51-47-83-39
(60.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ~~[illegible]~~

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по Космонавтике
профиль олимпиады

Угольникова Егора Олеговича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«14» марта 2026 года

Подпись участника

51-47-83-39
(60.1)

Чистовик 66 (шестьдесят шесть)

Задача 3 (вариант 4)

Садовс (Садовничая)
(А.М.Савчук)

$m_1 = 990$ г, $m_2 = 10$ г.

$m = m_1 + m_2 = 1000$ г $= 1$ кг

$V_1 = 100$ м/с

$k = 100$ Н/м

Удар абсолютно неупругий ~~...~~ (пулька застряла в грузе) => => тело массой m ~~...~~ начнёт двигаться, согласно закону сохранения импульса.

$m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot V_1 = m \cdot V \Rightarrow V = V_1 \cdot \frac{m_2}{m} = 100 \cdot \frac{10}{1000} = 1$ м/с.

Если пружина сжата на x, то на груз действует сила $F = -kx$ (противонаправлена сжатию) => ускорение $a = \frac{F}{m} = -\frac{kx}{m}$.

Заметим, что ускорение пропорционально расстоянию и противонаправлено ему => груз будет совершать гармонические колебания. Пусть ось, по которой движется груз, направлена в сторону стенки от груза, x_0 и a_0 - макс. сжатие пружины и ускорение, придаваемое грузу.

Тогда $x = x_0 \cdot \sin(\omega t)$, $a = x'' = -x_0 \omega^2 \sin(\omega t) = a_0 \sin(\omega t)$

$\Rightarrow a_0 = -x_0 \omega^2$.

Также известно, что $a_0 = -\frac{kx_0}{m}$.

$-x_0 \omega^2 = -\frac{kx_0}{m} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$. $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T - период колебаний. $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$.

Первое макс. сжатие произойдёт через четверть периода после удара. $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{20} \approx 0,157$ с. Ответ: 0,157 с.

Задача 4 (вариант 3)

Пусть $l_З$ и l_N – радиусы орбит Земли и N, p_1 и p_2 – параллаксы звезды при наблюдении с них, $a_З$ и a_N – альбедо Земли и N, $r_З$ и r_N – ~~их~~ их радиусы. L – расстояние до звезды в созвездии Дева. $p_З = \frac{l_З}{L}$, $p_N = \frac{l_N}{L}$. $\frac{p_N}{p_З} = \frac{1}{2} = \frac{l_N}{l_З}$.

Температура T – одинакова для Земли и N и равновесна $\Rightarrow$ для обоих тел ~~падающее~~ поглощение равно излучению:

$$\cancel{(1-a_З)B \cdot \frac{4\pi l_З^2}{\pi r_З^2} = 4\pi \sigma T^4}$$

$$(1-a_З)B \cdot \frac{\pi r_З^2}{4\pi l_З^2} = 4\pi T^4 \sigma r_З^2,$$ где B – светимость Солнца, σ – константа.

$$1-a_З = \frac{4\pi\sigma r_З^2 \cdot 4\pi l_З^2 T^4}{\pi r_З^2} = 16\pi\sigma T^4 l_З^2$$

Аналогично для N:

$$1-a_N = 16\pi\sigma T^4 l_N^2.$$

$$\frac{1-a_N}{1-a_З} = \frac{16\pi\sigma T^4 l_N^2}{16\pi\sigma T^4 l_З^2} = \frac{l_N^2}{l_З^2} = \left(\frac{l_N}{l_З}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-a_N = \frac{1-a_З}{4} \Rightarrow a_N = 1 - \frac{1-a_З}{4} = 1 - \frac{1-0{,}37}{4} = 1 - \frac{0{,}63}{4} =$$

$= 1 - 0{,}1575 = 0{,}8425$. Ответ: $a_N = 0{,}8425$

Верно

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

51-47-83-39 (60.1)

Задача 6.

Для того, чтобы орбита была селеностационарной, ~~период~~ период обращения спутника вокруг Луны должен быть равен периоду обращения Луны вокруг своей оси, который равен 27,32 земных суток.

