)^2=100-4+0{,}04=96{,}04$

Заметим, что 1,5 – точно до десятых $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ необходимо $\sqrt{97}$ округлить до дес.

$$\begin{array}{r} \times\, 9{,}85 \\ 9{,}85 \\ \hline 4925 \\ 7880 \\ 8865 \\ \hline 97{,}0225 \end{array}$$

$\sqrt{97}<\sqrt{97{,}0225}=9{,}85 \Rightarrow \sqrt{97}\approx 9{,}8$

$$\boxed{t=\sqrt{97}+1{,}5=9{,}8+1{,}5=11{,}3\text{ (мин)}}$$

№5

уравнение ф-ии: $\left(\frac{p}{p_0}\right)^2+\left(\frac{V}{V_0}\right)^2=25$

здесь и далее под p и V будем подразумевать обезразмеренную вел. с графи

$p=\sqrt{25-V^2}$

Чистовик

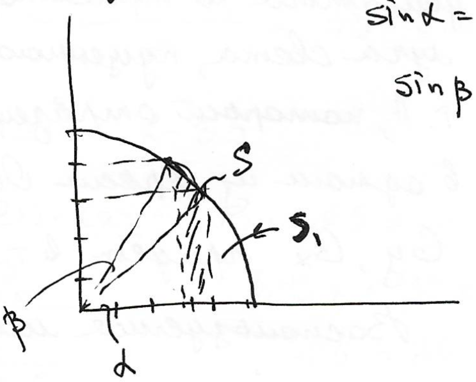
$p=\sqrt{25-V^2}$

А) $A=\int p\,dV$ – т.е. площадь под графиком $\cdot\, p_0V_0$.

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$ $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$ $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{12}{25}$

$R=5.$

$\sin\beta=\frac{4}{5}$ $\cos\beta=\frac{3}{5}$ $\operatorname{tg}\beta=\frac{4}{3}$ $\sin\beta\cos\beta=\frac{12}{25}$



$$\left.\begin{aligned} S+S_1&=\frac{\beta R^2}{2}-\frac{3\cdot4}{2}=12{,}5\beta-6\\ S_1&=\frac{\alpha R^2}{2}-\frac{3\cdot4}{2}=12{,}5\alpha-6\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow S=12{,}5\beta-6-12{,}5\alpha+6=12{,}5(\beta-\alpha)$

$\beta=\arcsin(0{,}8)$ $\alpha=\arcsin(0{,}6)$

$$\underline{A=12{,}5\,p_0V_0\cdot(\arcsin 0{,}8-\arcsin 0{,}6)}$$

$dQ=\frac{3}{2}\nu R\,dT+\underbrace{p\,dV}_{A}=\frac{5}{2}p\,dV+\frac{3}{2}V\,dp$

$\nu RT=pV$

$\nu R\,dT=d(pV)=p\,dV+V\,dp$

$p=\sqrt{25-V^2}\Rightarrow dp=\underbrace{\frac{dp}{dV}}_{p'_V}dV=\frac{1}{2\sqrt{25-V^2}}\cdot(-2V)\,dV=$

$=-\frac{V\,dV}{\sqrt{25-V^2}}$

$dQ=\frac{5}{2}\sqrt{25-V^2}\,dV-\frac{3}{2}\frac{V^2\,dV}{\sqrt{25-V^2}}$

Заметим, что тепло подводится ($dQ>0$) до некоторой точки (в которой $dQ=0$), а затем отводится ($dQ<0$) $\Rightarrow$ найдём т. в которой $dQ=0$.

$dQ=0\Rightarrow 5\sqrt{25-V^2}=3\frac{V^2}{\sqrt{25-V^2}}$

$5\cdot25-5V^2=3V^2\Rightarrow V=\sqrt{\frac{125}{8}}$

Проверим, $V\overset{?}{\in}[3;4]$: $\left.\begin{aligned}3&=\sqrt{9}=\sqrt{\frac{72}{8}}\\4&=\sqrt{16}=\sqrt{\frac{128}{8}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sqrt{\frac{125}{8}}\in[3;4]$

Заметим, что т. 1 и 2 лежат на одной изотерме

Чистовик

т.к. у них $pV = 3\cdot 4 = 12 \Rightarrow Q_1 = A_1 + \Delta U_{13}$

т. 3 – т. в которой $dQ=0$, т.е. $V=\sqrt{\frac{125}{8}}$

$Q_2 = A_2 + \Delta U_{32}$, причем $\Delta U_{32} = -\Delta U_{13}$

$\Delta U_{13} = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_1)$, $T_3 = \frac{p_3V_3}{\nu R}$, $T_1 = \frac{p_1V_1}{\nu R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta U_{13} = \frac{3}{2}(p_3V_3 - p_1V_1) = \frac{3}{2}p_0V_0\left(\sqrt{25-\frac{125}{8}}\cdot\sqrt{\frac{125}{8}} - 12\right) = \frac{3}{2}p_0V_0\left(\sqrt{\frac{75\cdot125}{64}} - 12\right) = \frac{3}{2}p_0V_0\left(\frac{25}{8}\sqrt{15} - 12\right)$