$T = 27{,}32$ дн $= 2{,}36 \cdot 10^6$ с

верно

Из 3-го закона Кеплера:

$GMT^2 = 4\pi^2 R^3 \Rightarrow R^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2} = 6{,}93 \cdot 10^{26}$ $м^3 \Rightarrow$

23 Арифм. ошибка

$\Rightarrow R \approx 1{,}9 \cdot 10^8$ м $= 1{,}9 \cdot 10^5$ км $= 190\,000$ км.

Теоретически, если бы Земля не влияла на спутник, выведенный на орбиту ~~Луны~~ вокруг Луны с радиусом R, то проекция спутника на поверхность Луны оставалась бы постоянной. Но в реальности расстояние от Земли до Луны (384 000 км) всего в 2 раза больше R, и, т.к. Земля в 81,3 раза массивнее Луны, во всех точках такой орбиты Земля будет ~~[illegible]~~ притягивать ~~на~~ спутник сильнее Луны и он быстро сойдёт с орбиты.

Так как периоды обращения Луны вокруг своей оси и вокруг Земли равны, то для того, чтобы проекция спутника на поверхность Луны оставалась постоянной, нужно вывести его в любую из пяти точек Лагранжа системы Луна-Земля. При этом, только из четырёх из них можно наблюдать поверхность Луны, т.к.

Одна из точек находится за Землёй.
При этом, две из оставшихся четырёх точек находятся далеко от Луны (384000 км) в вершинах равносторонних треугольников с Луной и Землёй.
Поэтому, лучшие для наблюдений точки лагранжа находятся прямо за Луной и между Луной и Землёй.

Задача 1 (Вариант 1)

$x = [x] + \{x\}$.

$x^2 = [x]^2 + \{x\}^2 + 2[x]\{x\}$

Аналогично для y и z.

Сложим все 3 уравнения:

$2(x^2+y^2+z^2) = 2\big(([z]^2+1)(\{z\}^2+1) + ([x]^2+1)(\{x\}^2+1) +$

$+ ([y]^2+1)(\{y\}^2+1)\big)$. ~~Сократим~~ поделим на 2 и раскроем скобки:

$x^2+y^2+z^2 = ([z]\{z\})^2 + [z]^2 + \{z\}^2 + 1 + \dots$ (аналог. для x и y)

$\cancel{[x]^2} + \cancel{\{x\}^2} + 2[x]\{x\} + (y^2+z^2) = ([x]\{x\})^2 + \cancel{[x]^2} + \cancel{\{x\}^2} + 1 + \dots$ (аналог. z и y)

$[x]^2 + \{x\}^2$ сокращается (для y и z тоже)

$[x]^2\{x\}^2 - 2[x]\{x\} + 1 + [y]^2\{y\}^2 - 2[y]\{y\} + 1 +$

$+ [z]^2\{z\}^2 - 2[z]\{z\} + 1 = 0$

$([x]\{x\} - 1)^2 + ([y]\{y\} - 1)^2 + ([z]\{z\} - 1)^2 = 0$

Сумма квадратов равна $0 \Rightarrow$ каждый из них равен 0.

$[x]\{x\}=1$

$[y]\{y\}=1$

$[z]\{z\}=1$

Если $[x]=N$, то $\{x\}=\frac{1}{N} \Rightarrow x=N+\frac{1}{N}$.

Если $N<0$, то $\{x\}=\frac{1}{N}<0$, чего не может быть, т.к. $x \geq \boxed{x}$; $N \neq 0$, т.к. N в знаменателе;

Если $N=1$, то $x=1+\frac{1}{1}=2$, но дробная часть числа 2 равна 0. ~~N=1 подходит только~~ $N=1$ — это „вырожденный корень", обозначающий число 1,999...(9), у которого целая часть равна 1 и дробная часть „равна" 0,99...(9)=1. При $N \geq 2$ все целые N подходят.

Так как мы возвели уравнения, не все комбинации x, y и z подходят.

~~Уравнения симметричны (т.е. если поменять две переменные местами, ничего не изменится~~

Пусть $x=N_1+\frac{1}{N_1}$, $y=N_2+\frac{1}{N_2}$, $z=N_3+\frac{1}{N_3}$, где N_1, N_2, N_3 — целые числа ≥ 2.

$$\left(N_1+\frac{1}{N_1}\right)^2+\left(N_2+\frac{1}{N_2}\right)^2=2\left(N_3^2+1\right)\left(1+\frac{1}{N_3^2}\right)$$

$$\left(\frac{N_1^2+1}{N_1}\right)^2+\left(\frac{N_2^2+1}{N_2}\right)^2=2\,\frac{(N_3^2+1)(N_3^2+1)}{N_3^2}=2\left(\frac{N_3^2+1}{N_3}\right)^2$$

Пусть $n_1=\underbrace{\left(\frac{N_1^2+1}{N_1}\right)^2}_{=x^2}$, $n_2=\underbrace{\left(\frac{N_2^2+1}{N_2}\right)^2}_{=y^2}$, $n_3=\underbrace{\left(\frac{N_3^2+1}{N_3}\right)^2}_{=z^2}$

$n_1+n_2=2n_3$

Аналогично для других двух уравнений.

$n_3 + n_2 = 2n_1$ (1)
$n_1 + n_3 = 2n_2$ (2)
$n_2 + n_1 = 2n_3$ (3)

вычтем (2) из (1):

$\cancel{n_3} + n_2 - \cancel{n_3} - n_1 = 2n_1 - 2n_2$

$n_2 - n_1 = 2(n_1 - n_2) = -2(n_2 - n_1)$

$3 \cdot (n_2 - n_1) = 0 \Rightarrow n_1 = n_2.$

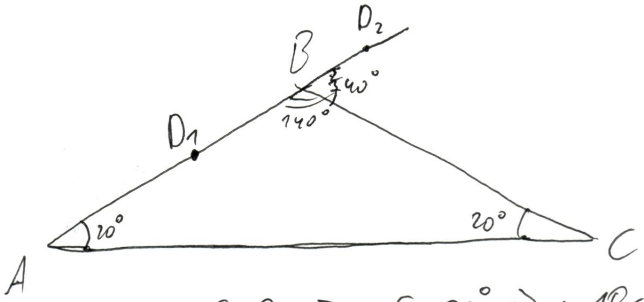
Аналогично $n_2 = n_3 \Rightarrow n_1 = n_2 = n_3 \Rightarrow x = y = z$, т.к. $n_1 = x^2$ и т.д.

Следовательно, решения изначальной системы уравнений:

$x = y = z = \frac{1}{N} + N$, где N - целое число, $N \geqslant 2$.

Ответ: $x = y = z = N + \frac{1}{N}$, N - целое, $N \geqslant 2$.

Задача 2 (Вариант 2)



$\angle A = 20°$, $AB = BC \Rightarrow \angle C = 20° \Rightarrow \angle ABC = 180° - 2 \cdot 20° = 140°.$

Точка D находится на AB. $\angle CBD = 50°$. Это невозможно, т.к. если D находится с той же стороны от B, что и A, то $\angle CBD = 140°$, если с другой — то $\angle CBD = 180° - 140° = 40° \Rightarrow$ выбрать такую точку D на AB нельзя.

Черновик

$\cancel{[z]^2+1 \geq z^2}$

$\cancel{x^2+y^2 \geq 2z^2}$

$\cancel{y^2+z^2 \geq 2x^2}$

$\cancel{x^2+z^2 \geq 2y^2}$

нет корней

$\{z\}^2+1 \geq 1$

$x \neq y \neq z$

$x+y=2z$

$x+z=2y$

$y+z=2x$

$\cancel{y-z=2(z-y) \Rightarrow 1=2}$

$[x]^2+1$

$x^2=[x^2]+2[x]\{x\}+\{x\}^2$

$2([x]^2+1)(\{x\}^2+1)=2[x]^2\{x\}^2+2[x]^2+2\{x\}^2+2$

$2(x^2+y^2+z^2)=2([x]^2\{x\}^2+[x]^2+\{x\}^2+1+\ldots) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{[x]^2}+\cancel{\{x\}^2}+2[x]\{x\}+\ldots=[x]^2\{x\}^2+\cancel{[x]^2}+\cancel{\{x\}^2}+1$

$[x]^2\{x\}^2-2[x]\{x\}+1=0 \Rightarrow ([x]\{x\}-1)^2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow [x]\{x\}=1=[x](x-[x])=$