$\Delta U_{32} = -\Delta U_{13} = \frac{3}{2}p_0V_0\left(12 - \frac{25}{8}\sqrt{15}\right)$

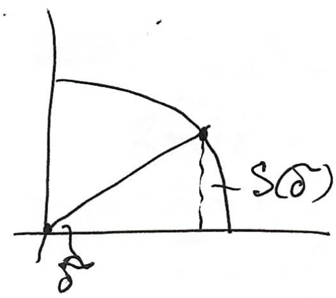
коорд. т. 3: $V = \sqrt{\frac{125}{8}}$, $p = \sqrt{25 - \frac{125}{8}} = \sqrt{\frac{75}{8}} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$

угол φ – угол на т. 3, $tg\varphi = \frac{p}{V} = \sqrt{\frac{3}{5}}$

$\varphi = \arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)$ $\sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$ $\sin\varphi\cdot\cos\varphi = \frac{\sqrt{15}}{8}$

$\cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$ $12{,}5\cdot\frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{25}{16}\sqrt{15}$



Найдём $S(\delta)$:

$$\frac{\delta R^2}{2} - \frac{R^2\sin\delta\cos\delta}{2} =$$

$$= 12{,}5\left(\delta - \frac{\sin 2\delta}{2}\right) = 12{,}5(\delta - \sin\delta\cos\delta)$$

$A_{13} = (S(\beta) - S(\varphi))p_0V_0 = \left(12{,}5\beta - 6 - 12{,}5\varphi + \frac{25}{16}\sqrt{15}\right)p_0V_0 =$

$= \left(12{,}5(\beta - \varphi) - 6 + \frac{25}{16}\sqrt{15}\right)p_0V_0$

$A_{32} = \left(12{,}5(\varphi - \alpha) + 6 - \frac{25}{16}\sqrt{15}\right)p_0V_0.$

$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{A_{13} + \Delta U_{13}}{-A_{32} + \underbrace{\Delta U_{13}}_{-\Delta U_{32}}}$ Q_2 с минусом, т.к. оно отрицательно

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\frac{75}{16}\sqrt{15} - 18 - 6 + 12{,}5(\beta - \varphi) + \frac{25}{16}\sqrt{15}}{\frac{75}{16}\sqrt{15} - 18 - 6 + \frac{25}{16}\sqrt{15} - 12{,}5(\varphi - \alpha)} = \frac{\frac{25}{4}\sqrt{15} - 24 + \frac{25}{2}(\beta - \varphi)}{\frac{25}{4}\sqrt{15} - 24 - \frac{25}{2}(\varphi - \alpha)}$$

Чистовик

$$= \frac{25\sqrt{15} - 96 + 50(\beta - \varphi)}{25\sqrt{15} - 96 + 50(\varphi - \alpha)} = \frac{\sqrt{15} - 3{,}84 + 2\left(\arcsin 0{,}8 - \arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}\right)}{\sqrt{15} - 3{,}84 + 2\left(\arcsin 0{,}6 - \arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}\right)}$$

Чистовик

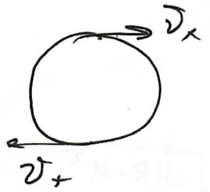
№6.

ЗСЭ: $m v_x^2 + \frac{kx^2}{2} + mgx\sin\alpha = const.$

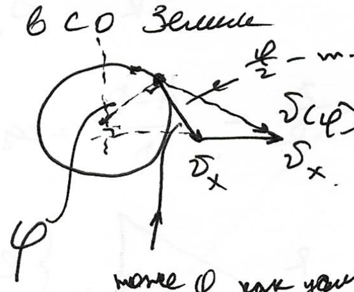
кин. обод пружина пот. обод

Если в некоторый мом-т у центра колеса $v = v_x$, то

в СО колеса: у точки в СО Земли



$\omega = \frac{v_x}{R}$



угол φ, как углы со взаимно ⊥-ми сторонами

$v(\varphi) = 2 v_x \cos\frac{\varphi}{2} = 2\dot x \cos\frac{\varphi}{2}$

для т. A $v_A(\varphi) = 2\dot x \cos\frac{\varphi}{2}$, где $\varphi = \frac{x}{R}$

$v_A(x) = 2\dot x \cos\frac{x}{2R}$

ЗСЭ: $m\dot x^2 + \frac{kx^2}{2} + mgx\sin\alpha = const$

$2m\dot x\ddot x + kx\dot x + mg\dot x\sin\alpha = 0.$

$2m\ddot x = -kx - mg\sin\alpha.$ (2)