$\frac{25}{4}+\frac{100}{9}$

$25\left(\frac{1}{4}+\frac{4}{9}\right)=25\cdot\frac{25}{36}=\frac{25^2}{36}$

$([z]^2+1)(\{z\}^2+1)=\frac{25^2}{72}$

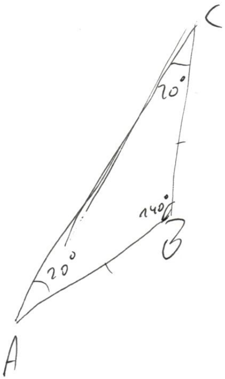
$z^2=[x]^2\{x\}^2+[x]^2+\{x\}^2+1+[y]^2\{y\}^2+[y]^2+\{y\}^2+1-[z]^2\{z\}^2-[z]^2-\{z\}^2-1$

$2[z]^2+2\{z\}^2+[z]^2\{z\}^2+2[z]\{z\}+1=\ldots$

$\left(N_1+\frac{1}{N_1}\right)^2+\left(N_2+\frac{1}{N_2}\right)^2=\left(\frac{N_1^2+1}{N_1}\right)^2+\left(\frac{N_2^2+1}{N_2}\right)^2=2(N_3^2+1)\left(\frac{1}{N_3^2}+1\right)=$

$=2\left(\frac{N_3^2+1}{N_3}\right)^2$

$a(x) = -\frac{kx}{m}$ Черновик



$x = x_0 \cdot \sin(\omega t)$

$a = a_0 \cdot \sin(\omega t) = -x_0\omega^2 \cdot \sin(\omega t)$

$a_0 = -x_0\omega^2 = -\frac{kx_0}{m}$

$\omega^2 = \frac{k}{m} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$4{,}17 \cdot 10^6$

$1-a = \frac{16\pi T^4 \cdot L^2}{B} = \frac{16 \cdot 3{,}14 \cdot 288^4 \cdot 9{,}5^2 \cdot 10^{22}}{10^{26} \cdot 3{,}88}$

$= \frac{50 \cdot 2{,}25 \cdot 288^4 \cdot \cancel{10^{22}}}{3{,}88 \cdot \cancel{10^{26}}_{10^4}} =$

$\frac{\cancel{1}125 \cdot 288^4 G}{3{,}88 \cdot 10^4}$

$\frac{(1-a_1)B \cdot \cancel{\pi} r_1^2}{4\cancel{\pi} L_1^2} = 4\pi G \cancel{r_1^2} T^4$

$\frac{(1-a_1)B}{L_1^2} = 16\pi T^4 G$

$1-a = \frac{16\pi T^4 GL^2}{B} \approx \frac{5 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 10^9 \cdot 5{,}6 \cdot 10^{-8} \cdot 3{,}25}{3{,}88 \cdot 10^4}$

$\frac{1-a_1}{L_1^2} = \frac{1-a_2}{L_2^2}$

$1-a_2 = \frac{1-a_1}{4} = 0{,}1575 \Rightarrow a_2 = 0{,}8425$

$T\sqrt{\frac{GM}{r}} = 2\pi r$

$T^2\frac{GM}{r} = 4\pi^2 r \Rightarrow GMT^2 = 4\pi^2 r^3$

$r^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2} = GM \cdot (3{,}76 \cdot 10^7)^2 = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}348 \cdot 10^{22} \cdot (3{,}76 \cdot 10^7)^2$ ~~$\approx 10^8$~~

$693 \cdot 10^{25} = 6930 \cdot 10^{24} \approx (19 \cdot 10^8)^3 м^3 \Rightarrow r = 19 \cdot 10^8 м = 190\,000$ км

~~$\frac{GM}{r^2} = \omega^2 r \Rightarrow \omega^2 = \frac{GM}{r^3}$~~

$\omega^2 = \frac{Gm_З}{r_1^3}$ $\frac{Gm_З}{(r_1+r)^2} + \frac{Gm_1}{r^2} = \omega^2(r_1 + r)$

$\frac{m_З}{r_1^3} = \frac{m_З}{(r_1+r)^3} + \frac{m_1}{r^2(r_1+r)} = \frac{m_З}{r_1^3 + 3r_1^2 r + 3rr_1^2} + \frac{m_1}{r^2 r_1}$