$\dot x = -\int\frac{kx}{2m}dt - \int\frac{g}{2}\sin\alpha\, dt$

$\dot x = \cancel{\ldots} - \frac{g\sin\alpha}{2}t - \frac{k}{2m}\int_0^t x\,dt$

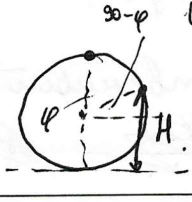
$x = -\frac{g\sin\alpha}{2}t^2 - \frac{k}{2m}\int_0^t\left(\int_0^t x\,dt\right)dt$

Найдём min v_A:

$v_A{}'_t = 0.$ $\ddot x\cos\frac{x}{2R} + \dot x\left(-\sin\frac{x}{2R}\cdot\frac{\dot x}{2R}\right) = 0.$

(1) $\ddot x\cos\frac{x}{2R} = \frac{\dot x^2}{2R}\cdot\sin\frac{x}{2R}$

$\varphi = \frac{x}{R}$



Найдём x в мом-т $v_A \to \min$:

Чистовик

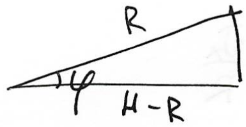
из геометрии: $H = R + R\sin(90-\varphi) = R(1+\cos\varphi)$

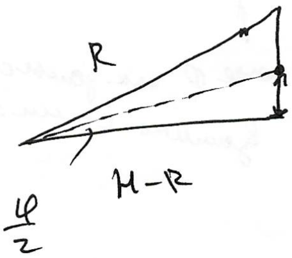
$$\frac{H}{R} - 1 = \cos\varphi = \cos\frac{x}{R}.$$

$$R\arccos\frac{H-R}{R} = x.$$

(1) $$\ddot{x} = \frac{\dot{x}^2}{2R}\cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2R}$$

$$\cos\frac{x}{R} = \frac{H-R}{R} = \cos\varphi$$





$$\left.\right\} \ell = \sqrt{R^2 - H^2 + 2HR - R^2} = \sqrt{2HR - H^2}$$

$$\frac{a}{\sqrt{2HR-H^2} - a} = \frac{H-R}{R} \text{ — св-во биссектр.}$$

$$\cancel{-aR} + aH + \cancel{aR} = \sqrt{2HR-H^2}(H-R)$$

$$aH = \sqrt{2HR-H^2}(H-R)$$

$$a = \frac{\sqrt{2HR-H^2}}{H}(H-R)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{H-R} = \sqrt{2\frac{R}{H} - 1}$$

$$\ddot{x} = \frac{\dot{x}^2}{2R}\sqrt{2\frac{R}{H}-1} \text{ — в т. } x = R\arccos\frac{H-R}{R}$$

(2) $$2m\ddot{x} = -kx - mg\sin\alpha$$

$$\ddot{x} = -\frac{kx}{2m} - \frac{g\sin\alpha}{2}$$

$$-\frac{kx}{2m} - \frac{g\sin\alpha}{2} = \frac{\dot{x}^2}{2R}\sqrt{2\frac{R}{H}-1}, \quad x = R\arccos\frac{H-R}{R}$$

Заметим, что $\ddot{x}$ ~~отрицателен~~ ≤ 0, при $x>0$ (~~в т.~~ $\sqrt{\ }$ $\to$ $\to \min$, по усл. $x>0$), а в min ОМ ≥ 0, т.к. $\dot{x}^2 \ge 0$, $2R \ge 0$, $\sqrt{2\frac{R}{H}-1} \ge 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ единственный возможный вар-т, ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ $\ddot{x} = 0 \Rightarrow \frac{kx}{m} = g\sin\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow kx = mg \sin\alpha$

Чистовик.

$$kR \arccos \frac{H-R}{R} = mg \sin\alpha$$

$$k = \frac{mg}{R} \frac{\sin\alpha}{\arccos \frac{H-R}{R}}$$

Черновик

$$\int \frac{-v^2 dv}{\sqrt{25-v^2}}$$

$$v\sqrt{\;} = \int \left(\frac{-v^2 dv}{\sqrt{\;}} + \frac{v\,dv}{\sqrt{\;}} \right) = v\sqrt{\;}$$

$$+ \frac{\int \frac{-v\,dv}{\sqrt{\;}}}{\sqrt{\;}} = (v+1)\sqrt{\;}$$

$$(v-1)\sqrt{\;} = \cancel{\frac{-2v^2 dv}{\sqrt{\;}} + \frac{-v\,dv}{\sqrt{\;}}} =$$

$$= \frac{-v\,dv}{\sqrt{\;}} (v \pm 1) +$$

$$v\sqrt{\;} \quad \frac{-1}{\sqrt{\;}} \qquad \int (25-v^2)^{\frac{1}{2}} dv = \frac{d(25-v^2)}{-2v}$$

$$\frac{-v^2 dv}{\sqrt{25-v^2}} =$$

$$v\sqrt{\;}' = \frac{-v^2 dv}{\sqrt{\;}} + \sqrt{25-v^2}$$